ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Τεχνολογίες Πολυμέσων

Ενότητα # 2: Αριθμητικά συστήματα

Γιώργος Καρυδάκης
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σύνοψη προηγούμενης ενότητας

- Διαδικαστικά
- Βιβλιογραφία
- Ορισμός πεδίου
- Περίγραμμα

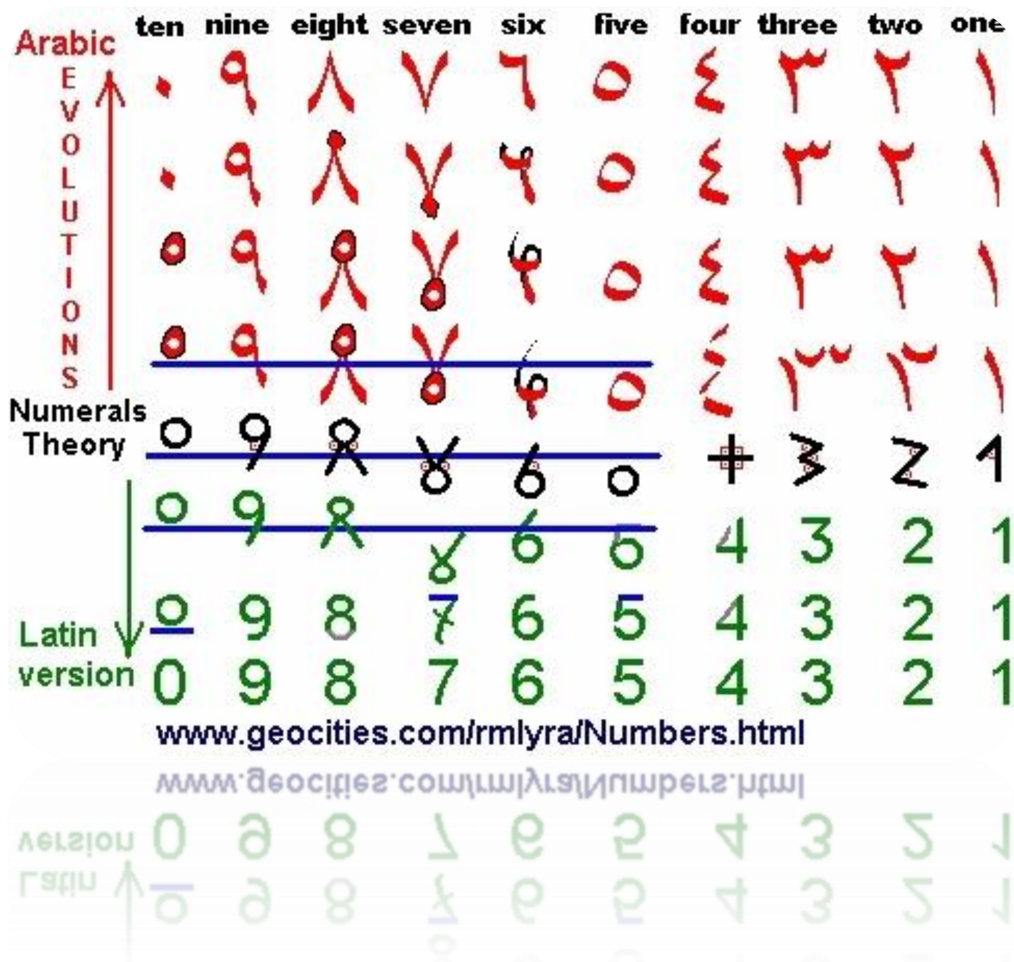
Περιεχόμενα ενότητας

- Αριθμητικά συστήματα
- Μετατροπή
- Πράξεις δυαδικών αριθμών
- Αρνητικοί και δεκαδικοί
- Άλγεβρα boole
- Ψηφιακή σχεδίαση

Ενότητα # 2

Αριθμητικά συστήματα

Προέλευση αριθμητικού συστήματος



Ελληνικό αριθμητικό σύστημα

Letter	Value	Letter	Value	Letter	Value
α′	1	ι′	10	ρ′	100
β′	2	κ′	20	σ′	200
γ′	3	λ′	30	τ′	300
δ′	4	μ′	40	υ′	400
ε′	5	ν′	50	φ′	500
ϝ′ or ϛ′ or στ′	6	ξ′	60	χ′	600
ζ′	7	ο′	70	ψ′	700
η′	8	π′	80	ω′	800
θ′	9	ϟ′	90	ϡ′	900

Ρωμαϊκό αριθμητικό σύστημα

Units	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Tens	X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
Hundreds	C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM
Thousands	M	MM	MMM	$\overline{\mathrm{IV}}$	$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{VI}}$	$\overline{\mathrm{VII}}$	$\overline{\mathrm{VIII}}$	$\overline{\mathrm{IX}}$

Κωδικοποίηση αριθμών με διαφορετικά σύμβολα

- Η κωδικοποίηση των αριθμών εξελίχθηκε για τις ανάγκες του κάθε πολιτισμού για να αναπαρασταθούν χρονολογίες, μονάδες μέτρησης αγαθών, χρηματικές συναλλαγές κλπ κλπ.
- Καθιερώθηκε η χρήση των γνωστών αραβικών αριθμών και το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με 10 ψηφία:
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Αριθμητικά συστήματα

- Το όνομα ενός συστήματος αρίθμησης προέρχεται από τον αριθμό των ψηφίων που χρησιμοποιεί για την παράσταση των αριθμών.
- Ο αριθμός αυτός ονομάζεται «βάση» του συστήματος
- Το δεκαδικό σύστημα (βάση 10) χρησιμοποιεί τα ψηφία
  - 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Το δυαδικό σύστημα (βάση 2) χρησιμοποιεί τα ψηφία
  - 0,1
- Το οκταδικό σύστημα (βάση 8) χρησιμοποίει τα ψηφία
  - 0,1,3,4,5,6,7
- Το δεκαεξαδικό σύστημα (βάση 16) χρησιμοποιεί τα ψηφία
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, A, B, C, D, E και F

Ψηφία αριθμητικών συστημάτων

Δεκαδικά ψηφία		Δυαδικά ψηφία	Οκταδικά ψηφία	Δεκαεξαδικά ψηφία	
0	5	0	4	0	8
1	6	1	5	1	9
2	7		6	2	A
3	8		7	3	B
4	9			4	C
				5	D
				6	E
				7	F

$$\mathrm{A}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma = \sum_{i=0}^{n} d_i \times \beta^i$$

Αριθμητικά συστήματα

- Η θέση των συμβόλων μέσα στον αριθμό τους δίνει και την συνολική αριθμητική τους αξία, γιατί κάθε σύμβολο πολλαπλασιάζεται με την βάση υψωμένη σε κάποια δύναμη.
- Ο εκθέτης της θέσης ακριβώς αριστερά από την υποδιαστολή είναι μηδέν.
- Οι εκθέτες αυξάνονται κατά μια μονάδα αν πηγαίνουμε σε αριστερότερη θέση και μειώνονται κατά μια μονάδα αν πηγαίνουμε σε δεξιότερη θέση.
- Όλες οι χρησιμοποιούμενες θέσεις, από την μεγαλύτερη μέχρι την μικρότερη, πρέπει να περιέχουν κάποιο σύμβολο, έστω κι αν αυτό είναι το μηδέν.

Παραδείγματα δεκαδικών (DEC)

Ερμηνεία αριθμών

$$2143 = 2 \cdot 1.000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

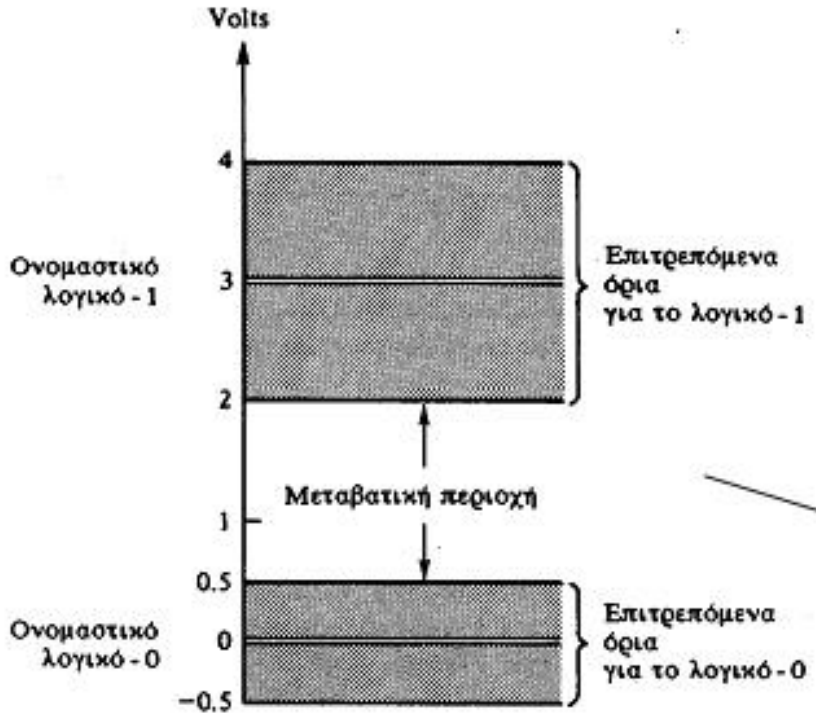
Αλλιώς: $2.143 = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

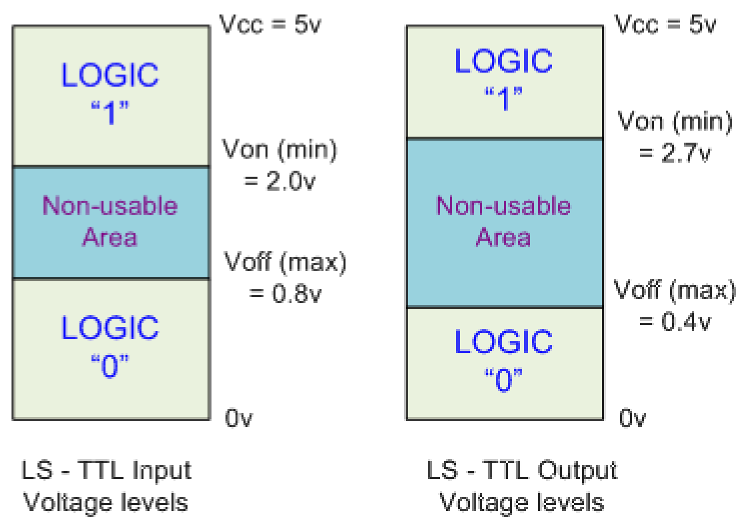
Παρομοίως: $14.023 = 1 \cdot 10.000 + 4 \cdot 1.000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

Γιατί ο Η/Υ χρησιμοποιεί δυαδικό;

- Αν θέλαμε να παραστήσουμε τους αριθμούς στον υπολογιστή με το δεκαδικό σύστημα, θα έπρεπε να κατασκευάσουμε ένα φυσικό μέσο που να παριστάνει 10 διαφορετικές καταστάσεις
- Είναι πολύ φθηνότερο
  - σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα η αναπαράσταση του ψηφίου 1 μπορεί να είναι περνάει ρεύμα ενώ 0 δεν περνάει ρεύμα
- Πολύ πιο εύκολο
  - να γίνουν αριθμητικές πράξεις σε αυτό
  - αποθήκευση
  - επεξεργασία

Διαμόρφωση ηλεκτρικού ρεύματος





Βάση συστήματος αρίθμησης

- Σε όλα τα αριθμητικά συστήματα η βάση γράφεται [β]
  - Στο δυαδικό [β] είναι το δύο.
  - Στο τετραδικό [β] είναι το τέσσερα.
  - Στο οκταδικό [β] είναι το οκτώ.
  - Στο δεκαδικό [β] είναι το δέκα.
  - Στο δεκαεξαδικό [β] είναι το δεκαέξι.

Δεκαδικό / Δυαδικό / Οκταδικό / Δεκαεξαδικό σύστημα αριθμών.

Δεκαδικό (βάση 10)	Δυαδικό (βάση 2)	Οκταδικό (βάση 8)	Δεκαεξαδικό (βάση16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Παραδείγματα οκταδικών (OCT)

Παραδείγματα

$23_8 =$

$2 \bullet 8^1 + 3 \bullet 8^0 =$

$16_{10} + 3_{10} =$

19_{10}

$4104_8 =$

$4 \bullet 8^3 + 1 \bullet 8^2 + 0 \bullet 8^1 + 4 \bullet 8^0 =$

$4 \bullet 512 + 1 \bullet 64 + 0 \bullet 8 + 4 \bullet 1 =$

2116_{10}

Παραδείγματα δεκαεξαδικών (HEX)

$23_{16} =$

$$2 \bullet 16^1 + 3 \bullet 16^0 =$$
$$32_{10} + 3_{10} =$$
$$35_{10}$$

$4104_{16} =$

$$4 \bullet 16^3 + 1 \bullet 16^2 + 0 \bullet 16^1 + 4 \bullet 16^0 =$$
$$4 \bullet 4096 + 1 \bullet 256 + 0 \bullet 16 + 4 \bullet 1 =$$
$$16644_{10}$$

10

- Το 10 τι συμβολίζει στο σύστημα αρίθμησης
  - 2αδικό
  - 4τραδικό
  - 8αδικό
  - 16δικό
  - 10δικό

Μετατροπή

Μετατροπή

$$(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_1\ a_0)_r = (b_m\ b_{m-1}\ \ldots\ b_1\ b_0)_\rho$$

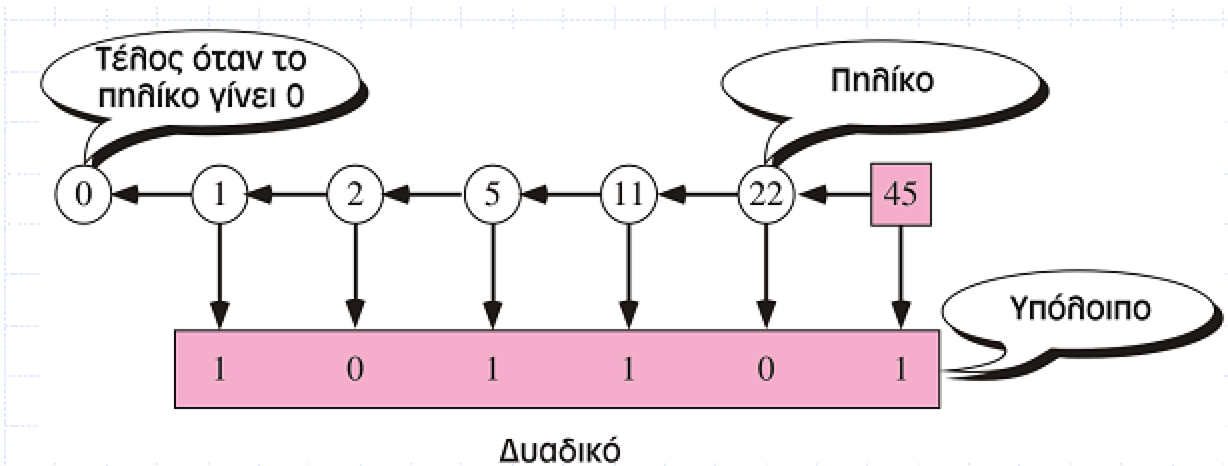
$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r^1 + a_0 = b_m \rho^m + b_{m-1} \rho^{m-1} + \ldots + b_1 \rho^1 + b_0$$

$$a_0 + r\,(a_1 + \ldots r(a_{n-1} + r\, a_n))) = b_0 + \rho(b_1 + \ldots + \rho(b_{m-1} + \rho\, b_m))))$$

Μετατροπή

Α		Π	Υ	Χ
53	*Διαιρούμε το 53 με το 2*	26	1	**1**
26	*Διαιρούμε το 26 με το 2*	13	0	**0**1
13	*Διαιρούμε το 13 με το 2*	6	1	**1**01
6	*Διαιρούμε το 6 με το 2*	3	0	**0**101
3	*Διαιρούμε το 3 με το 2*	1	1	**1**0101
1	*Διαιρούμε το 1 με το 2*	0	1	**1**10101
0	$\mathbf{53_{(10)} = 110101_{(2)}}$			

Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό



Μετατροπή δεκαδικού σε οκταδικό

Α		Π	Υ	Χ
312	*Διαιρούμε το 312 με το 8* →	39	0	**0**
39	*Διαιρούμε το 39 με το 8* →	4	7	**7**0
4	*Διαιρούμε το 4 με το 8* →	0	4	**4**70
0	→			

$312_{(10)} = 470_{(8)}$

Μετατρέψτε

- Δεκαδικό σε δυαδικό
  - 10
  - 43
  - 132
- Δυαδικό σε δεκαδικό
  - 100110
  - 010101
  - 001001
- Δυαδικό σε Οκταδικό
  - 1001
- Δεκαεξαδικό σε δυαδικό
  - 25

Μεταροπή

Δεκαεξαδικό	Δυαδικό
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

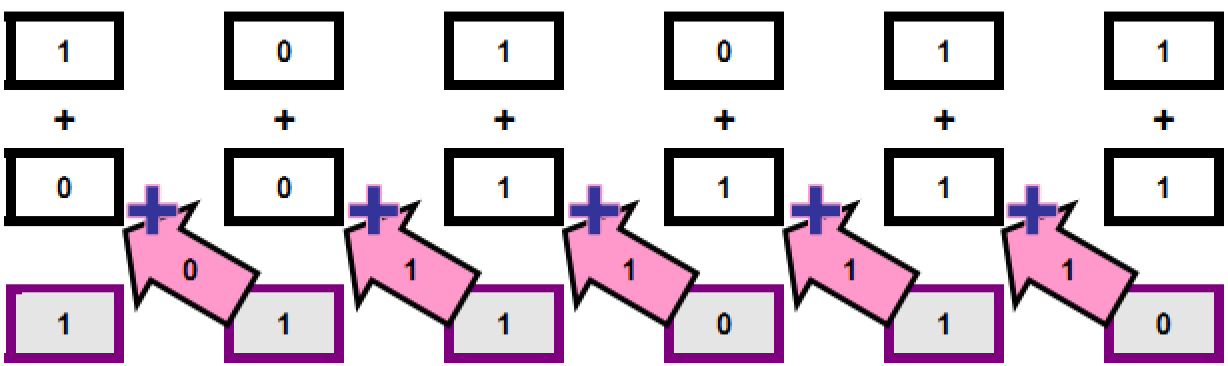
Πράξεις δυαδικών

Πρόσθεση

- 0+0=0
- 0+1=1
- 1+0=1
- 1+1 = 0
  - Άθροισμα =0, Κρατουμενο=1
- 1+1+1 = 1
  - Άθροισμα=1, Κρατούμενο =1

- 101011+001111=?

Πρόσθεση

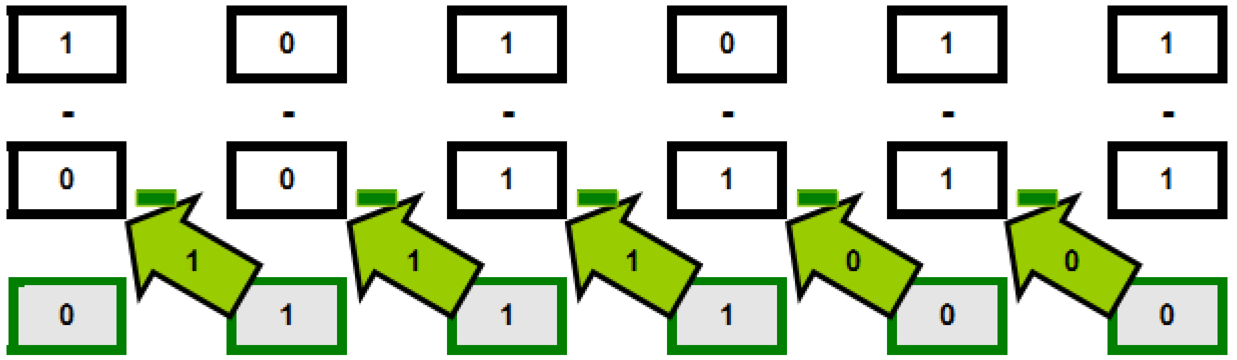


Αφαίρεση

- 0-0=0
- 1-0=1
- 1-1=0
- 0-1= 1
  - Υπόλοιπο 1, Δανεικό =1

- 101011-001111=?

Αφαίρεση



Πολλαπλασιασμός

- 0 x 0 = 0
- 0 x 1 = 0
- 1 x 0 = 0
- 1 x 1 = 1

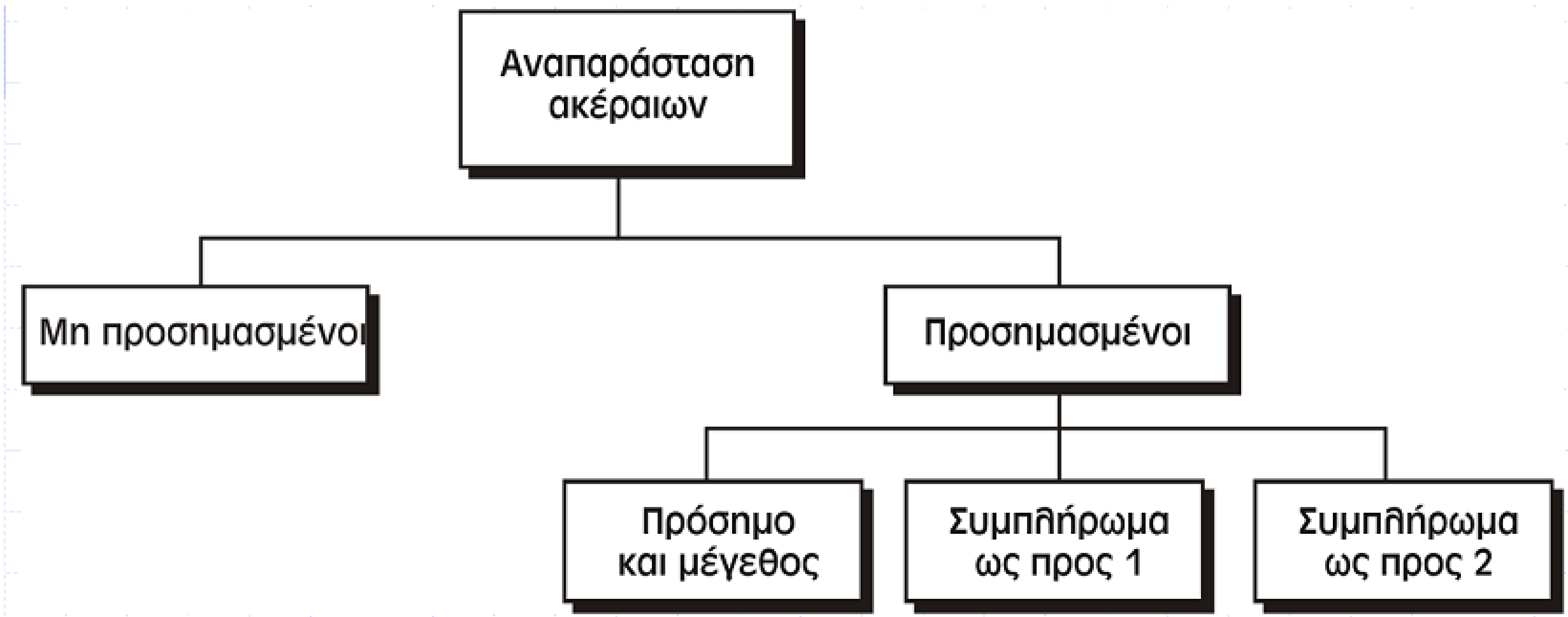
- 1101101x 1011=?

Αρνητικοί και δεκαδικοί

Παράσταση αρνητικών αριθμών

- Η παράσταση των θετικών αριθμών είναι ιδία σε όλα τα αριθμητικά συστήματα
- Η κυρία διάφορα των αριθμητικών συστημάτων έγκειται στον τρόπο παράστασης των αρνητικών αριθμών.
- Τρία είναι τα πιο διαδεδομένα συστήματα παράστασης αρνητικών αριθμών
  - πρόσημο και μετρό
  - συμπλήρωμα ως προς ΕΝΑ
  - συμπλήρωμα ως προς ΔΥΟ.

Αναπαράσταση

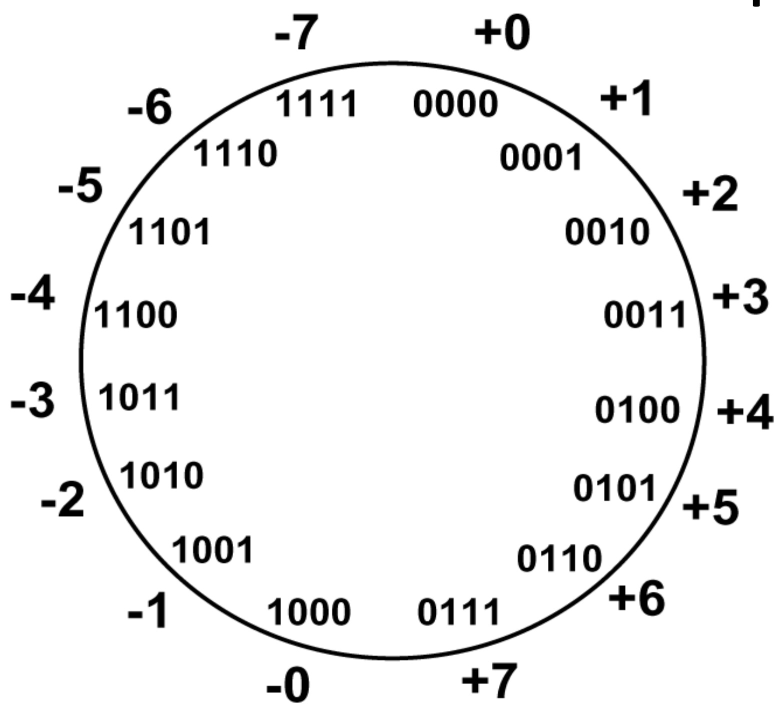


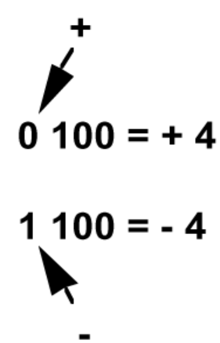
Μη προσημασμένοι

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
7	00000111	0000000000000111
234	11101010	0000000011101010
258	Υπερχείλιση	0000000100000010
24.760	Υπερχείλιση	0110000010111000
1.245.678	Υπερχείλιση	Υπερχείλιση

Προσημασμένοι μετρό και πρόσημο

- Το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB) είναι το πρόσημο: 0= θετικός, 1=αρνητικος
- Τα υπόλοιπα bits είναι το μετρό



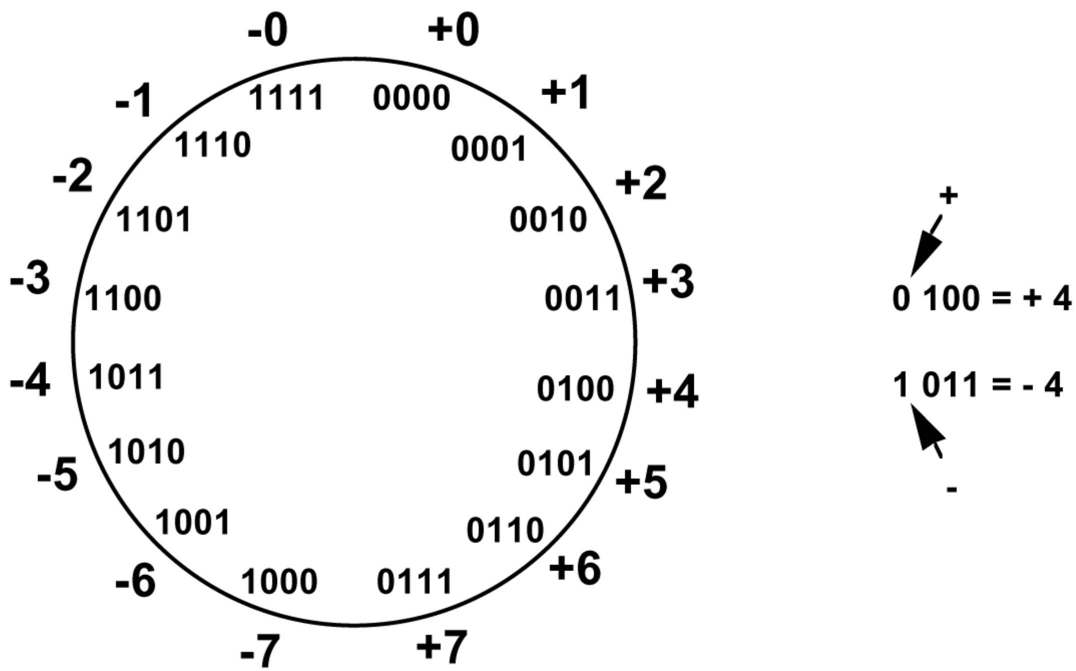


Προσημασμένοι (πρόσημο και μέγεθος)

Δεκαδικός	Δέσμευση **8** μπιτ	Δέσμευση **16** μπιτ
+7	**0**0000111	**0**000000000000111
–124	**1**1111100	**1**000000001111100
+258	Υπερχείλιση	**0**000000100000010
–24.760	Υπερχείλιση	**1**110000010111000

Παράσταση αρνητικών με συμπλήρωμα ως προς ένα

- Έστω Ν θετικός αριθμός
- $[N]_1=(2^n-1) - N$ είναι το συμπλήρωμα του ως προς ένα και είναι ο αρνητικός του Ν

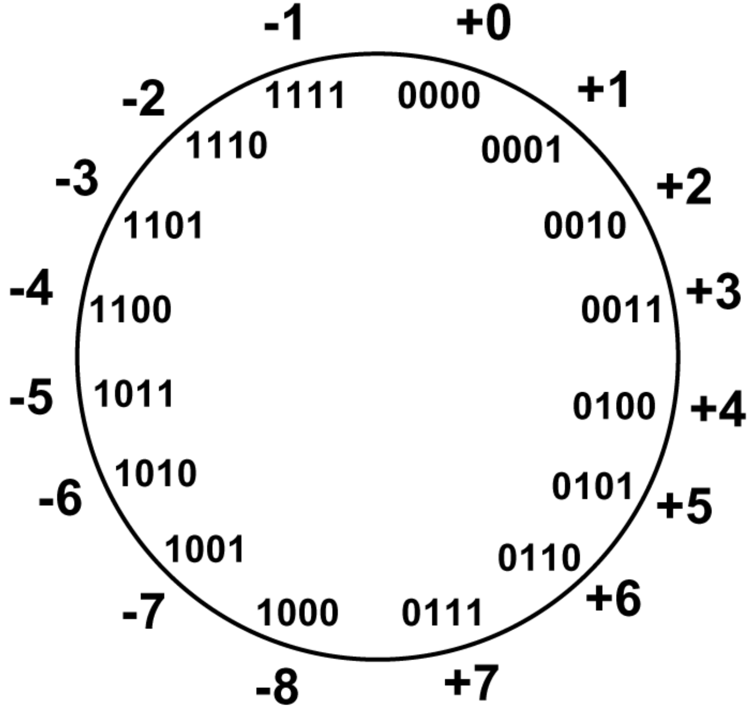


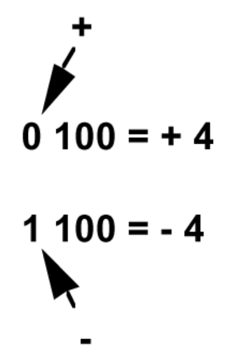
Προσημασμένοι (συμπλήρωμα ως προς ένα)

Δεκαδικός	Δέσμευση 8 μπιτ	Δέσμευση 16 μπιτ
+7	00000111	0000000000000111
−7	11111000	1111111111111000
+124	01111100	0000000001111100
−124	10000001	1111111110000011
+24.,760	Υπερχείλιση	0110000010111000
−24.,760	Υπερχείλιση	1001111101000111

Προσημασμένοι (συμπλήρωμα ως προς δύο)

- Έστω N είναι ένας θετικός αριθμός
- $[N]_2=2^n - N$ είναι το συμπλήρωμα του ως προς δυο και είναι ο αρνητικος του N





Προσημασμένοι (συμπλήρωμα ως προς δύο)

Δεκαδικός	Δέσμευση **8** μπιτ	Δέσμευση **16** μπιτ
+7	00000111	0000000000000111
−7	11111001	1111111111111001
+124	01111100	0000000001111100
−124	10000100	1111111110000100
+24.760	Υπερχείλιση	0110000010111000
−24.760	Υπερχείλιση	1001111101001000

Πεπερασμένης Ακρίβειας

- Καθώς η ποσότητα της διαθέσιμης μνήμης για την αποθήκευση ενός αριθμού είναι καθορισμένη, οι αριθμοί που μπορούν να χρησιμοποιηθούν μπορούν να αναπαρασταθούν με έναν καθορισμένο αριθμό ψηφίων
- Έστω ότι για την αναπαράσταση θετικών ακεραίων διατίθενται μόνο τρία δεκαδικά ψηφία. Με αυτό τον περιορισμό δεν μπορούμε να εκφράσουμε :
  - Αριθμούς μεγαλύτερους από 999
  - Αρνητικούς αριθμούς
  - Κλάσματα
  - Μιγαδικούς αριθμούς

Δεκαδικοί

- Σταθερής υποδιαστολής
  - Ορίζεται η θέση της υποδιαστολής
  - π.χ. 0.003456 γίνεται 0.0034
- Κινητής υποδιαστολής
  - δεσμεύονται κάποια bit για δυνάμεις του 10
  - π.χ. 0.003456 γίνεται $3456x10^{-6}$
  - οπότε κρατάμε το 6 και το 3456

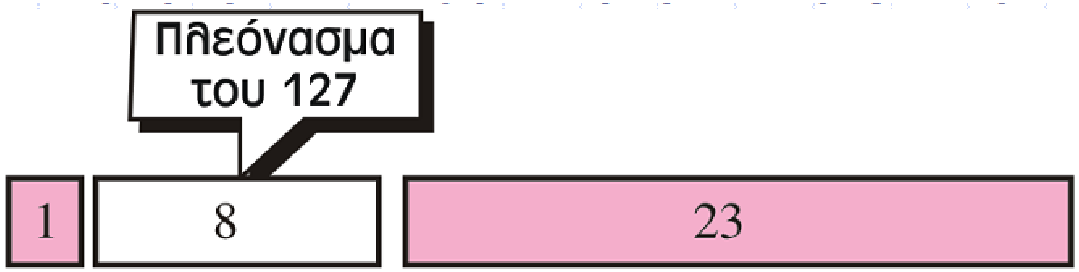
Πραγματικοί

A			M	K	Y
0,4	$0,4 \times 8 = 3,2$		3	0,2	0,**3**
0,2	$0,2 \times 8 = 1,6$		1	0,6	0,3**1**
0,6	$0,6 \times 8 = 4,8$		4	0,8	0,31**4**
0,8	$0,8 \times 8 = 6,4$		6	0,4	0,314**6**
0,4	$0,4 \times 8 = 3,2$		3	0,2	0,3146**3**
0,2					

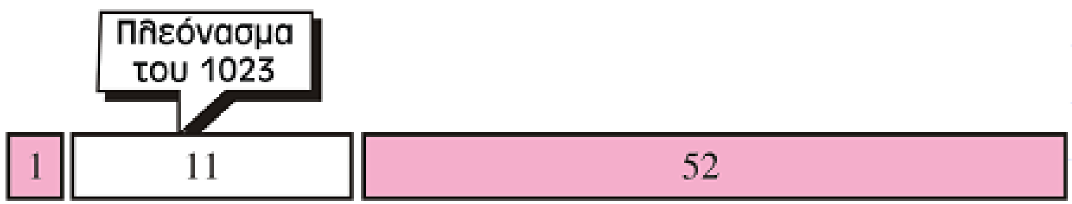
$\mathbf{0,4_{(10)} \cong 0,31463_{(8)}}$

IEEE πρότυπα

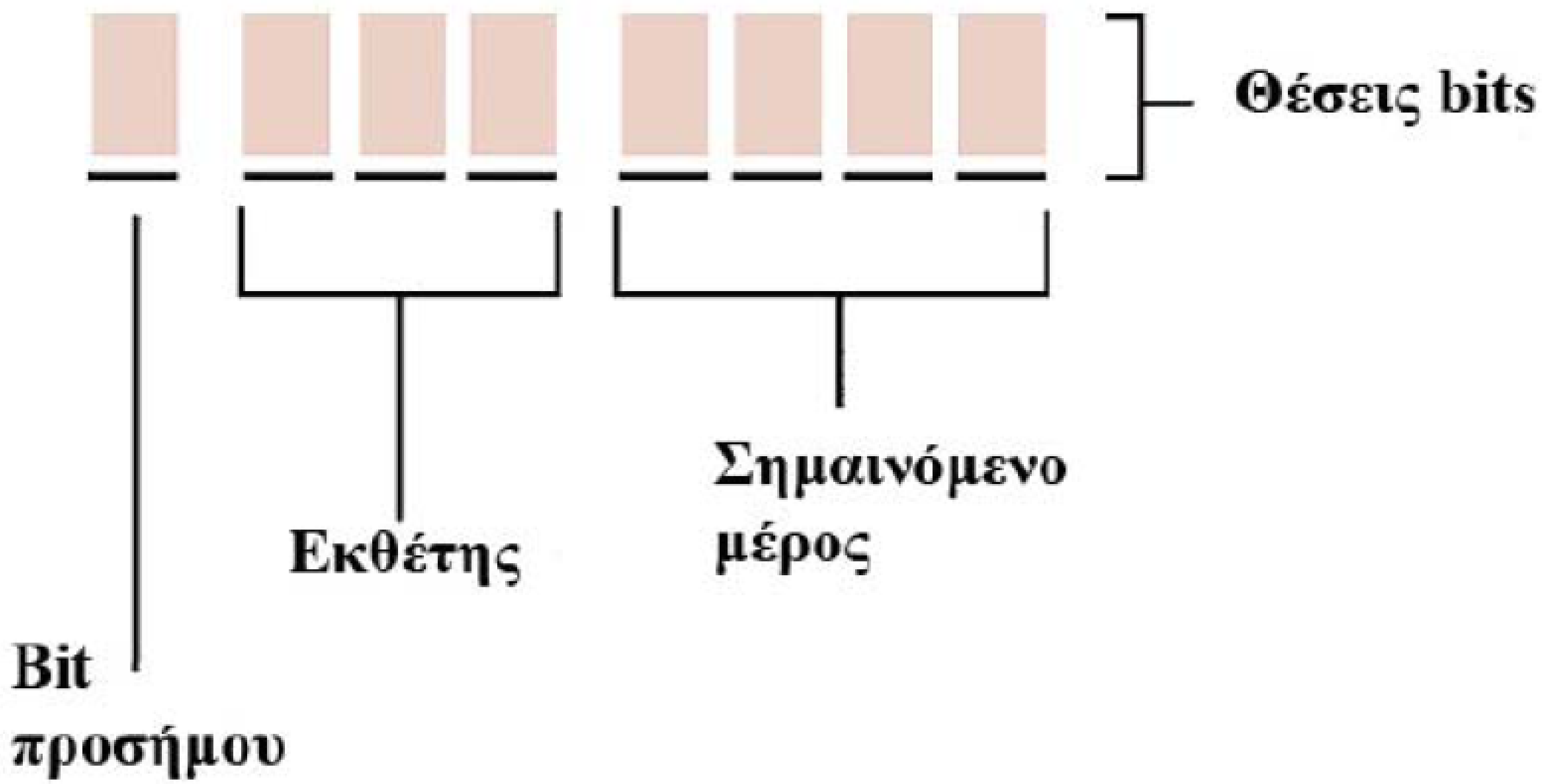
- Απλής ακρίβειας



- Διπλής ακρίβειας



Αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής



Λογική άλγεβρα

Άλγεβρα Boole

- Οι αρχές της λογικής αναπτύχθηκαν από τον George Boole (1815-1884) και τον Augustus De Morgan.
- Εκατό χρόνια αργότερα ο Claude Shannon έδειξε ότι η άλγεβρα Boole ήταν σχετική με την ανάλυση διακοπτικών (switching) κυκλωμάτων.
- Η άλγεβρα Boole αποτελεί τη μαθηματική βάση για την ηλεκτρονική επεξεργασία της δυαδικής πληροφορίας.

Άλγεβρα Boole

- Λογικές πράξεις με σταθερές
- Λογικές πράξεις με μια μεταβλητή
- Λογικές πράξεις με δυο ή περισσότερες μεταβλητές

Λογικές πράξεις με σταθερές

AND	OR	NOT
$0 \bullet 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	
$0 \bullet 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{0} = 1$
$1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \bullet 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

Λογικές πράξεις με μια μεταβλητή

AND	OR	NOT
$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$	
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cdot A = A$	$A + A = A$	
$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	

Ιδιότητες

- Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$A + B = B + A$$
$$A \bullet B = B \bullet A$$

- Απορροφητική ιδιότητα

$$A + (A \bullet B) = A$$
$$A \bullet (A + B) = A$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$$

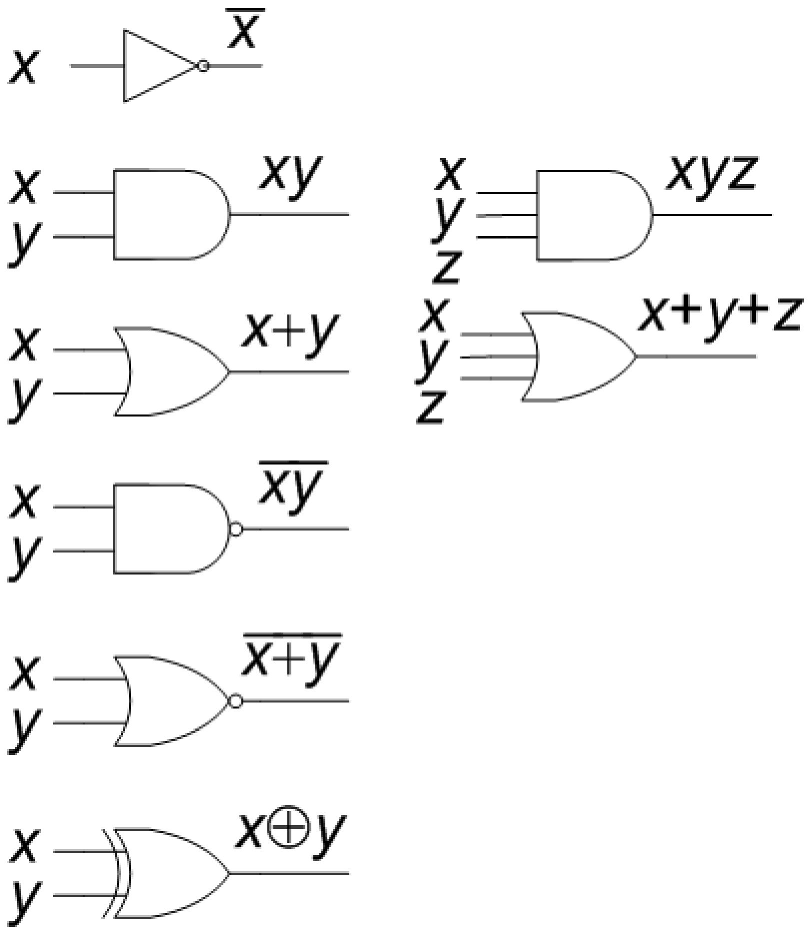
- Επιμεριστική ιδιότητα

$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$$
$$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$$

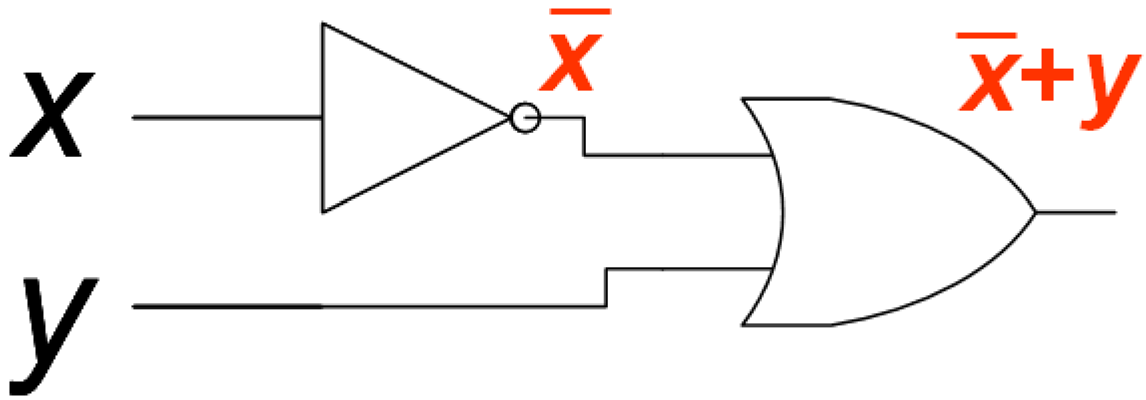
Ψηφιακή σχεδίαση

- Συνδυασμός λογικών πυλών για την πραγματοποίηση της επιθυμητής συνάρτησης
- Περιλαμβάνει
  - Σαφής διατύπωση της επιθυμητής συνάρτησης-συμπεριφοράς
  - Πίνακας αληθείας
  - Έκφραση της συνάρτησης υπό μορφή μεταβλητών άλγεβρας Boole
  - Κατάλληλη επεξεργασία της συνάρτησης για την εξαγωγή μιας απλούστερης μορφής
  - Υλοποίηση του ψηφιακού κυκλώματος με πύλες AND, OR και NOT.
  - Σε πολλές περιπτώσεις η υλοποίηση του κυκλώματος μπορεί να γίνει μόνο με πύλες NAND, η μόνο με πύλες NOR.

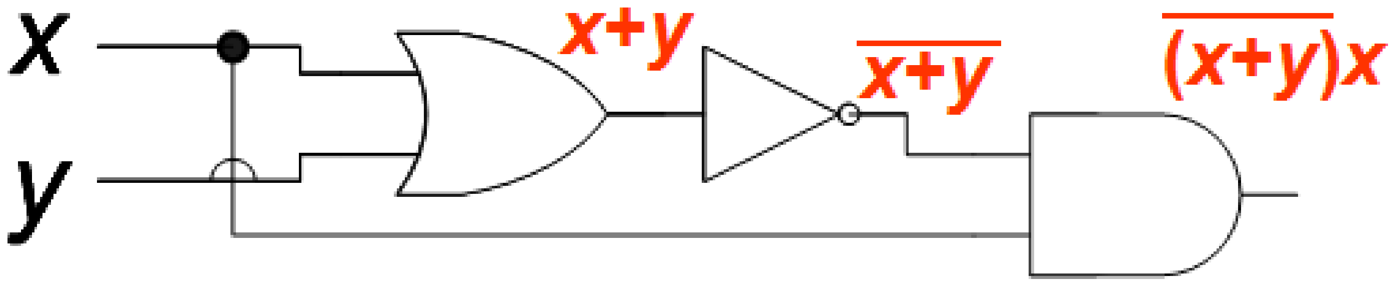
Λογικές πύλες



Παράδειγμα

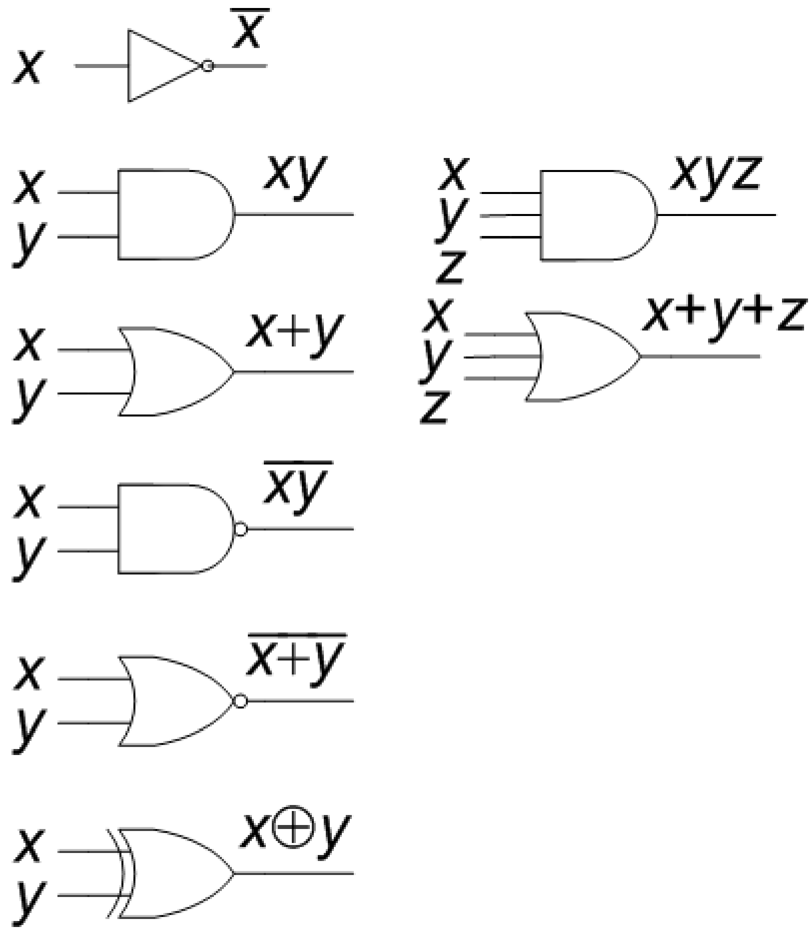


Παράδειγμα

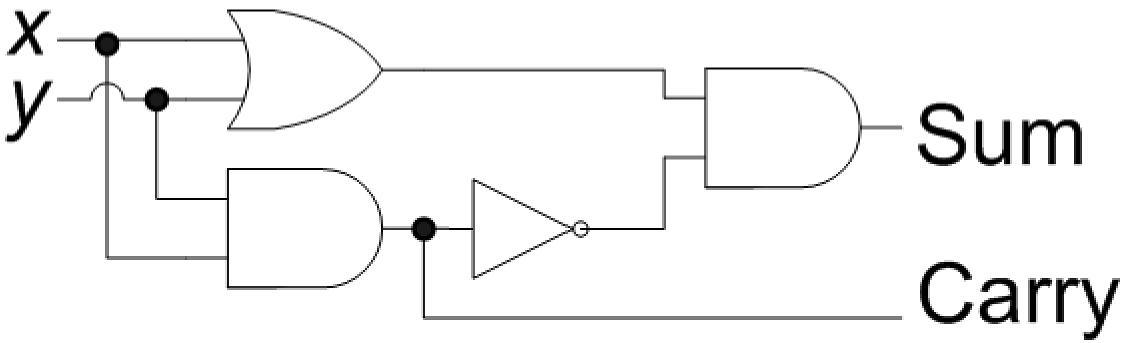


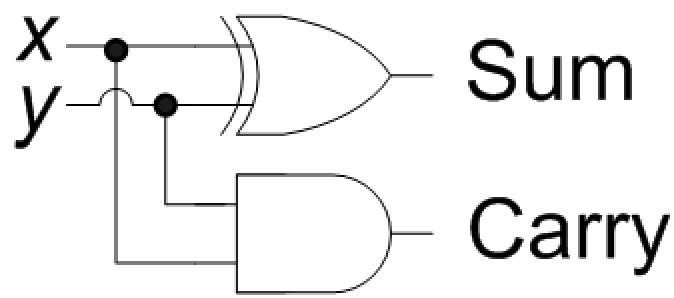
Συσχέτιση με δυαδικό σύστημα

- OR = +
- AND = *
- NOT = αντιστροφή

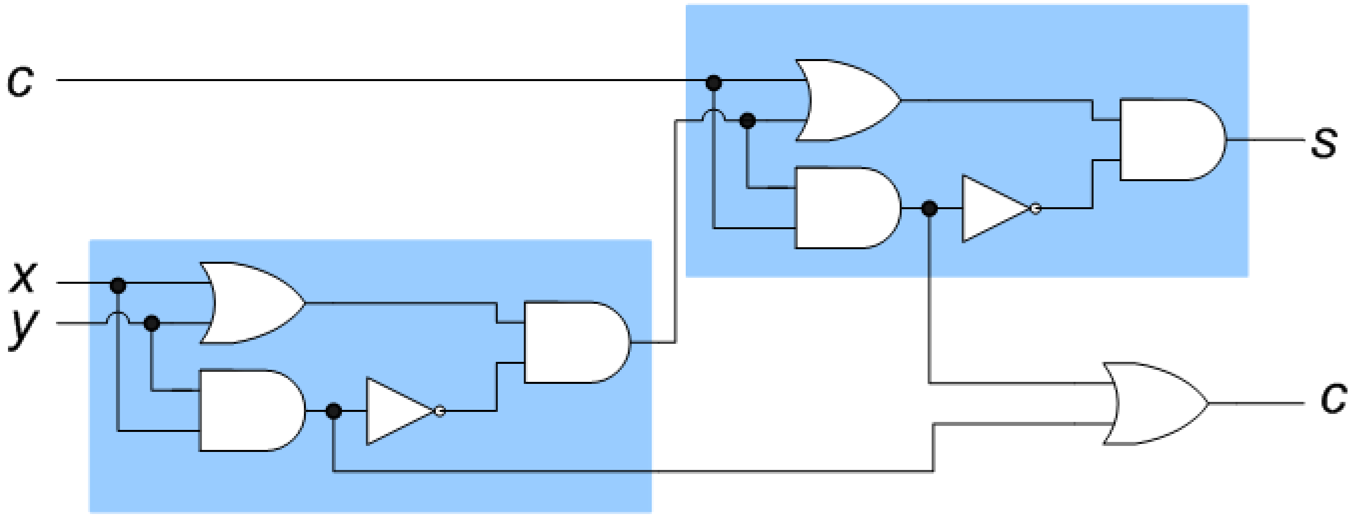


Πρόσθεση με λογικές πύλες





Πλήρης αθροιστής



Περιεχόμενα ενότητας

- Αριθμητικά συστήματα
- Μετατροπή
- Πράξεις δυαδικών αριθμών
- Αρνητικοί και δεκαδικοί
- Άλγεβρα boole
- Ψηφιακή σχεδίαση

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY NC ND