Στατιστικά Κριτήρια (Κιντής 2010, Χάλκος 2011, Δριτσάκη- Δριτσάκη 2013, Χρήστου 2010, Damodar N. Gujarati2013, Wooldridge J. 2003)

Μέσος (Mean): είναι ο μέσος όρος, που υπολογίζεται από το κλάσμα με αριθμητή το άθροισμα των τιμών των παρατηρήσεων και παρονομαστή τον αριθμό των παρατηρήσεων

Συμβολισμός: $\overline{X}$

$$\mu_x = E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + ... + p_N X_N = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i$$

Διάμεσος (Median): είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων όταν οι παρατηρήσεις καταταχθούν από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη.

Μέγιστη Τιμή (Max): η μέγιστη τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων.

Ελάχιστη Τιμή (Min): η ελάχιστη τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων.

Διακύμανση (Variance) σ^2χ: είναι ένα μέτρο της διασποράς των παρατηρήσεων και υπολογίζεται ως :

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i [X_i - E(X)]^2$$

Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation): Υπολογίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (σ_X)

Skewness: Ασυμμετρία κατανομής. Αποτελεί ένα στατιστικό μέτρο που δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τη συμμετρικότητα της κατανομής πιθανοτήτων.

Η ασυμμετρία κατανομής είναι μηδέν εάν οι παρατηρήσεις κατανέμονται συμμετρικά γύρω από το μέσο, είναι αρνητική εάν η αριστερή ουρά είναι μεγαλύτερη από τη δεξιά και θετική εάν η δεξιά ουρά είναι μεγαλύτερη από την αριστερή. Για μη συμμετρικές κατανομές ισχύει ότι εάν ο μέσος είναι μεγαλύτερος από το διάμεσο αποτελεί ένδειξη θετικής ασυμμετρίας και εάν είναι μικρότερος ένδειξη αρνητικής ασυμμετρίας.

Kurtosis: η κύρτωση μετράει το σχετικό σύνολο των παρατηρήσεων που βρίσκονται στις ουρές της κατανομής σε σύγκριση με το σύνολο των παρατηρήσεων που βρίσκονται γύρω από το μέσο. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη για κατανομές με fatter tails.

Jarque-Bera: κατά την εκτίμηση των υποδειγμάτων είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε κατά πόσο οι χρονολογικές σειρές ακολουθούν κανονική κατανομή.

Αυτό μπορεί να εκτιμηθεί με βάση τη στατιστική Jarque-Bera, που ορίζει ότι ο μέσος και ο διάμεσος είναι πολύ κοντά, η κατανομή είναι συμμετρική και η κύρτωση έχει τιμή κοντά στο 3.

Η στατιστική Jarque-Bera ακολουθεί την X^2 κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας. Εάν είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή της X^2 τότε απορρίπτεται η αρχική υπόθεση της κανονικότητας.

Probability-Value: η τιμή p-value περιγράφει το ακριβές επίπεδο σημαντικότητας που συνδέεται με έναν οικονομετρικό έλεγχο και παριστάνει τη χαμηλότερη τιμή που μπορεί να απορριφθεί η αρχική υπόθεση.

Ο έλεγχος γίνεται με τη σύγκριση της τιμής P με το επιλεγμένο επίπεδο σημαντικότητας . Η αρχική υπόθεση απορρίπτεται αν η τιμή P είναι μικρότερη σε σχέση με την τιμή του επιπέδου σημαντικότητας.

Για παράδειγμα αν πρέπει να διαπιστωθεί η στατιστική σημαντικότητα της εισαγωγής μιας μεταβλητής σε ένα υπόδειγμα γραμμικής παλινδρόμησης τότε όσο μικρότερη είναι η p-value τόσο πιο στατιστικά σημαντική είναι η μεταβλητή.

Null Hypothesis: η μηδενική αρχική υπόθεση, η οποία θεωρείται ως αληθής μέχρι με τους κατάλληλους ελέγχους να επιβεβαιωθεί ή να απορριφθεί.

Μια στατιστική υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός σχετικά με την κατανομή μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Η μηδενική υπόθεση συμβολίζεται με H_0 και συγκρίνεται με την εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis) που συμβολίζεται με H_1.

Ο έλεγχος μιας υπόθεσης εξαρτάται από τη στατιστική του ελέγχου (X^2, F, t-statistic) και από την κρίσιμη περιοχή (διάστημα εμπιστοσύνης) που παίρνει τις κρίσιμες τιμές ο αντίστοιχος έλεγχος. Με βάση αυτά τα δύο κριτήρια γίνεται η διάκριση της αρχικής και της εναλλακτικής υπόθεσης.

Συντελεστής συσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης ορίζεται σε όρους της συνδιακύμανσης:

$$\operatorname{corr}(X,Z) = \frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)}} = \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X \sigma_Z} = r_{XZ}$$

$$-1 \leq \operatorname{corr}(X,Z) \leq 1$$

ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τιμές στο διάστημα [-1,1], δηλαδή:

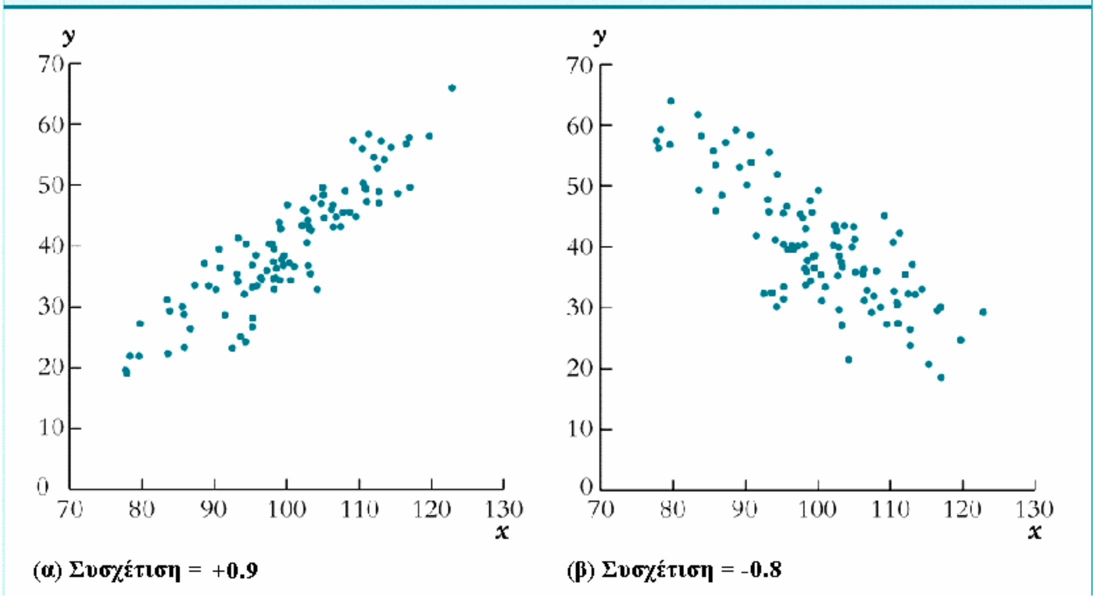
αν corr(X,Z) = 1, τότε υπάρχει τέλεια <u>θετική γραμμική</u> συσχέτιση μεταξύ του X και του Z

αν corr(X,Z) = -1, τότε υπάρχει τέλεια <u>αρνητική γραμμική</u> συσχέτιση μεταξύ του X και του Z.

αν corr(X,Z) = 0,τότε <u>δεν υπάρχει γραμμική</u> σχέση μεταξύ X και Z.

αποτελεί κριτήριο γραμμικής εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών

Διάγραμμα 3.3 Διάγραμμα διασποράς για υποθετικά σύνολα δεδομένων



Conditional Variance: η υπό συνθήκη διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής X, δεδομένης της διακύμανσης μίας ή περισσότερων άλλων τυχαίων μεταβλητών.

Όταν είναι γνωστή η σχέση της διακύμανσης μεταξύ δύο μεταβλητών, τότε μπορεί να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της μίας μεταβλητής δεδομένου του αποτελέσματος της άλλης.

Υποδείγματα, όπως της κατηγορίας GARCH στηρίζονται στην υπό συνθήκη διακύμανση των τυχαίων μεταβλητών.

Το διάστημα εμπιστοσύνης (Confidence Interval) μπορεί να οριστεί ως το διάστημα στο οποίο περιλαμβάνονται οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων των εκτιμώμενων μεταβλητών και ειδικότερα το μέσο (mean) της μεταβλητής.

Κατά την εκτίμηση μιας γραμμικής παλινδρόμησης γίνονται ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τις εκτιμήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών. Οι υποθέσεις αυτές σχετίζονται με τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Η ακρίβεια της εκτίμησης διαπιστώνεται με βάση το διάστημα εμπιστοσύνης. Εάν για παράδειγμα πρέπει να εκτιμηθεί η στατιστική σημαντικότητα για 95% διάστημα εμπιστοσύνης (ή 5% επίπεδο σημαντικότητας) χρησιμοποιείται η στατιστική t (t-statistic). Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ_x, είναι ένα διάστημα που περιέχει την πραγματική τιμή του μ_x στο 95% των επαναλαμβανόμενων δειγμάτων.

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να κατασκευαστεί σαν ένα σύνολο από τιμές για το μ_x, τις οποίες δεν απορρίπτει ο έλεγχος υποθέσεων με 5% επίπεδο σημαντικότητας.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Το κεντρικό οριακό θεώρημα ορίζει ότι όσο το δείγμα N ενός πληθυσμού γίνεται μεγαλύτερο, τότε η κατανομή του πληθυσμού προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Έτσι, αν μία τυχαία μεταβλητή X έχει μέσο μ και διακύμανση σ^2, τότε η δειγματική κατανομή της γίνεται σχεδόν κανονική με μέσο μ και διακύμανση σ^2/N όσο το N αυξάνεται.

Το κεντρικό οριακό θεώρημα είναι πολύ σημαντικό, διότι σε μεγάλα δείγματα απλοποιεί τους στατιστικούς και οικονομετρικούς ελέγχους, ικανοποιώντας την υπόθεση της κανονικότητας.

Κατανομές (Distributions)

Κανονική Κατανομή (Normal Distribution). Η κανονική κατανομή είναι η πιο διαδεδομένη κατανομή που χρησιμοποιείται στη στατιστική επιστήμη. Αυτό οφείλεται κυρίως στις επιθυμητές ιδιότητες της κανονικής κατανομής και στο κεντρικό οριακό θεώρημα.

Μια κανονικά κατανεμημένη χρονοσειρά είναι μια συνεχής στοχαστική μεταβλητή, που μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή και συμβολίζεται ως $\chi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η κατανομή έχει το σχήμα «καμπάνας» με μέσο μ και διακύμανση σ^2.

Η κανονικότητα (Normality) ορίζει ότι τα κατάλοιπα u είναι ανεξάρτητα από τις επεξηγηματικές μεταβλητές X_1, X_2, …,X_n και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση σ2, $u \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$.

Ακόμα, για τη διαπίστωση της κανονικότητας με βάση τον έλεγχο Jarque-Bera πρέπει η ασυμμετρία κατανομής (skewness) να είναι μηδέν και η κύρτωση (kurtosis) να μην υπερβαίνει την τιμή 3. Οι κατανομές με τιμές κύρτωσης μεγαλύτερες του 3 ονομάζονται fat-tailed.

Κατανομή X^2. Η κατανομή αυτή είναι χρήσιμη για τον έλεγχο υποθέσεων των διακυμάνσεων στοχαστικών μεταβλητών.

Επίσης χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ετεροσκεδαστικότητας των υποδειγμάτων γραμμικής παλινδρόμησης και για τον έλεγχο της γραμμικής συσχέτισης (serial correlation) μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Η κατανομή X^2 δηλώνει ότι αν s^2 είναι η διακύμανση ενός δείγματος N, που προέρχεται από μια κανονική κατανομή με διακύμανση $σ^2$ τότε η σχέση $(N-1) s^2/σ^2$ ακολουθεί την κατανομή X^2 με N-1 βαθμούς ελευθερίας.

Όσο περισσότεροι είναι οι βαθμοί ελευθερίας, τόσο η X^2 κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Για παράδειγμα για N=20 και διάστημα εμπιστοσύνης 95%, η X^2 κατανομή ισούται με 34,170.

Κατανομή t (t distribution ή Student distribution). Η κατανομή t χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις όπου η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής δεν είναι γνωστή.

Η κατανομή t ορίζει ότι σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές X και Y, όπου η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση 1 και η Y κατανέμεται με βάση την κατανομή X^2 με N βαθμούς ελευθερίας.

Με βάση τη στατιστική t μπορεί να διαπιστωθεί αν ο μέσος της εκτίμησης μx βρίσκεται εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης 95% και γίνεται αποδεκτός ή εκτός και απορρίπτεται.

Η κρίσιμη τιμή της t-statistic για δείγμα μεγαλύτερο των 120 παρατηρήσεων προσεγγίζει την τιμή 1,96. Αντίστοιχα για διάστημα εμπιστοσύνης 99% και 90% η t-statistic προσεγγίζει τις τιμές 2,576 και 1,645.

Κατανομή F. Η κατανομή F χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις ελέγχου από κοινού δύο ή περισσότερων παραμέτρων της γραμμικής παλινδρόμησης.

Σε δύο μεταβλητές X και Y που είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή X^2 με N_1 και N_2 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα.

Η κατανομή F χρησιμοποιείται για τον έλεγχο περί ύπαρξης στοχαστικής ή αιτιοκρατικής τάσης, για τον έλεγχο της εισαγωγής σταθεράς στους ελέγχους μοναδιαίας ρίζας, για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι η σταθερά και οι παράμετροι των εκτιμήσεων είναι μηδέν κτλ.

Οι τιμές της στατιστικής F που προκύπτουν από τις εκτιμήσεις των υποδειγμάτων συγκρίνονται με τις τιμές του αντίστοιχου πίνακα της στατιστικής F. Έστω ότι σε μια γραμμική παλινδρόμηση ο ερευνητής θέλει να καθορίσει αν οι εκτιμητές b είναι μηδέν ή όχι. Για παράδειγμα αν για N_1= 10 και N_2=5 και 5% διάστημα εμπιστοσύνης τότε η κρίσιμη τιμή F είναι 4,74.

Όταν η κρίσιμη τιμή της F είναι μικρότερη από την υπολογισθείσα τιμή F, τότε η αρχική υπόθεση περί της ισότητας των παραμέτρων με το μηδέν απορρίπτεται.

Προσδοκώμενες Τιμές

Τιμές X	**Συνάρτηση πιθανότητας f(x)**
X_1	$f(x_1)$
X_2	$f(x_2)$
X_3	$f(x_3)$
.	.
.	.
.	.
X_n	$f(x_n)$

Προσδοκώμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα της x:

$\mathrm{E}(x)=\sum_{i}^{n} x_i f(x_i)$ χ ασυνεχής

Ε (x) = μ

$\mathrm{E}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ χ συνεχής $\mathrm{E}(|x|)<+\infty$

συγκλίνει απόλυτα

$Var(x) = \mathrm{E}\left[x - \mathrm{E}(x)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mathrm{E}(x)\right)^2 f(x_i) = \sigma^2 x$ ασυνεχής

Συνδιακύμανση: $Cov(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{E}[[\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})][\mathrm{Y} - \mathrm{E}(\mathrm{Y})]]$

<u>Στοχαστικά Ανεξάρτητες Μεταβλητές</u>

έστω X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές και f (X,Y) ή από κοινού (joint) κατανομή συχνότητας.

Τότε οι X και Y είναι στοχαστικά Ανεξάρτητες Μεταβλητές αν:

f(x,Y) = f (x) f (Y)

f(x/Y) = f (x) και f (Y/x) = f (Y)

επίσης, στοχαστικά ανεξάρτητες ως προς τους μέσους αν:

E(X/Y) = E(X) και E(Y/X) = E(Y)

Εάν X και Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε E(XY) = E (X) E(Y)

$$\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \sum_i \sum_j \mathrm{X}_i \mathrm{Y}_j f(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j) = \sum_i \mathrm{X}_i f(\mathrm{X}_i) \sum_j \mathrm{Y}_j f(\mathrm{Y}_j) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

Αν X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε η συνδιακύμανση τους είναι μηδέν, Cov (x, Y) = 0 (**δεν ισχύει το αντίθετο**).

$$
\begin{aligned}
&Cov(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}[\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})][\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})] = \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{XY}-\mathrm{YE}(\mathrm{X})-\mathrm{XE}(\mathrm{Y})+\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})] = \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{XY})-\mathrm{E}(\mathrm{Y})\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})+\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{XY})-\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})
\end{aligned}
$$

αλλά επειδή X,Y ανεξάρτητες και E (XY)=E(X) E(Y)

= $\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})=0$

Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών είναι παράμετρος «συγκατανομής» που εκφράζει το βαθμό και το είδος της εξάρτησης μεταξύ τους. Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών που είναι εκφρασμένες στη τυπική μορφή, είναι μέτρο της μεταξύ τους εξάρτησης και είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης. (Κιντής 2010).

- $\mathrm{E}(\alpha)=\sum_i \alpha f(a)=\alpha\sum_i f\alpha=\alpha$ (επειδή $\sum_i f(\alpha)=1$)
- $\mathrm{E}(\alpha x)=\alpha\mathrm{E}(x)$ διότι $\mathrm{E}(\alpha x)=\sum_i \alpha x_i f(x_i)=\alpha\sum x_i f(x_i)=\alpha\mathrm{E}(x)$

- $\mathrm{E}(\alpha x+\beta)=\alpha\mathrm{E}(x)+\beta$

διότι

$$\mathrm{E}(\alpha x+\beta)=\sum(\alpha x_i+\beta)f(x_i)=\sum\alpha x_i f(x_i)+\sum\beta f(x_i)=\alpha\sum x_i f(x)+\beta\sum f(x_1)=\alpha\mathrm{E}(x)+\beta$$

- $\mathrm{E}(x+\mathrm{Y})=\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(Y)$
  (χ και Y τυχαίες)

- $Var(\alpha x+\beta)=\alpha^2\,\mathrm{var}(x)$
- $Var(x+\mathrm{Y})=Var(x)+Var(\mathrm{Y})+2Cov(x,\mathrm{Y})$
- $Var(x-\mathrm{Y})=Var(x)+Var(\mathrm{Y})-2Cov(x,\mathrm{Y})$, (Koutsoyianis,1975).

ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum \mathrm{X}_1 \Psi_i}{\sum \mathrm{X}_1^2}, \beta' = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{\mathrm{X}}}$$

<u>Δειγματοληπτικό σφάλμα</u> $\left(\hat{\beta} - \beta\right)$ (Sampling error)

Αφορά την απόκλιση της εκτίμησης από την αληθινή τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού. $\left(\widehat{\beta} - \beta\right)$

<u>Μεροληπτικό σφάλμα</u> $E\left(\hat{\beta}\right) - \beta$ (Bias error)

Αφορά την απόκλιση μεταξύ της μέσης τιμής του $\widehat{\beta}$ και της αληθινής τιμής του β στον πληθυσμό.

<u>Μέσο σφάλμα τετραγώνου</u> MSE $\widehat{\beta}$ = E$\left(\widehat{\beta} - \beta\right)^2$ (Mean square error)

Αφορά τη διασπορά της κατανομής των εκτιμούμενων τιμών γύρω από την αληθινή τιμή της παραμέτρου MSE.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ (Κιντής 1982, Koutsoyiannis 1975, Madalla 1983)

α) Όταν οι παρατηρήσεις προέρχονται από μικρό δείγμα

Αμεροληψία

Ένας εκτιμητής είναι αμερόληπτος όταν η προσδοκώμενη τιμή του ισούται με την αληθινή:

$\mathrm{E}\left(\widehat{\beta}\right)-\beta=0$, όπου $\mathrm{E}\left(\widehat{\beta}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\beta}f\left(\widehat{\beta}\right)d\widehat{\beta}$ ή $\mathrm{E}\left(\widehat{\beta}\right)=\sum_{i}\widehat{\beta}f\left(\widehat{\beta}\right)$, αν η Ψ είναι συνεχής ή ασυνεχής μεταβλητή αντίστοιχα. Προϋπόθεση είναι να μπορούμε να πάρουμε πολλά δείγματα από τον πληθυσμό για να υπολογίσουμε διάφορες εκτιμήσεις για την παράμετρο. Ο μέσος των εκτιμήσεων αυτών θα προσεγγίζει την πραγματική τιμή της παραμέτρου στον πληθυσμό όταν ο αριθμός των δειγμάτων αυξάνεται.

κριτήριο επιλογής ανάμεσα σε δύο ή περισσότερους αμερόληπτους εκτιμητές π.χ. :

$\mathrm{E}(\widehat{\beta})-\beta=0 \qquad \mathrm{E}(\beta')-\beta=0$

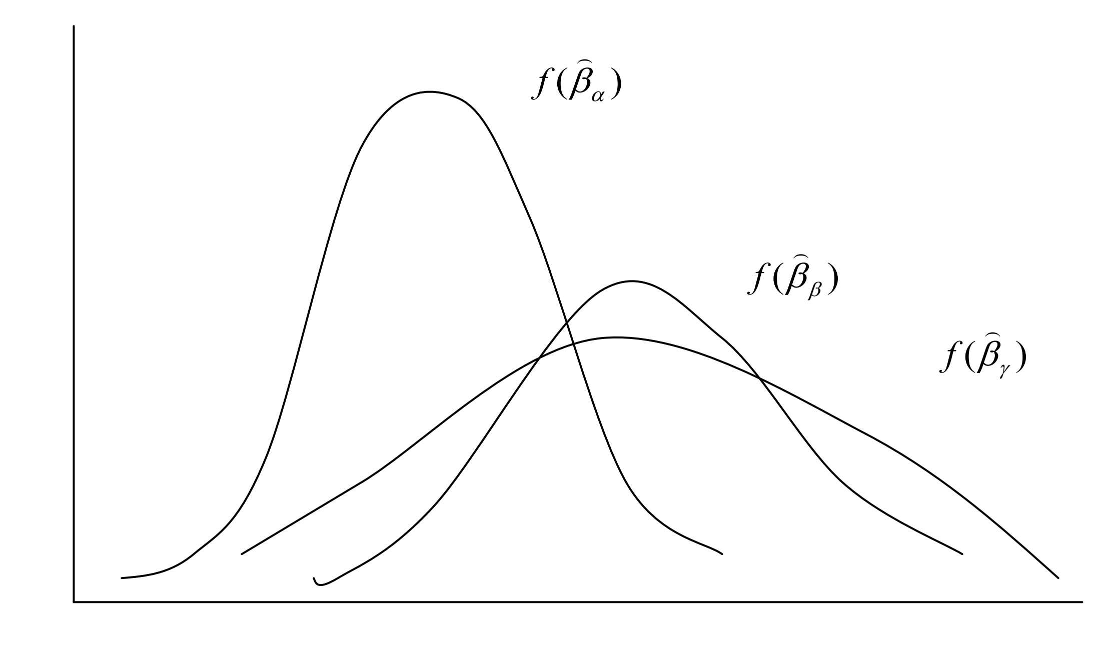
είναι η ικανοποίηση μιας άλλης ιδιότητας, της αποτελεσματικότητας.

Αποτελεσματικότητα

Ένας εκτιμητής είναι αποτελεσματικός αν είναι αμερόληπτος και έχει τη μικρότερη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών.

$$E(\ \widehat{\beta}_{\alpha})-\beta=0$$
$$\kappa\alpha\iota$$
$$\mathrm{E}\left[\ \widehat{\beta}_{\alpha}-\mathrm{E}(\ \widehat{\beta}_{\alpha})\right]^{2}\leq\mathrm{E}\left[\ \widehat{\beta}_{\beta}-\mathrm{E}(\ \widehat{\beta}_{\beta})\right]^{2}$$

ισχύει για μεγάλα και μικρά δείγματα



Άριστος Γραμμικός Αμερόληπτος Εκτιμητής

Ο $\hat{\beta}_\alpha$ ορίζεται άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής όταν:

$\hat{\beta} = \alpha_\iota \psi_\iota + \alpha_2 \psi_2 + \ldots \alpha_n \psi_n$: προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός παρατηρήσεων του δείγματος

$\mathrm{E}(\hat{\beta}) - \beta = 0$ αμερόληπτος και

$\mathrm{E}\left[\hat{\beta}_\alpha - \mathrm{E}(\hat{\beta}_a)\right]^2 \leq \left[\mathrm{E}(\hat{\beta}_\beta - \mathrm{E}(\hat{\beta}_\beta)\right]^2$ έχει την μικρότερη διακύμανση

Επάρκεια

Ο $\hat{\beta}$ θεωρείται επαρκής εκτιμητής, όταν όλες οι πληροφορίες που περιέχει το δείγμα για το β μπορούν να ενσωματώνονται στον εκτιμητή $\hat{\beta}$ δηλαδή οι τιμές του δείγματος δεν περιέχουν επιπλέον πληροφορίες για την παράμετρο β.

Ελάχιστο Μέσο Σφάλμα Τετραγώνου

Όταν υπάρχει πρόβλημα επιλογής μεταξύ δύο μεροληπτικών εκτιμητών, σαν κριτήριο χρησιμοποιούμε το MSE.

$$MSE = \mathrm{E}\left(\widehat{\beta} - \beta\right)^2 = \mathrm{E}\left[\widehat{\beta} - \mathrm{E}(\widehat{\beta} \quad \right]^2 + \mathrm{E}\left[\ \mathrm{E}(\widehat{\beta}) - \beta\right]^2$$

β) Όταν οι παρατηρήσεις προέρχονται από μεγάλο δείγμα

Ασυμπτωτική Αμεροληψία

Ένας εκτιμητής ορίζεται ως ασυμπτωτικά αμερόληπτος αν η μέση τιμή του τείνει προς την πραγματική τιμή της παραμέτρου, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται.

$$\begin{array}{l} \lim \mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta \\ n \to \infty \end{array}$$

Συνέπεια

Ένας εκτιμητής θεωρείται συνεπής αν η τιμή του $\widehat{\beta}$ τείνει προς την αληθινή τιμή της παραμέτρου (στο πληθυσμό) με πιθανότητα που προσεγγίζει τη μονάδα όταν το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται συνεχώς:

$$p\lim\left(\left|\widehat{\beta}-\beta\right|\right)=1$$
$$n\to\infty$$
$$\acute{\eta}\; p\lim\widehat{\beta}=\beta$$
$$n\to\infty$$

Ασυμπτωτική Αποτελεσματικότητα

Ένας εκτιμητής που ακολουθεί ασυμπτωτική κατανομή είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός αν είναι συνεπής εκτιμητής και δεν υπάρχει άλλος συνεπής εκτιμητής με μικρότερη διακύμανση από αυτόν.

Βιβλιογραφία

«**Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονολογικών Σειρών**», Σοφία Δημέλη, Αθήνα 1996

«**Εισαγωγή στην Οικονομετρία**», τομ. Α-Β, Γ., Κ. Χρήστου, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2007 .

«**Ένδεκα Μαθήματα Οικονομετρίας**», Ι.Α. Κασκαρέλης, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2000

«**Οικονομετρία**», Α. Κιντής, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 1982

«**Εφαρμογές Οικονομετρίας**», Α. Κιντής, Εκδόσεις Σμπίλια, Αθήνα, 1980

«**Econometrics**», G. S. Maddala, MC GROW HILL, 1983

«**Theory of Econometrics**», A.A Koutsoyannis, MACMILLAN, 1977

«**Econometric Models And Economic Forecasts**», R.S. Pinduck AND D.L. Rubinfeld, MC GROW HILL, 2000

«**Econometric Theory**», J. Davinson, BLACKWELL, 2000

«**Basic Econometrics**, D. N. Guajarati, MC GROW HILL, 1995

«**Βασική Οικονομετρία: Θεωρία και Πράξη**», Ανδρικόπουλος Α., Τομ. Α' και Β', Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα, 2003

«**Εισαγωγή στην Οικονομετρία**», Wooldridge, J., Τομ. Α' και Β', Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 2003

«**Οικονομετρικές Μέθοδοι**», J. Johnston and J. Dinardo, Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2004

«**Σύγχρονη Οικονομετρική Ανάλυση**», Α. Κιντής, Gutenberg, 2010

«**Οικονομετρία**», Γεώργιος Χάλκος, Εκδόσεις GUTENBERG, 2011

«**Εισαγωγή στην Οικονομετρία**», Χ. Δριτσάκη, Μ. Δριτσάκη, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2013

«Using Cointegration Analysis in Econometric Modeling», Harris R., Prentice Hall, Harvester Wheat Sheaf, 1995

«Econometric Modelling of World Shipping» , M . Beenstock and A. Vergottis,Chapman and Hall,1993.

«**Οικονομετρία – Αρχές και Εφαρμογές**», Damodar N. Gujarati, Dawn C. Porter, Εκδόσεις Τζίολα, 2013.

«**Time Series Analysis**», James D. Hamilton, Princeton University Press, 1994.

«**Econometrics**», Fumio Hayashi, Princeton University Press, 2000.