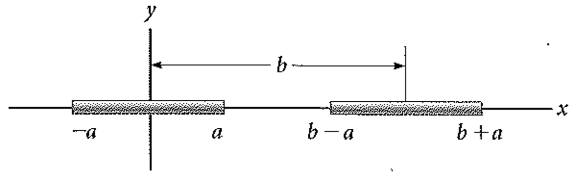
$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_e qQ}{ma^3}\right)^{1/2}$$

Δύσκολα προβλήματα

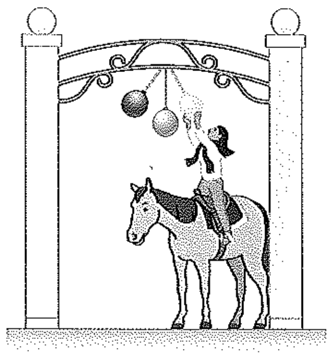
75. Δύο πανομοιότυπες λεπτές ράβδοι μήκους $2a$ φέρουν ίσα φορτία $+Q$ κατανεμημένα ομοιόμορφα κατά μήκος τους. Οι ράβδοι βρίσκονται στον άξονα x και τα κέντρα τους απέχουν μεταξύ τους $b > 2a$ (Εικ. Π Η1.75). Δείξτε ότι το μέτρο της δύναμης που ασκεί η αριστερή ράβδος στη δεξιά είναι

$$F = \left(\frac{k_e Q^2}{4a^2}\right)\ln\left(\frac{b^2}{b^2 - 4a^2}\right)$$



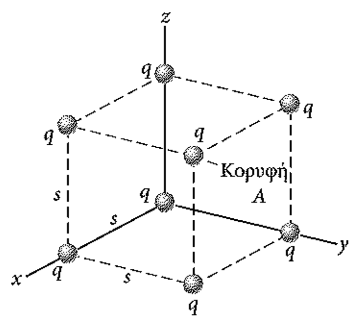
Εικόνα Π Η1.75

76. Η Ινέζ κρεμάει διακοσμητικά για το πάρτι γενεθλίων της αδερφής της. Δένει μαζί τρεις ελαφριές μεταξωτές κορδέλες στο επάνω μέρος μιας εισόδου και σε κάθε κορδέλα κρεμάει ένα μπαλόνι από καουτσούκ (Εικ. Π Η1.76). Για να λάβουμε υπόψη τις επιδράσεις της βαρυτικής δύναμης και της δύναμης της άνωσης, μοντελοποιούμε κάθε μπαλόνι ως σωματίδιο μάζας 2.00 g, του οποίου το κέντρο απέχει 50.0 cm από το σημείο στήριξης. Η Ινέζ τρίβει ολόκληρη την επιφάνεια κάθε μπαλονιού με το μάλλινο κασκόλ της, κάνοντας έτσι τα μπαλόνια να κρέμονται σε απόσταση μεταξύ τους. Καθώς κοιτά προς τα επάνω το κάτω μέρος των μπαλονιών, η Ινέζ παρατηρεί ότι τα κέντρα των αναρτημένων μπαλονιών σχηματίζουν ένα οριζόντιο ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους 30.0 cm. Τι φορτίο είναι πιθανό να έχει κάθε μπαλόνι;



Εικόνα Π Η1.76

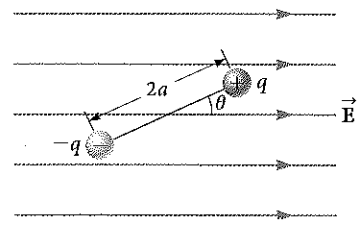
77. Οκτώ φορτισμένα σωματίδια, καθένα με φορτίο q, βρίσκονται στις κορυφές ενός κύβου ακμής s (Εικόνα Π Η1.77). (α) Προσδιορίστε τις συνιστώσες x, y, και z της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το φορτίο στην κορυφή A από τα άλλα φορτία. Ποιο είναι (β) το μέτρο και (γ) η κατεύθυνση αυτής της συνισταμένης δύναμης;



Εικόνα Π Η1.77
Προβλήματα 77 και 78.

78. Θεωρήστε την κατανομή φορτίου της Εικόνας Π Η1.77. (α) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο κάθε πλευράς του κύβου έχει τιμή $2.18k_e q/s^2$. (β) Ποια είναι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της άνω πλευράς του κύβου;

79. **Ανασκόπηση.** Ένα ηλεκτρικό δίπολο που βρίσκεται μέσα σε ομογενές οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο μετατοπίζεται ελαφρά από τη θέση ισορροπίας του (Εικόνα Π Η1.79), κατά μια μικρή γωνία θ. Η απόσταση μεταξύ των φορτίων είναι $2a$, ενώ καθένα από τα σωματίδια έχει μάζα m. (α) Υποθέτοντας ότι το δίπολο απελευθερώνεται από αυτή τη θέση, δείξτε ότι ο γωνιακός προσανατολισμός του αλλάζει με απλή αρμονική κίνηση συχνότητας



Εικόνα Π Η1.79

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qE}{2ma}}$$

Κι αν...; (β) Θεωρήστε ότι οι μάζες των δύο φορτισμένων σωματιδίων στο δίπολο δεν είναι ίδιες, αλλά καθένα τους εξακολουθεί να έχει το ίδιο φορτίο q. Έστω ότι οι μάζες των σωματιδίων είναι m_1 και m_2. Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qE(m_1 + m_2)}{2am_1m_2}}$$

80. Δύο σωματίδια, καθένα με φορτίο 52.0 nC, βρίσκονται στον άξονα y στα σημεία y = 25.0 cm και y = −25.0 cm. (α) Βρείτε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα τυχαίο σημείο του άξονα x συναρτήσει της μεταβλητής x. (β) Βρείτε το πεδίο στο x = 36.0 cm. (γ) Σε ποιο σημείο είναι το πεδίο ίσο με $1.00\hat{\mathbf{i}}$ kN/C; Για να λύσετε αυτή την εξίσωση, ίσως χρειαστείτε υπολογιστή. (γ) Σε ποιο σημείο είναι το πεδίο ίσο με $16.00\hat{\mathbf{i}}$ kN/C;

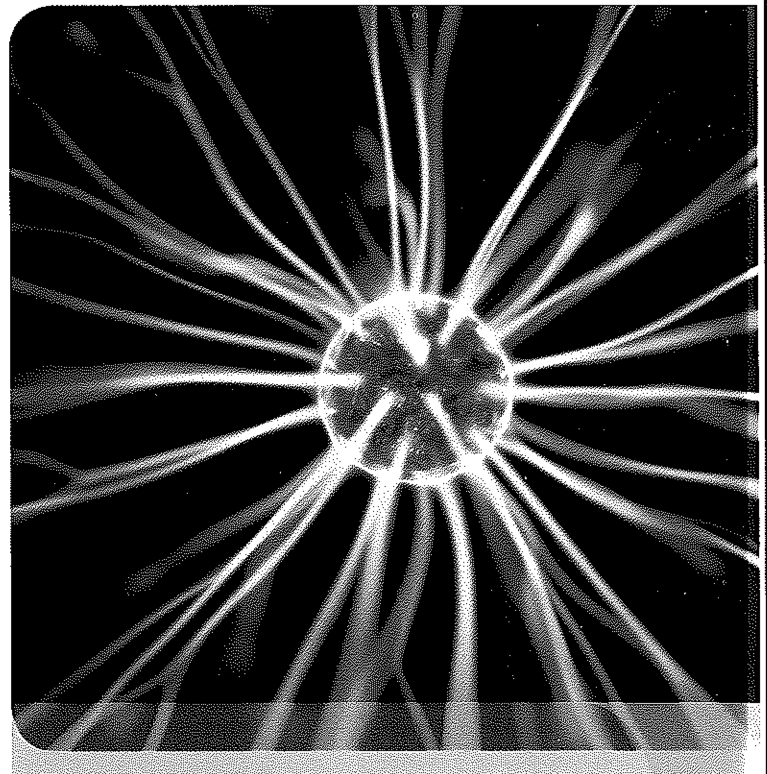
81. Φορτίο είναι κατανεμημένο κατά μήκος της ευθείας y = −15.0 cm, μεταξύ των σημείων με συντεταγμένες x = 0 και x = 40.0 cm, με ομοιόμορφη πυκνότητα 35.0 nC/m. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στην αρχή των αξόνων.

82. Ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται με υψηλή ταχύτητα στον άξονα x. Ξεκινά από το $x = -\infty$, και καταλήγει στο $x = +\infty$. Ένα δεύτερο στατικό φορτίο Q βρίσκεται στο σημείο $x = 0$, $y = -d$. Καθώς το κινούμενο φορτίο περνά δίπλα από το στατικό φορτίο, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του δεν αλλάζει αισθητά, αλλά αποκτά μια μικρή συνιστώσα ταχύτητας στη διεύθυνση y. Προσδιορίστε τη γωνία εκτροπής του κινούμενου φορτίου από την κατεύθυνση της αρχικής του ταχύτητας.

κεφάλαιο **Η2**

Ο νόμος του Gauss

Στο Κεφάλαιο Η1 δείξαμε τον τρόπο υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί μια δεδομένη κατανομή φορτίου, δηλαδή με μαθηματική ολοκλήρωση στην κατανομή. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα περιγράψουμε τον *νόμο του Gauss*, καθώς και μια εναλλακτική διαδικασία για τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων. Ο νόμος του Gauss βασίζεται στο γεγονός ότι η ηλεκτρική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ σημειακών φορτίων ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου. Αν και ο νόμος του Gauss απορρέει άμεσα από τον νόμο του Coulomb, μας εξυπηρετεί πολύ περισσότερο στον υπολογισμό των ηλεκτρικών πεδίων κατανομών φορτίων με υψηλό βαθμό συμμετρίας και καθιστά εφικτή την αντιμετώπιση προβλημάτων με ποιοτικούς συλλογισμούς. Όπως θα δείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο, ο νόμος του Gauss είναι σημαντικός στην κατανόηση και την επαλήθευση των ιδιοτήτων των αγωγών που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

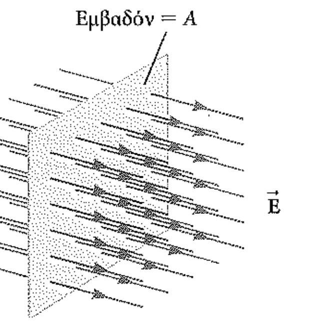


Σε μια επιτραπέζια σφαίρα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που εκπέμπει η σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρών ηλεκτρικών πεδίων. Σε αυτό το κεφάλαιο, με τον νόμο του Gauss θα δείξουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι πανομοιότυπο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου. (*Steve Cole/Getty Images*)

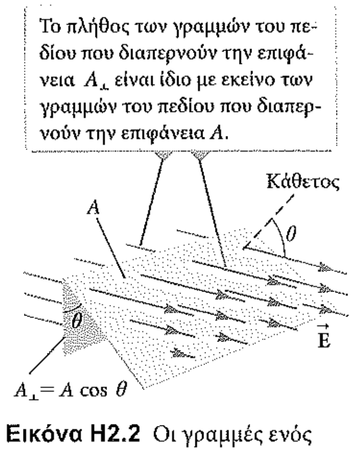
Η2.1 Ηλεκτρική ροή

Στο Κεφάλαιο Η1 περιγράψαμε ποιοτικά την έννοια των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου. Τώρα θα μελετήσουμε τις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ποσοτικά.

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο είναι ομογενές κατά μέτρο και κατά κατεύθυνση (Εικόνα Η2.1). Οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν μια ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού A, της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στο πεδίο. Θυμηθείτε από την Ενότητα Η1.6 ότι το πλήθος των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας (με άλλα λόγια, η *πυκνότητα των γραμμών*) είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια είναι ανάλογο του γινομένου EA. Αυτό το γινόμενο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου E και του εμβαδού της επιφάνειας A που είναι κάθετη στο πεδίο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** και συμβολίζεται με Φ_E:



Εικόνα Η2.1 Οι γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν ένα επίπεδο εμβαδού A κάθετο στο πεδίο.



Εικόνα Η2.2 Οι γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν μια επιφάνεια A, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το πεδίο.

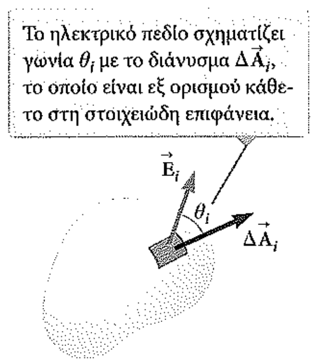
$$\Phi_E = EA \qquad \textbf{(H2.1)}$$

Από τις μονάδες των μεγεθών E και A στο σύστημα SI, διαπιστώνουμε ότι η Φ_E μετριέται σε $\mathrm{N \cdot m^2/C}$. Η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν κάποια επιφάνεια.

Αν η υπό εξέταση επιφάνεια δεν είναι κάθετη στο πεδίο, τότε η ροή που τη διαπερνά θα είναι μικρότερη από αυτή που δίνει η Εξίσωση Η2.1. Ας δούμε την Εικόνα Η2.2, όπου η κάθετος στην επιφάνεια A σχηματίζει γωνία θ με το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Προσέξτε ότι το πλήθος των γραμμών που διέρχονται από την επιφάνεια A είναι ίσο με εκείνο των γραμμών που διέρχονται από την επιφάνεια $A_{\perp}$, δηλαδή την προβολή της επιφάνειας A σε ένα επίπεδο με προσανατολισμό κάθετο στο πεδίο. Στην Εικόνα Η2.2 φαίνεται ότι η σχέση μεταξύ των δύο επιφανειών δίνεται από τη σχέση $A_{\perp} = A\cos\theta$. Επειδή η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια A είναι ίση με τη ροή που διέρχεται από την $A_{\perp}$, η ροή διά μέσου της A είναι

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA\cos\theta \qquad \textbf{(H2.2)}$$

Από το αποτέλεσμα αυτό, διαπιστώνουμε ότι η ροή που διαπερνά μια επιφάνεια σταθερού εμβαδού A έχει μέγιστη τιμή EA όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο (όταν η κάθετος στην επιφάνεια είναι παράλληλη στο πεδίο, δηλαδή όταν $\theta = 0°$ στην Εικ. Η2.2)· η ροή είναι ίση με μηδέν όταν η επιφάνεια είναι παράλληλη στο πεδίο (όταν η κάθετος στην επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο, δηλαδή όταν $\theta = 90°$).



Εικόνα Η2.3 Στοιχειώδης επιφάνεια εμβαδού ΔA_i.

Στην παραπάνω ανάλυση θεωρήσαμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Σε πιο γενικές συνθήκες, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να είναι μεταβλητό σε διάφορες περιοχές μιας μεγάλης επιφάνειας. Επομένως, ο ορισμός της ροής σύμφωνα με την Εξίσωση Η2.2 έχει νόημα μόνο για ένα μικρό στοιχείο επιφάνειας όπου το πεδίο είναι κατά προσέγγιση σταθερό. Ας θεωρήσουμε μια τυχαία επιφάνεια, την οποία διαιρούμε σε μεγάλο πλήθος μικρών στοιχείων, καθένα με εμβαδόν ΔA. Εδώ μας εξυπηρετεί να ορίσουμε ένα διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ με μέτρο ίσο με το εμβαδόν του i-στού στοιχείου της μεγάλης επιφάνειας και με διεύθυνση την οποία ορίζουμε να είναι *κάθετη* στο στοιχείο επιφάνειας (Εικόνα Η2.3). Στη θέση αυτού του στοιχείου, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}_i$ σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$. Η ηλεκτρική ροή $\Phi_{E,i}$ που διαπερνά το στοιχείο αυτό είναι

$$\Phi_{E,i} = E_i\,\Delta A_i\,\cos\theta_i = \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

(βάσει του ορισμού του βαθμωτού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta$· δείτε το Κεφάλαιο Μ7 της Μηχανικής). Αθροίζοντας τις συνεισφορές όλων των στοιχείων, παίρνουμε μια προσέγγιση της συνολικής ροής που διαπερνά την επιφάνεια:

$$\Phi_E \approx \sum \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

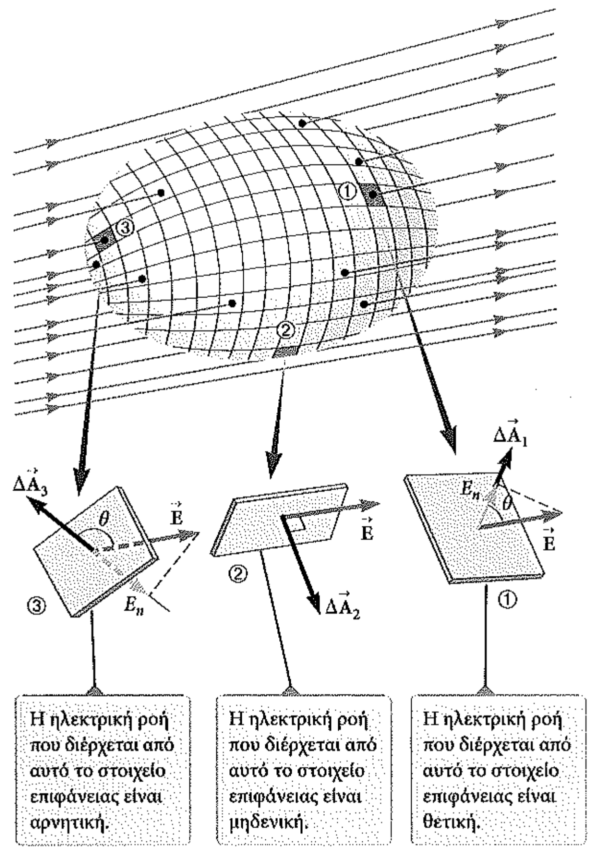
Αν το εμβαδόν κάθε στοιχείου τείνει στο μηδέν, τότε το πλήθος των στοιχείων τείνει στο άπειρο και το άθροισμα αντικαθίσταται από ένα ολοκλήρωμα. Άρα ο γενικός ορισμός της ηλεκτρικής ροής είναι

Ορισμός της ηλεκτρικής ροής ▶

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \textbf{(H2.3)}$$

Η Εξίσωση Η2.3 είναι ένα *επιφανειακό ολοκλήρωμα*, δηλαδή πρέπει να υπολογιστεί σε ολόκληρη την υπό εξέταση επιφάνεια. Γενικά, η τιμή της Φ_E εξαρτάται τόσο από τη μορφή του πεδίου όσο και από την επιφάνεια.

Συχνά μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη ροή η οποία διέρχεται από μια *κλειστή επιφάνεια:* ως κλειστή ορίζεται μια επιφάνεια η οποία χωρίζει τον χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, με τρόπο που επιτρέπει τη μετάβαση από τη μία περιοχή στην άλλη μόνο διαμέσου της επιφάνειας. Για παράδειγμα, η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι κλειστή επιφάνεια.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η2.4

Μια κλειστή επιφάνεια σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Κατά σύμβαση, τα επιφανειακά διανύσματα είναι κάθετα στην επιφάνεια και έχουν φορά προς τα έξω.

Ας θεωρήσουμε την κλειστή επιφάνεια της Δυναμικής Εικόνας Η2.4. Τα διανύσματα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις για κάθε στοιχείο επιφάνειας, αλλά σε κάθε σημείο είναι κάθετα στην επιφάνεια και, λόγω σύμβασης, πάντα έχουν φορά προς τα έξω. Στο στοιχείο ①, οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εσωτερικό προς το εξωτερικό και $\theta < 90°$· έτσι, η ροή $\Phi_{E,1} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_1$ που διαπερνά αυτό το στοιχείο είναι θετική. Στο στοιχείο ②, οι γραμμές του πεδίου εφάπτονται στην επιφάνεια (είναι δηλαδή κάθετες στο $\Delta\vec{\mathbf{A}}_2$)· άρα, $\theta = 90°$ και η ροή είναι ίση με μηδέν. Για στοιχεία όπως το ③, όπου οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εξωτερικό προς το εσωτερικό, $180° > \theta > 90°$ και η ροή είναι αρνητική επειδή το $\cos\theta$ είναι αρνητικό. Η *συνολική* ροή που διέρχεται από την επιφάνεια είναι ανάλογη του συνολικού πλήθους των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια, όπου συνολικό πλήθος σημαίνει *το πλήθος των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον το πλήθος των γραμμών που εισέρχονται σε αυτήν.* Αν εξέρχονται περισσότερες γραμμές απ' όσες εισέρχονται, τότε η συνολική ροή είναι θετική. Αν εισέρχονται περισσότερες γραμμές απ' όσες εξέρχονται, τότε η συνολική ροή είναι αρνητική. Αν με $\oint$ συμβολίσουμε το ολοκλήρωμα σε μια κλειστή επιφάνεια, μπορούμε να γράψουμε ότι η συνολική ροή Φ_E που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια είναι

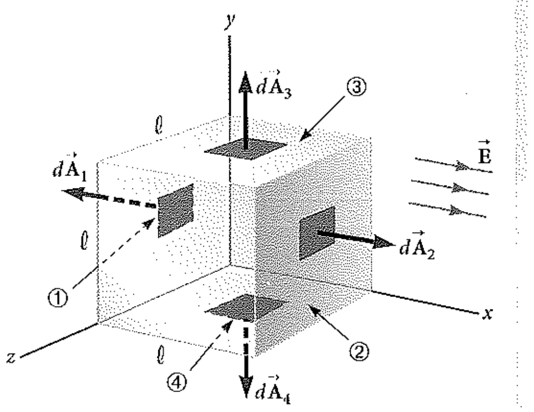
$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E_n\,dA \qquad \textbf{(H2.4)}$$

όπου E_n είναι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια.

Σύντομο ερώτημα **Η2.1** Υποθέστε ότι στο κέντρο μιας σφαιρικής επιφάνειας υπάρχει ένα σημειακό φορτίο. Προσδιορίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια της σφαίρας και τη συνολική ροή που διαπερνά τη σφαίρα. Κατόπιν μειώνουμε στο μισό την ακτίνα της σφαίρας. Τι θα συμβεί στη ροή που διέρχεται από τη σφαίρα και στο μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας; (α) Αυξάνεται τόσο το πεδίο όσο και η ροή. (β) Μειώνεται τόσο το πεδίο όσο και η ροή. (γ) Αυξάνεται η ροή και μειώνεται το πεδίο. (δ) Μειώνεται η ροή και αυξάνεται το πεδίο. (ε) Η ροή δεν μεταβάλλεται και το πεδίο αυξάνεται. (στ) Η ροή μειώνεται και το πεδίο δεν μεταβάλλεται.

Παράδειγμα Η2.1 Ροή που διέρχεται από κύβο

Θεωρήστε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ σε έναν κενό χώρο, προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Στο πεδίο εισάγεται ένας κύβος με μήκος ακμής ℓ και τον προσανατολισμό που φαίνεται στην Εικόνα Η2.5. Βρείτε τη συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κύβου.



Εικόνα Η2.5 (Παράδειγμα Η2.1) Μια κλειστή επιφάνεια κυβικού σχήματος μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο στον άξονα x. Η έδρα ④ είναι στο κάτω μέρος του κύβου, ενώ η έδρα ① είναι απέναντι από την έδρα ②.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Εξετάστε προσεκτικά την Εικόνα Η2.5. Παρατηρήστε ότι οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου διέρχονται κάθετα από δύο έδρες του κύβου και είναι παράλληλες στις άλλες τέσσερις.

Κατηγοριοποίηση Θα υπολογίσουμε τη ροή από τη σχέση ορισμού της, οπότε θα εντάξουμε αυτό το παράδειγμα στα προβλήματα αντικατάστασης.

Η ροή που διέρχεται από τις τέσσερις έδρες (③, ④, καθώς και από τις μη αριθμημένες έδρες) είναι ίση με μηδέν επειδή το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο στις τέσσερις έδρες και άρα κάθετο στο διάνυσμα $d\vec{\mathbf{A}}$ σε καθεμιά από αυτές.

Γράψτε τα ολοκληρώματα για τη συνολική ροή που διέρχεται από τις έδρες ① και ②:

$$\Phi_E = \int_1 \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_2 \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

Για την έδρα ①, το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι σταθερό με κατεύθυνση προς τα μέσα, αλλά το $d\vec{\mathbf{A}}_1$ έχει κατεύθυνση προς τα έξω ($\theta = 180°$). Βρείτε τη ροή που διέρχεται από αυτή την έδρα:

$$\int_1 \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_1 E(\cos 180°)\, dA = -E\int_1 dA = -EA = -E\ell^2$$

Για την έδρα ②, το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι σταθερό με κατεύθυνση προς τα έξω, δηλαδή ίδια με το $d\vec{\mathbf{A}}_2$ ($\theta = 0°$). Βρείτε τη ροή που διέρχεται από αυτή την έδρα:

$$\int_2 \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_2 E(\cos 0°)\, dA = E\int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Βρείτε τη συνολική ροή προσθέτοντας τις επιμέρους ροές που διέρχονται και από τις έξι έδρες:

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Η2.2 Ο νόμος του Gauss

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε τη γενική σχέση μεταξύ της συνολικής ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια (αυτή συχνά λέγεται και *επιφάνεια Gauss*) και του φορτίου που αυτή περιέχει. Αυτή η σχέση, γνωστή και ως *νόμος του Gauss*, έχει θεμελιώδη σημασία στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων.

Ας θεωρήσουμε ένα θετικό σημειακό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα r (Εικόνα Η2.6). Από την Εξίσωση Η1.9, γνωρίζουμε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας είναι $E = k_e q/r^2$. Οι γραμμές του πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω και είναι επομένως κάθετες στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της. Δηλαδή, σε κάθε σημείο της επιφάνειας, το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ το οποίο αντιστοιχεί σε ένα τοπικό στοιχείο επιφάνειας ΔA_i γύρω από το σημείο αυτό. Έτσι,

$$\vec{\mathbf{E}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{A}}_i = E\,\Delta A_i$$

και, από την Εξίσωση Η2.4, διαπιστώνουμε ότι η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι

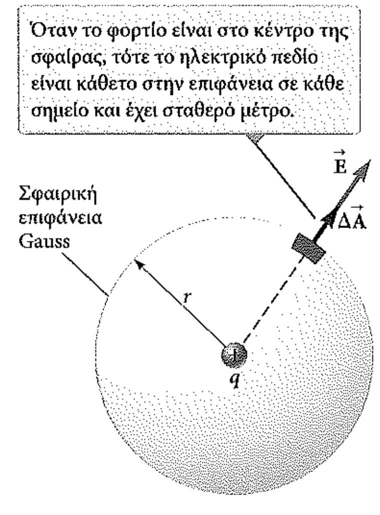
$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\, dA = E\oint dA$$

Βγάλαμε το E εκτός του ολοκληρώματος επειδή, λόγω συμμετρίας, είναι σταθερό στην επιφάνεια. Η τιμή του E δίνεται από τον τύπο $E = k_e q/r^2$. Επιπλέον, επειδή η επιφάνεια είναι σφαιρική, $\oint dA = A = 4\pi r^2$. Άρα η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι

$$\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

Αν θυμηθούμε από την Εξίσωση Η1.3 ότι $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$, μπορούμε να γράψουμε αυτή τη σχέση στη μορφή

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(Η2.5)}$$



Εικόνα Η2.6 Σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r γύρω από θετικό σημειακό φορτίο q.

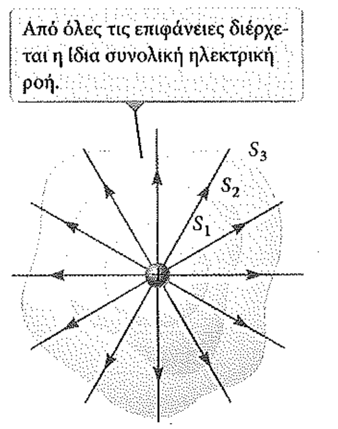
Η Εξίσωση Η2.5 δείχνει ότι η συνολική ροή που διέρχεται από τη σφαιρική επιφάνεια είναι ανάλογη του φορτίου που περιέχει η επιφάνεια. Η ροή δεν εξαρτάται από την ακτίνα r επειδή το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας είναι ανάλογο του r^2, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο είναι ανάλογο του $1/r^2$. Κατά συνέπεια, στο γινόμενο του εμβαδού με το ηλεκτρικό πεδίο, αναιρείται η εξάρτηση από το r.

Τώρα, ας θεωρήσουμε πολλές κλειστές επιφάνειες γύρω από ένα φορτίο q (Εικόνα Η2.7). Η επιφάνεια S_1 είναι σφαιρική, σε αντίθεση με τις S_2 και S_3. Από την Εξίσωση Η2.5, προκύπτει ότι η ροή που διέρχεται από την S_1 έχει τιμή q/ϵ_0. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η ροή είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διέρχονται από μια επιφάνεια. Το σχήμα της Εικόνας Η2.7 δείχνει ότι το πλήθος των γραμμών που διέρχονται από την S_1 είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών που διέρχονται από τις μη σφαιρικές επιφάνειες S_2 και S_3. Έτσι:

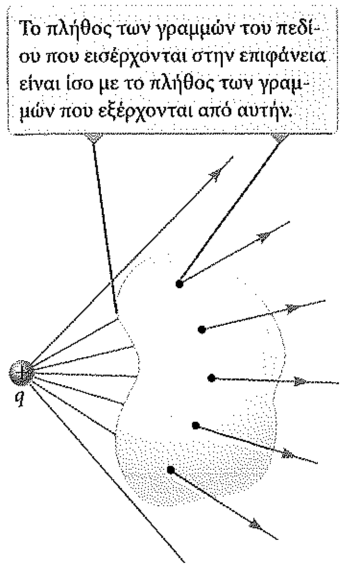
Η συνολική ροή που διέρχεται από *οποιαδήποτε* κλειστή επιφάνεια γύρω από ένα σημειακό φορτίο q δίνεται από τον λόγο q/ϵ_0 και δεν εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας αυτής.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημειακό φορτίο το οποίο βρίσκεται *έξω* από μια κλειστή επιφάνεια αυθαίρετου σχήματος (Εικόνα Η2.8). Όπως διαπιστώνουμε από αυτό το σχήμα, κάθε γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου που εισέρχεται στην επιφάνεια εξέρχεται από αυτήν από διαφορετικό σημείο. Το πλήθος των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που εισέρχονται στην επιφάνεια είναι ίσο με το πλήθος αυτών που εξέρχονται από την επιφάνεια. Συνεπώς, η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφά-

Karl Friedrich Gauss
Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος (1777–1855)
Ο Γκάους έκανε το διδακτορικό του στα μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Χέλμστεντ το 1799. Εκτός από το έργο του στον ηλεκτρομαγνητισμό, συνεισέφερε επίσης στα μαθηματικά, τη θεωρία αριθμών, τη στατιστική, τη μη ευκλείδεια γεωμετρία και τη μηχανική των τροχιών των κομητών. Ήταν ένας από τους ιδρυτές της «Γερμανικής Μαγνητικής Ένωσης», η οποία μελετά το μαγνητικό πεδίο της Γης.



Εικόνα Η2.7 Κλειστές επιφάνειες με διάφορα σχήματα, γύρω από ένα θετικό φορτίο.



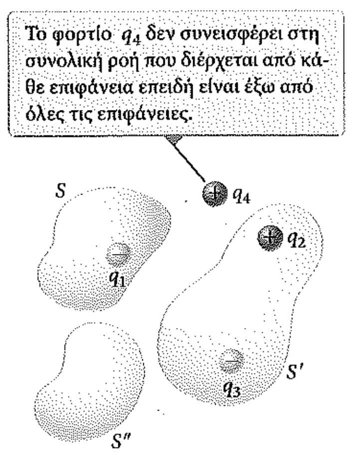
Εικόνα Η2.8 Σημειακό φορτίο που βρίσκεται έξω από κλειστή επιφάνεια.

νεια η οποία δεν περιέχει φορτίο είναι ίση με μηδέν. Αν εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα Η2.1, θα διαπιστώσουμε ότι η συνολική ροή που διέρχεται από τον κύβο είναι ίση με μηδέν επειδή δεν υπάρχει φορτίο μέσα σε αυτόν.

Ας επεκτείνουμε αυτή την επιχειρηματολογία σε δύο γενικευμένες περιπτώσεις: (1) όταν υπάρχουν πολλά σημειακά φορτία και (2) όταν υπάρχει συνεχής κατανομή φορτίου. Και πάλι θα καταφύγουμε στην αρχή της υπέρθεσης, σύμφωνα με την οποία το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν πολλά φορτία είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργούν τα επιμέρους φορτία. Άρα, η ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots) \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

όπου $\vec{\mathbf{E}}$ το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που επιδρά σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και προκύπτει από τη διανυσματική πρόσθεση των ηλεκτρικών πεδίων των επιμέρους φορτίων στο συγκεκριμένο σημείο. Θεωρούμε το σύστημα φορτίων της Δυναμικής Εικόνας Η2.9. Η επιφάνεια S περιβάλλει μόνο ένα φορτίο, το q_1· άρα, η συνολική ροή που διέρχεται από την S είναι q_1/ϵ_0. Η ροή που διέρχεται από την S λόγω των εξωτερικών φορτίων q_2, q_3, και q_4 είναι ίση με μηδέν, επειδή κάθε γραμμή ηλεκτρικού πεδίου η οποία προέρχεται από αυτά τα φορτία και εισέρχεται στην S σε ένα σημείο, εξέρχεται από αυτήν από ένα άλλο σημείο. Η επιφάνεια S' περιβάλλει τα φορτία q_2 και q_3· άρα, η συνολική ροή που διέρχεται από αυτήν είναι $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$. Τέλος, η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια S'' είναι ίση με μηδέν επειδή δεν υπάρχει φορτίο μέσα σε αυτήν. Δηλαδή, *όλες* οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που εισέρχονται στην S'' από κάποιο σημείο εξέρχονται από αυτήν από ένα άλλο. Το φορτίο q_4 δεν συνεισφέρει στη συνολική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε από τις επιφάνειες.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η2.9

Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια εξαρτάται μόνο από το φορτίο *στο εσωτερικό* της. Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια S είναι q_1/ϵ_0, η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια S' είναι $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$, ενώ η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια S'' είναι μηδενική.

Η μαθηματική μορφή του **νόμου του Gauss** αποτελεί γενίκευση όσων περιγράψαμε προηγουμένως· σύμφωνα με αυτήν, η συνολική ροή που διέρχεται από *οποιαδήποτε* κλειστή επιφάνεια είναι ίση με

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(Η2.6)}$$

όπου $\vec{\mathbf{E}}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και $q_{\text{εντός}}$ το συνολικό φορτίο μέσα σε αυτήν.

Όταν χρησιμοποιείτε την Εξίσωση Η2.6, πρέπει να λαμβάνετε υπόψη ότι, αν και το φορτίο $q_{\text{εντός}}$ είναι το συνολικό φορτίο μέσα στην επιφάνεια Gauss, το $\vec{\mathbf{E}}$ συμβολίζει το *συνολικό ηλεκτρικό πεδίο*, το οποίο συμπεριλαμβάνει τη συνεισφορά των φορτίων που βρίσκονται τόσο μέσα όσο και έξω από την επιφάνεια.

Θεωρητικά, για να προσδιορίσετε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σύστημα φορτίων ή μια συνεχής κατανομή φορτίου, μπορείτε να λύσετε τη σχέση του νόμου του Gauss ως προς $\vec{\mathbf{E}}$. Ωστόσο, στην πράξη, μια τέτοια λύση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων με υψηλό βαθμό συμμετρίας. Στην επόμενη ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο κατανομών φορτίων με σφαιρική, κυλινδρική ή επίπεδη συμμετρία. Αν επιλέξουμε με προσοχή την επιφάνεια Gauss γύρω από την κατανομή φορτίου, τότε μπορούμε να απλουστεύσουμε το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης Η2.6 και να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Αποφυγή παγίδων Η2.1

Μηδενική ροή δεν σημαίνει μηδενικό πεδίο

Η ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδενική όταν συντρέχει μία από τις εξής δύο περιπτώσεις: (1) όταν η επιφάνεια δεν περιβάλλει φορτισμένα σωματίδια (2) όταν η επιφάνεια περιβάλλει φορτισμένα σωματίδια, αλλά το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της είναι ίσο με μηδέν. Και στις δύο περιπτώσεις είναι *λάθος* να συμπεράνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια είναι ίσο με μηδέν. Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, ανάλογη του φορτίου που περιέχει η επιφάνεια είναι η ηλεκτρική *ροή* και όχι το ηλεκτρικό *πεδίο*.

Σύντομο ερώτημα **Η2.2** Αν η συνολική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια Gauss είναι ίση με *μηδέν, ενδέχεται να ισχύουν* οι τέσσερις παρακάτω ισχυρισμοί. Ποιοι από αυτούς τους ισχυρισμούς ισχύουν *οπωσδήποτε*; **(α)** Δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό της επιφάνειας. **(β)** Το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας είναι ίσο με μηδέν. **(γ)** Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο της επιφάνειας. **(δ)** Το πλήθος των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που εισέρχονται στην επιφάνεια είναι ίσο με το πλήθος αυτών που εξέρχονται από την επιφάνεια.

Εννοιολογικό Παράδειγμα Η2.2 Ροή που οφείλεται σε σημειακό φορτίο

Μια σφαιρική επιφάνεια Gauss περιβάλλει ένα σημειακό φορτίο q. Περιγράψτε τι θα συμβεί στη συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αν **(Α)** τριπλασιαστεί το φορτίο, **(Β)** διπλασιαστεί η ακτίνα της σφαίρας, **(Γ)** η σφαιρική επιφάνεια μετατραπεί σε επιφάνεια κύβου και **(Δ)** το φορτίο μεταφερθεί σε άλλη θέση στο εσωτερικό της επιφάνειας.

ΛΥΣΗ

(Α) Η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια θα τριπλασιαστεί, επειδή η ροή είναι ανάλογη του φορτίου στο εσωτερικό της επιφάνειας.

(Β) Η ροή δεν θα μεταβληθεί, επειδή όλες οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου από το φορτίο διέρχονται από τη σφαίρα, ανεξάρτητα από την ακτίνα της.

(Γ) Η ροή δεν θα μεταβληθεί όταν αλλάξει το σχήμα της επιφάνεια Gauss, επειδή όλες οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου από το φορτίο διέρχονται από την επιφάνεια, ανεξάρτητα από το σχήμα της.

(Δ) Η ροή δεν θα μεταβληθεί όταν το φορτίο μεταφερθεί σε άλλη θέση στο εσωτερικό της επιφάνειας, επειδή ο νόμος του Gauss αναφέρεται στο συνολικό φορτίο που αυτή περικλείει, ανεξάρτητα από τη θέση του φορτίου στο εσωτερικό της.

Η2.3 Εφαρμογή του νόμου του Gauss σε διάφορες κατανομές φορτίων

Αποφυγή παγίδων Η2.2
Οι επιφάνεια Gauss δεν είναι πραγματικές
Κάθε επιφάνεια Gauss είναι μια φανταστική επιφάνεια που επινοούμε ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες που αναφέρουμε εδώ. Δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με κάποια υλική επιφάνεια.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο νόμος του Gauss χρησιμεύει στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό συμμετρίας. Στα παρακάτω παραδείγματα θα δούμε κατάλληλους τρόπους επιλογής της επιφάνειας Gauss έτσι ώστε να απλουστεύεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα της Εξίσωσης Η2.6 και να είναι δυνατός ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου. Όταν επιλέγετε την επιφάνεια, πάντα να εκμεταλλεύεστε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου έτσι ώστε να μπορείτε να βγάζετε το E έξω από το ολοκλήρωμα. Ο στόχος σας σε αυτόν τον τύπο υπολογισμών είναι ο προσδιορισμός μιας επιφάνειας, κάθε τμήμα της οποίας ικανοποιεί μία ή περισσότερες από τις εξής συνθήκες:

1. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, λόγω συμμετρίας, σε ολόκληρο το τμήμα της επιφάνειας.
2. Το εσωτερικό γινόμενο της Εξίσωσης Η2.6 μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο $E\,dA$ επειδή τα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ είναι παράλληλα.
3. Το εσωτερικό γινόμενο της Εξίσωσης Η2.6 είναι ίσο με μηδέν επειδή τα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ είναι κάθετα.
4. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν στο συγκεκριμένο τμήμα επιφάνειας.

Τα διάφορα τμήματα της επιφάνειας Gauss μπορούν να πληρούν διαφορετικές συνθήκες, αρκεί κάθε τμήμα να ικανοποιεί τουλάχιστον μία. Θα χρησιμοποιήσουμε και τις τέσσερις συνθήκες στα παραδείγματα που περιλαμβάνει το υπόλοιπο του κεφαλαίου και θα αναφερόμαστε σε αυτές με τον αύξοντα αριθμό τους. Αν η κατανομή φορτίου δεν έχει επαρκή συμμετρία ώστε να μπορεί να βρεθεί επιφάνεια Gauss η οποία θα ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, τότε ο νόμος του Gauss δεν θα μας φανεί χρήσιμος στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου της συγκεκριμένης κατανομής.

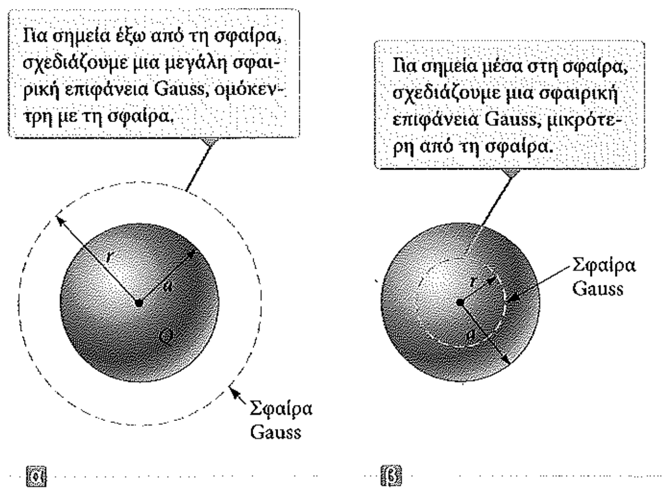
Παράδειγμα Η2.3 Σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου

Μια μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q (Εικ. Η2.10).

(Α) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο που βρίσκεται εκτός της σφαίρας.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Παρατηρήστε τη διαφορά αυτού του προβλήματος σε σχέση με όσα έχουμε αναφέρει για τον νόμο του Gauss. Στην Ενότητα Η2.2 μελετήσαμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν σημειακά φορτία. Τώρα, όμως, εξετάζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια κατανομή φορτίου. Στο Κεφάλαιο Η1 υπολογίσαμε το πεδίο για διάφορες κατανομές φορτίου με ολοκλήρωση στην εκάστοτε κατανομή. Αυτό το παράδειγμα διαφοροποιείται από την ανάλυση που κάναμε στο Κεφάλαιο Η1. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss.



Εικόνα Η2.10 (Παράδειγμα Η2.3) Μια ομοιόμορφα φορτισμένη μονωτική σφαίρα ακτίνας a και συνολικού φορτίου Q. Σε διαγράμματα όπως αυτό, η εστιγμένη γραμμή αναπαριστά την τομή της επιφάνειας Gauss με το επίπεδο της σελίδας.

Η2.3 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρη τη σφαίρα, η κατανομή έχει σφαιρική συμμετρία, οπότε, για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.

Ανάλυση Για να εκμεταλλευτούμε τη σφαιρική συμμετρία, ας επιλέξουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r, ομόκεντρη με τη σφαίρα (Εικόνα Η2.10α). Με την επιλογή αυτή, ικανοποιείται η συνθήκη (2) σε κάθε σημείο της επιφάνειας και ισχύει ότι $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E\,dA$.

Αντικαταστήστε το $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ στον νόμο του Gauss με το απλό γινόμενο $E\,dA$:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\,dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Λόγω συμμετρίας, το E είναι σταθερό σε κάθε σημείο της επιφάνειας, κάτι που ικανοποιεί τη συνθήκη (1), άρα μπορούμε να βγάλουμε το E εκτός του ολοκληρώματος:

$$\oint E\,dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Λύστε ως προς E:

$$(1)\quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > a)$$

Ολοκλήρωση Το πεδίο αυτό είναι πανομοιότυπο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου. Επομένως, **το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα στην περιοχή έξω από τη σφαίρα είναι *ισοδύναμο* με εκείνο που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο το οποίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας.**

(Β) Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο που βρίσκεται εντός της σφαίρας.

ΛΥΣΗ

Ανάλυση Ας επιλέξουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας $r < a$, η οποία είναι ομόκεντρη με τη μονωτική σφαίρα (Εικ. Η2.10β). Έστω V' ο όγκος αυτής της μικρότερης σφαίρας. Για να εφαρμόσετε τον νόμο του Gauss σε αυτή την περίπτωση, παρατηρήστε ότι το φορτίο $q_{\text{εντός}}$ στο εσωτερικό της επιφάνειας Gauss όγκου V' είναι μικρότερο του Q.

Υπολογίστε το $q_{\text{εντός}}$ με τη βοήθεια της σχέσης $q_{\text{εντός}} = \rho V'$:

$$q_{\text{εντός}} = \rho V' = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Προσέξτε ότι οι συνθήκες (1) και (2) ικανοποιούνται σε κάθε σημείο της επιφάνειας Gauss της Εικόνας Η2.10β. Εφαρμόστε τον νόμο του Gauss στην περιοχή $r < a$:

$$\oint E\,dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$

Λύστε ως προς E και αντικαταστήστε το $q_{\text{εντός}}$:

$$E = \frac{q_{\text{εντός}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Αντικαταστήστε $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$ και $\epsilon_0 = 1/4\pi k_e$:

$$(2)\quad E = \frac{Q/\frac{4}{3}\pi a^3}{3(1/4\pi k_e)} r = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{για } r < a)$$

Ολοκλήρωση Αυτό το αποτέλεσμα για το E διαφέρει από εκείνο του πρώτου σκέλους. Δείχνει ότι $E \to 0$ όταν $r \to 0$. Άρα, το αποτέλεσμα εξαλείφει το πρόβλημα που θα υπήρχε στο $r = 0$ αν το E μεταβαλλόταν στο εσωτερικό της σφαίρας ανάλογα με την ποσότητα $1/r^2$, όπως δηλαδή έξω από τη σφαίρα. Δηλαδή, αν $E \propto 1/r^2$ για $r < a$, το πεδίο θα γινόταν άπειρο στο $r = 0$, κάτι που είναι αδύνατο από φυσικής άποψης.

συνεχίζεται

Η2.3 *συν.*

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι προσεγγίζουμε την ακτινική θέση $r = a$ τόσο από το εσωτερικό όσο και από το εξωτερικό της σφαίρας. Θα βρούμε την ίδια τιμή για το ηλεκτρικό πεδίο και από τις δύο κατευθύνσεις;

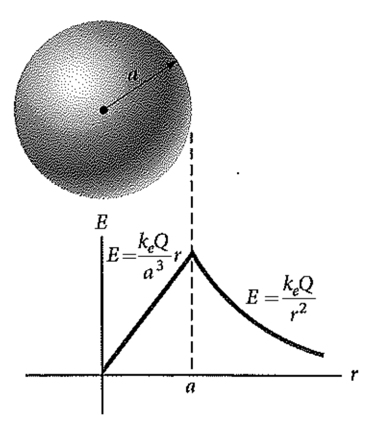
Απάντηση Η Εξίσωση (1) δείχνει ότι η τιμή στην οποία τείνει το ηλεκτρικό πεδίο όταν προσεγγίζουμε από το εξωτερικό της σφαίρας είναι

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{r^2}\right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

Όταν προσεγγίζουμε από το εσωτερικό της σφαίρας, η Εξίσωση (2) δίνει

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{a^3} r\right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

Άρα, η τιμή του πεδίου είναι η ίδια είτε πλησιάζουμε την επιφάνεια από τη μία κατεύθυνση είτε από την άλλη. Στην Εικόνα Η2.11 παρουσιάζεται το γράφημα του E ως συνάρτηση του r. Προσέξτε ότι το μέτρο του πεδίου είναι συνεχής συνάρτηση του r.



Εικόνα Η2.11 (Παράδειγμα Η2.3) Το γράφημα του E συναρτήσει του r για μια ομοιόμορφα φορτισμένη μονωτική σφαίρα. Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας ($r < a$) μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει του r. Το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας ($r > a$) είναι το ίδιο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου Q στη θέση $r = 0$.

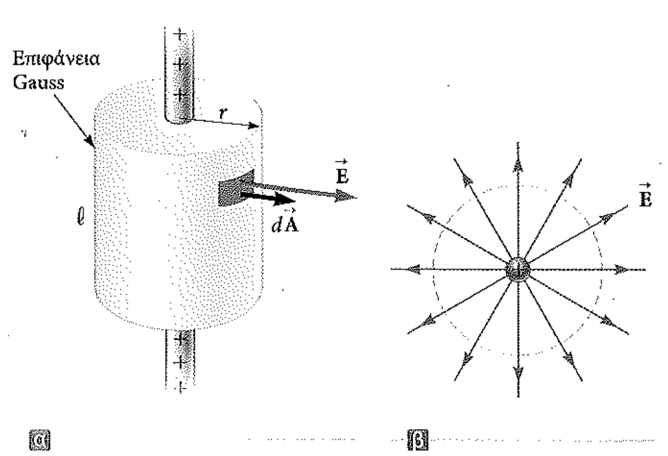
Παράδειγμα Η2.4 Κυλινδρικά συμμετρική κατανομή φορτίου

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια θετικά φορτισμένη ευθεία άπειρου μήκους και σταθερής γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ (Εικ. Η2.12α).

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η φορτισμένη ευθεία έχει *άπειρο* μήκος. Άρα το πεδίο είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από την ευθεία, ανεξάρτητα από την κατακόρυφη θέση κάθε σημείου της Εικόνας Η2.12α.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος της ευθείας, η κατανομή έχει κυλινδρική συμμετρία, οπότε, για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.



Εικόνα Η2.12 (Παράδειγμα Η2.4) (α) Μια φορτισμένη ευθεία άπειρου μήκους, η οποία περιβάλλεται από μια ομόκεντρη κυλινδρική επιφάνεια Gauss. (β) Η όψη από το άκρο του κυλίνδρου μας δείχνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στην κυλινδρική επιφάνεια έχει σταθερό μέτρο και είναι κάθετο στην επιφάνεια.

Ανάλυση Λόγω της συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το $\vec{E}$ είναι κάθετο στη φορτισμένη ευθεία και έχει φορά προς τα έξω (Εικόνα Η2.12β). Για να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου, ας επιλέξουμε μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r και μήκους ℓ, ομοαξονική με την ευθεία φορτίου. Στο καμπύλο τμήμα της επιφάνειας, το $\vec{E}$ έχει σταθερό μέτρο και είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της, δηλαδή ικανοποιούνται οι συνθήκες (1) και (2). Επίσης, η ροή που διέρχεται από τα άκρα (τις βάσεις) του κυλίνδρου Gauss είναι ίση με μηδέν, επειδή το $\vec{E}$ είναι παράλληλο με αυτές τις επιφάνειες. Δηλαδή, βλέπουμε να εφαρμόζεται για πρώτη φορά η συνθήκη (3).

Η2.4 *συν.*

Στον νόμο του Gauss πρέπει να θεωρήσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ολόκληρη την επιφάνεια Gauss. Όμως, επειδή το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ είναι ίσο με μηδέν στις βάσεις του κυλίνδρου, θα στρέψουμε την προσοχή μας μόνο στην καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Εφαρμόστε τον νόμο του Gauss και τις συνθήκες (1) και (2) στην καμπύλη επιφάνεια, αφού προσέξετε ότι το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας Gauss είναι $\lambda\ell$:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

Αντικαταστήστε το εμβαδόν $A = 2\pi r \ell$ της καμπύλης επιφάνειας:

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

Λύστε ως προς το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \qquad \textbf{(Η2.7)}$$

Ολοκλήρωση Το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια κυλινδρικά συμμετρική κατανομή φορτίου μεταβάλλεται ανάλογα της ποσότητας $1/r$, ενώ το πεδίο που βρίσκεται εκτός της σφαιρικά συμμετρικής κατανομής φορτίου μεταβάλλεται ανάλογα της ποσότητας $1/r^2$. Η Εξίσωση Η2.7 προκύπτει και με την άμεση ολοκλήρωση στην κατανομή φορτίου. (Δείτε το Πρόβλημα 37 του Κεφαλαίου Η1.)

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συνέβαινε αν το ευθύγραμμο τμήμα σε αυτό το παράδειγμα δεν είχε άπειρο μήκος;

Απάντηση Αν η φορτισμένη ευθεία του παραδείγματος είχε πεπερασμένο μήκος, τότε το ηλεκτρικό πεδίο δεν θα προέκυπτε από την Εξίσωση Η2.7. Μια φορτισμένη ευθεία πεπερασμένου μήκους δεν έχει επαρκή συμμετρία ώστε να επιτρέψει τη χρήση του νόμου του Gauss, επειδή το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι πλέον σταθερό στην επιφάνεια του κυλίνδρου Gauss: το πεδίο στα άκρα της ευθείας θα διέφερε από το πεδίο μακριά από αυτά. Άρα, σε αυτή την περίπτωση δεν ικανοποιείται η συνθήκη (1). Επιπλέον, το $\vec{E}$ δεν είναι κάθετο σε κάθε σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας: τα διανύσματα του πεδίου κοντά στα άκρα θα είχαν μια συνιστώσα παράλληλη με την ευθεία. Άρα, δεν θα μπορούσε να ικανοποιηθεί η συνθήκη (2). Για σημεία που είναι κοντά σε μια φορτισμένη ευθεία πεπερασμένου μήκους και βρίσκονται μακριά από τα άκρα της, η Εξίσωση Η2.7 αποτελεί μια καλή προσέγγιση της τιμής του πεδίου.

Αφήνουμε σε εσάς να αποδείξετε (δείτε το Πρόβλημα 33) ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου πεπερασμένης ακτίνας και άπειρου μήκους είναι ανάλογο του r.

Παράδειγμα Η2.5 Φορτισμένο επίπεδο

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα θετικά φορτισμένο επίπεδο άπειρων διαστάσεων με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Παρατηρήστε ότι το φορτισμένο επίπεδο εκτείνεται στο άπειρο. Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από το επίπεδο.

Κατηγοριοποίηση Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο επίπεδο, η κατανομή είναι συμμετρική, οπότε, για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.

Ανάλυση Λόγω της συμμετρίας, το $\vec{E}$ είναι κάθετο σε κάθε σημείο του επιπέδου. Το $\vec{E}$ κατευθύνεται μακριά από τα θετικά φορτία, κάτι που υποδηλώνει ότι η κατεύθυνση του $\vec{E}$ στη μία όψη του επιπέδου πρέπει να είναι αντίθετη της κατεύθυνσής του στην άλλη όψη (Εικόνα Η2.13). Η επιφάνεια Gauss που αντικατοπτρίζει αυτή τη συμμετρία είναι ένας μικρός κύλινδρος με άξονα κάθετο στο επίπεδο και βάσεις εμβαδού A που ισαπέχουν από το επίπεδο. Επειδή το $\vec{E}$ είναι παράλληλο στην καμπύλη επιφάνεια –και άρα κάθετο στο $d\vec{A}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας– ικανοποιείται η συνθήκη (3), οπότε η συγκεκριμένη επιφάνεια δεν συνεισφέρει στο επιφανειακό ολοκλήρωμα. Στις βάσεις του κυλίν-

συνεχίζεται

Η2.5 *συν.*

δρου ικανοποιούνται οι συνθήκες (1) και (2). Η ροή που διέρχεται από κάθε βάση του κυλίνδρου είναι EA· άρα η συνολική ροή που διέρχεται από ολόκληρη την επιφάνεια Gauss είναι απλώς εκείνη που διέρχεται από τις βάσεις του κυλίνδρου, $\Phi_E = 2EA$.

Γράψτε τον νόμο του Gauss γι' αυτή την επιφάνεια, αφού προσέξετε ότι το φορτίο που περιέχει είναι $q_{εντός} = \sigma A$:

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{εντός}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

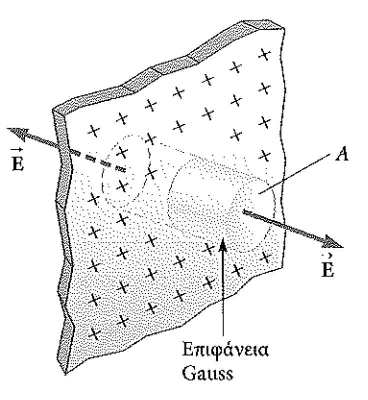
Λύστε ως προς E:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \textbf{(H2.8)}$$

Ολοκλήρωση Επειδή η απόσταση από καθένα από τα επίπεδα άκρα του κυλίνδρου έως το φορτισμένο επίπεδο δεν εμφανίζεται στην Εξίσωση Η2.8, συμπεραίνουμε ότι $E = \sigma/2\epsilon_0$ σε *οποιαδήποτε* απόσταση από το επίπεδο. Δηλαδή, το πεδίο είναι παντού ομογενές.

ΚΙ ΑΝ...; Έστω ότι έχουμε δύο φορτισμένα επίπεδα άπειρων διαστάσεων, τα οποία είναι παράλληλα μεταξύ τους, και ότι το ένα είναι θετικά φορτισμένο ενώ το άλλο είναι αρνητικά φορτισμένο. Και τα δύο επίπεδα έχουν την ίδια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Τι μορφή έχει το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτή την περίπτωση;

Απάντηση Τα ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούν τα δύο επίπεδα προστίθενται στην περιοχή μεταξύ των επιπέδων, δημιουργώντας ένα ομογενές πεδίο μέτρου σ/ϵ_0, και αλληλοαναιρούνται σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του χώρου δίνοντας μηδενικό πεδίο. Η τοποθέτηση επιπέδων πεπερασμένων διαστάσεων το ένα κοντά το ένα στο άλλο αποτελεί έναν πρακτικό τρόπο δημιουργίας ομογενών ηλεκτρικών πεδίων.



Εικόνα Η2.13 (Παράδειγμα Η2.5) Μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss, η οποία διαπερνά ένα φορτισμένο επίπεδο άπειρων διαστάσεων. Η ροή ισούται με EA σε κάθε άκρο της επιφάνειας Gauss και έχει μηδενική τιμή διαμέσου της καμπύλης επιφάνειάς της.

Εννοιολογικό Παράδειγμα **Η2.6** **Μη χρησιμοποιείτε τον νόμο του Gauss σε αυτές τις περιπτώσεις!**

Εξηγήστε γιατί ο νόμος του Gauss δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή ενός ηλεκτρικού διπόλου, ενός φορτισμένου δίσκου, ή ενός τριγώνου με ένα σημειακό φορτίο σε κάθε κορυφή του.

ΛΥΣΗ

Οι κατανομές φορτίων σε όλες αυτές τις διατάξεις δεν έχουν επαρκή συμμετρία ώστε να μας εξυπηρετεί η εφαρμογή του νόμου του Gauss. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις κατανομές, δεν είναι δυνατό να βρούμε κλειστή επιφάνεια η οποία να περιβάλλει την εκάστοτε κατανομή και ταυτόχρονα κάθε τμήμα της επιφάνειας να πληροί μία ή περισσότερες από τις συνθήκες (1)-(4) που αναφέρουμε στην αρχή της ενότητας.

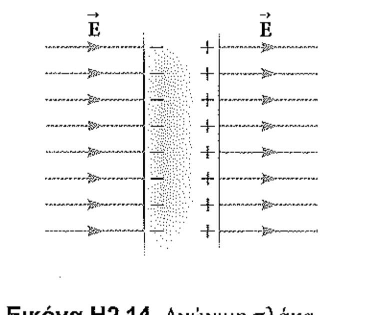
Η2.4 Αγωγοί σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Όπως μάθαμε στην Ενότητα Η1.2, ένας καλός αγωγός του ηλεκτρισμού περιέχει φορτία (ηλεκτρόνια), τα οποία δεν είναι δεσμευμένα σε κάποιο άτομο και είναι επομένως ελεύθερα να κινούνται μέσα στο υλικό. Όταν δεν υπάρχει κίνηση φορτίου μέσα σε έναν αγωγό, τότε λέμε ότι ο αγωγός είναι σε **ηλεκτροστατική ισορροπία**. Ένας αγωγός που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία ▶

1. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με το μηδέν σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού, είτε ο αγωγός είναι συμπαγής είτε είναι κοίλος.
2. Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, τότε αυτό θα βρίσκεται στην επιφάνειά του.

3. Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο σ/ϵ_0, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στο συγκεκριμένο σημείο.
4. Σε έναν αγωγό με ακανόνιστο σχήμα, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της σε θέσεις όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι ελάχιστη.



Εικόνα Η2.14 Αγώγιμη πλάκα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Τα φορτία που επάγονται στις δύο επιφάνειες της πλάκας παράγουν ηλεκτρικό πεδίο αντίθετο του εξωτερικού πεδίου και δίνουν έτσι συνολικό πεδίο ίσο με μηδέν στο εσωτερικό της πλάκας.

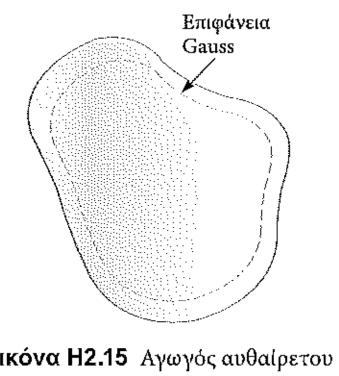
Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα επαληθεύσουμε τις τρεις πρώτες ιδιότητες. Την τέταρτη ιδιότητα απλώς θα την παρουσιάσουμε (θα την επαληθεύσουμε στο Κεφάλαιο Η3), προκειμένου να δώσουμε εναν πλήρη κατάλογο των ιδιοτήτων των αγωγών που είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Για να κατανοήσουμε την πρώτη ιδιότητα, ας θεωρήσουμε μια αγώγιμη πλάκα μέσα σε ένα εξωτερικό πεδίο $\vec{E}$ (Εικ. Η2.14). Με την παραδοχή της ηλεκτροστατικής ισορροπίας, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού *πρέπει* να είναι ίσο με το μηδέν. Αν δεν ήταν, τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού θα δέχονταν μια ηλεκτρική δύναμη ($\vec{F} = q\vec{E}$) και θα επιταχύνονταν υπό την επίδρασή της. Αλλά αυτή η κίνηση των ηλεκτρονίων θα σήμαινε ότι ο αγωγός δεν είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Κατά συνέπεια, η ύπαρξη ηλεκτροστατικής ισορροπίας συνεπάγεται υποχρεωτικά μηδενικό πεδίο στον αγωγό.

Ας διερευνήσουμε πώς επιτυγχάνεται αυτό το μηδενικό πεδίο. Πριν από την εφαρμογή του εξωτερικού πεδίου, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα σε ολόκληρο τον αγωγό. Όταν εφαρμοστεί το εξωτερικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επιταχύνονται προς τα αριστερά (Εικόνα Η2.14), με αποτέλεσμα να σχηματιστεί ένα επίπεδο αρνητικού φορτίου στην αριστερή επιφάνεια. Η κίνηση των ηλεκτρονίων προς τα αριστερά δημιουργεί ένα επίπεδο θετικού φορτίου στη δεξιά επιφάνεια. Αυτά τα φορτισμένα επίπεδα δημιουργούν ένα επιπλέον ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, αντίθετο του εξωτερικού πεδίου. Καθώς κινούνται τα ηλεκτρόνια, οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίων της αριστερής και της δεξιάς επιφάνειας αυξάνονται μέχρι το μέτρο του εσωτερικού πεδίου να ισούται με εκείνο του εξωτερικού, οπότε το συνολικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού θα είναι ίσο με μηδέν. Ο χρόνος που χρειάζεται ένας καλός αγωγός για να φτάσει σε ισορροπία είναι της τάξης των 10^{-16} s, δηλαδή στις περισσότερες περιπτώσεις μπορεί να θεωρηθεί ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται ακαριαία.

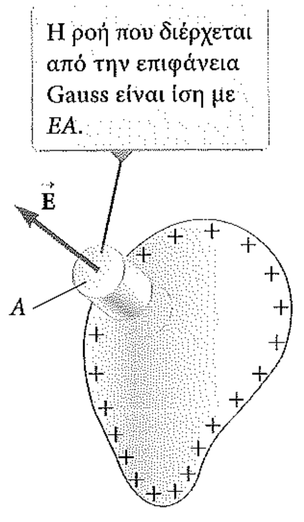
Αν ο αγωγός είναι κοίλος, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του θα είναι επίσης μηδέν, είτε θεωρήσουμε σημεία επάνω στον αγωγό είτε σημεία της κοιλότητας εντός του αγωγού. Η μηδενική τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στην κοιλότητα μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα με την έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού (τάση), οπότε θα μελετήσουμε αυτό το ζήτημα στην Ενότητα Η3.6.

Για να επαληθεύσουμε τη δεύτερη ιδιότητα ενός αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία, θα καταφύγουμε στον νόμο του Gauss. Στην Εικόνα Η2.15 φαίνεται ένας αγωγός αυθαίρετου σχήματος. Διαγράφουμε μια επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού, πολύ κοντά στην επιφάνειά του. Όπως δείξαμε προηγουμένως, όταν ένας αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία, το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του είναι ίσο με μηδέν. Άρα, το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο της επιφάνειας Gauss, σύμφωνα με τη συνθήκη (4) της Ενότητας Η2.3, και η συνολική ροή που διέρχεται από αυτή θα είναι μηδενική. Από αυτό και από τον νόμο του Gauss, συμπεραίνουμε ότι το συνολικό φορτίο μέσα στην επιφάνεια Gauss είναι ίσο με μηδέν. Επειδή μέσα στην επιφάνεια Gauss (η οποία είναι αυθαίρετα κοντά στην επιφάνεια του αγωγού) δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο, το όποιο ολικό φορτίο φέρει ο αγωγός πρέπει να βρίσκεται στην επιφάνειά του. Ο νόμος του Gauss δεν επισημαίνει πώς κατανέμεται αυτό το πλεονάζον φορτίο στην επιφάνεια του αγωγού, αλλά μόνο ότι βρίσκεται αποκλειστικά στην επιφάνειά του.



Εικόνα Η2.15 Αγωγός αυθαίρετου σχήματος. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε μια επιφάνεια Gauss, η οποία μπορεί να βρίσκεται μόλις κάτω από την επιφάνεια του αγωγού.

Για να επαληθεύσουμε την τρίτη ιδιότητα, ας ξεκινήσουμε από την καθετότητα του πεδίου στην επιφάνεια. Αν το διάνυσμα $\vec{E}$ του πεδίου είχε μια συνιστώσα παράλληλη με την επιφάνεια του αγωγού, τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια θα δέχονταν μια ηλε-



Εικόνα Η2.16 Για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό χρησιμοποιούμε μια επιφάνεια Gauss με σχήμα μικρού κυλίνδρου.

κτρική δύναμη και θα κινούνταν παράλληλα στην επιφάνεια· τότε ο αγωγός δεν θα ήταν σε ισορροπία. Επομένως, το διάνυσμα του πεδίου πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια.

Για να προσδιορίσουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου, θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss και θα σχεδιάσουμε μια επιφάνεια Gauss με σχήμα ενός μικρού κυλίνδρου, του οποίου οι βάσεις είναι παράλληλες στην επιφάνεια του αγωγού (Εικ. Η2.16). Ένα μέρος του κυλίνδρου μόλις που εξέχει από τον αγωγό, ενώ το υπόλοιπό του είναι μέσα σε αυτόν. Λόγω της συνθήκης ηλεκτροστατικής ισορροπίας, το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Συνεπώς, η συνθήκη (3) της Ενότητας Η2.3 ικανοποιείται για το καμπύλο τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας Gauss: από αυτό το τμήμα της επιφάνειας Gauss δεν διέρχεται ροή επειδή το $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο με την επιφάνεια. Από την επίπεδη βάση του κυλίνδρου στο εσωτερικό του αγωγού δεν διέρχεται ροή επειδή εκεί $\vec{\mathbf{E}} = 0$, κάτι που ικανοποιεί τη συνθήκη (4). Έτσι, η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με εκείνη που διέρχεται μόνο από την επίπεδη βάση εκτός του αγωγού, στην οποία το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια Gauss. Από τις συνθήκες (1) και (2) για τη βάση αυτή, η ροή είναι ίση με *EA*, όπου *E* είναι το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον αγωγό και *A* το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου. Ο νόμος του Gauss για την επιφάνεια αυτή μας δίνει

$$\Phi_E = \oint E\,dA = EA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

όπου $q_{\text{εντός}} = \sigma A$. Λύνοντας ως προς *E*, παίρνουμε το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(Η2.9)}$$

***Σύντομο ερώτημα* Η2.3** Στον μικρό αδερφό σας αρέσει να τρίβει τα πόδια του στο χαλί και μετά να σας αγγίζει και να σας «τινάζει». Προσπαθώντας να αποφύγετε το «σοκ», ανακαλύπτετε στο υπόγειο έναν κοίλο μεταλλικό κύλινδρο, στον οποίο χωρά μέσα ένας άνθρωπος. Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις *δεν* πρόκειται να νιώσετε το «τίναγμα»; **(α)** Μπαίνετε στον κύλινδρο, παραμένετε σε επαφή με την εσωτερική επιφάνειά του, και ο αδερφός σας, ο οποίος φέρει φορτίο, αγγίζει την εξωτερική μεταλλική επιφάνεια. **(β)** Ο αδερφός σας, που φέρει φορτίο, είναι στο εσωτερικό του κυλίνδρου και αγγίζει την εσωτερική μεταλλική επιφάνεια, ενώ εσείς είστε απ' έξω και αγγίζετε την εξωτερική μεταλλική επιφάνεια. **(γ)** Και οι δύο βρίσκεστε έξω από τον κύλινδρο, αγγίζετε την εξωτερική μεταλλική επιφάνεια, αλλά όχι ο ένας τον άλλον άμεσα.

Παράδειγμα Η2.7 Σφαίρα μέσα σε σφαιρικό κέλυφος

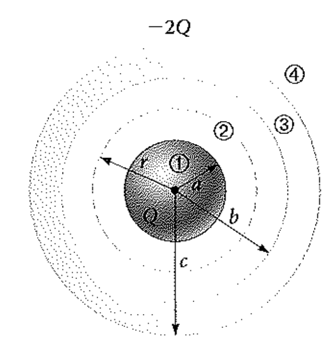
Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας *a* φέρει θετικό συνολικό φορτίο *Q* κατανεμημένο ομοιόμορφα στον όγκο της. Ένα αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας *b* και εξωτερικής ακτίνας *c* είναι ομόκεντρο με τη συμπαγή σφαίρα και φέρει συνολικό φορτίο −2*Q*. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές ①, ②, ③, και ④ της Δυναμικής Εικόνας Η2.17, καθώς και την κατανομή φορτίου στο κέλυφος όταν ολόκληρο το σύστημα είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Προσέξτε τη διαφορά αυτού του προβλήματος από το Παράδειγμα Η2.3. Η φορτισμένη σφαίρα της Εικόνας Η2.10 φαίνεται και στη Δυναμική Εικόνα Η2.17, αλλά περιβάλλεται πλέον από ένα κέλυφος που φέρει φορτίο −2*Q*.

Η2.7 *συν.*

Κατηγοριοποίηση Το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρη τη σφαίρα, ενώ επίσης γνωρίζουμε ότι το φορτίο του αγώγιμου κελύφους κατανέμεται και αυτό ομοιόμορφα στις δύο επιφάνειές του. Άρα, το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία, οπότε για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στις διάφορες περιοχές, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η2.17

(Παράδειγμα Η2.7) Μονωτική σφαίρα ακτίνας *a*, που φέρει φορτίο *Q*, περιβάλλεται από αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος, το οποίο φέρει φορτίο −2*Q*.

Ανάλυση Στην περιοχή ② –ανάμεσα στην επιφάνεια της συμπαγούς σφαίρας και την εσωτερική επιφάνεια του κελύφους– φέρουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας *r*, όπου $a < r < b$, σημειώνοντας ότι το φορτίο μέσα σε αυτή την επιφάνεια είναι $+Q$ (το φορτίο επάνω στη συμπαγή σφαίρα). Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου έχουν ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω και το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό μέτρο επάνω στην επιφάνεια Gauss.

Το φορτίο του αγώγιμου κελύφους δημιουργεί μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $r < b$, οπότε το κέλυφος δεν επιδρά στο πεδίο που δημιουργεί η σφαίρα. Γράψτε μια σχέση που να εκφράζει το πεδίο στην περιοχή ② όπως αυτή για το πεδίο της σφαίρας του πρώτου σκέλους του Παραδείγματος Η2.3:

$$E_2 = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } a < r < b)$$

Επειδή το αγώγιμο κέλυφος δεν δημιουργεί πεδίο στο εσωτερικό του, δεν επιδρά ούτε στο πεδίο μέσα στη σφαίρα. Γράψτε μια σχέση που να εκφράζει το πεδίο στην περιοχή ① όπως αυτή για το πεδίο της σφαίρας του δεύτερου σκέλους του Παραδείγματος Η2.3:

$$E_1 = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{για } r < a)$$

Στην περιοχή ④, όπου $r > c$, δημιουργήστε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss· η επιφάνεια αυτή περιέχει συνολικό φορτίο $q_{\text{εντός}} = Q + (-2Q) = -Q$. Μοντελοποιήστε την κατανομή φορτίου ως σφαίρα με φορτίο $-Q$ και γράψτε μια σχέση για το πεδίο στην περιοχή ④ όπως αυτή του πρώτου σκέλους του Παραδείγματος Η2.3:

$$E_4 = -k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > c)$$

Στην περιοχή ③, το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν επειδή το σφαιρικό κέλυφος είναι αγωγός σε ισορροπία:

$$E_3 = 0 \quad (\text{για } b < r < c)$$

Δημιουργήστε μια επιφάνεια Gauss ακτίνας *r*, όπου $b < r < c$, σημειώνοντας ότι το $q_{\text{εντός}}$ είναι μηδέν επειδή $E_3 = 0$. Βρείτε το φορτίο $q_{\text{εσωτερικό}}$ στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους:

$$q_{\text{εντός}} = q_{\text{σφαίρας}} + q_{\text{εσωτερικό}}$$
$$q_{\text{εσωτερικό}} = q_{\text{εντός}} - q_{\text{σφαίρας}} = 0 - Q = -Q$$

Ολοκλήρωση Το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους θα είναι $-Q$ ώστε να αντισταθμίζει το φορτίο $+Q$ της συμπαγούς σφαίρας και να δίνει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο στο υλικό του κελύφους. Επειδή το συνολικό φορτίο του κελύφους είναι $-2Q$, η εξωτερική επιφάνειά του θα φέρει φορτίο $-Q$.

ΚΙ ΑΝ...; Σε τι θα διέφεραν τα αποτελέσματα αυτού του προβλήματος αν η σφαίρα ήταν αγώγιμη αντί για μονωτική;

Απάντηση Η μοναδική αλλαγή θα εντοπιζόταν στην περιοχή ①, όπου $r < a$. Επειδή μέσα σε έναν αγωγό που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο, $q_{\text{εντός}} = 0$ για μια επιφάνεια Gauss ακτίνας $r < a$· άρα, λόγω του νόμου του Gauss και λόγω συμμετρίας, $E_1 = 0$. Στις περιοχές ②, ③, και ④, δεν θα υπήρχε τρόπος να προσδιορίσουμε αν η σφαίρα είναι αγώγιμη ή μονωτική από μετρήσεις του ηλεκτρικού πεδίου.

Σύνοψη

Ορισμοί

Η **ηλεκτρική ροή** είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν κάποια επιφάνεια. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές και σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο σε μια επιφάνεια εμβαδού A, η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια είναι

$$\Phi_E = EA\cos\theta \qquad \textbf{(H2.2)}$$

Γενικά, η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια είναι

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \textbf{(H2.3)}$$

Έννοιες και αρχές

Σύμφωνα με τον **νόμο του Gauss**, η συνολική ηλεκτρική ροή Φ_E που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια Gauss είναι ίση με το πηλίκο του *ολικού* φορτίου $q_{\text{εντός}}$ στο εσωτερικό της επιφάνειας προς το ϵ_0:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(H2.6)}$$

Με τον νόμο του Gauss μπορείτε να υπολογίζετε τα ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούν διάφορες συμμετρικές κατανομές φορτίου.

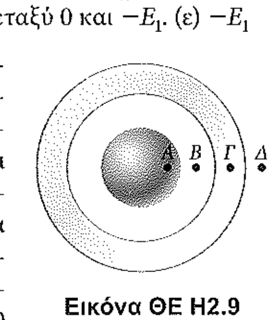
Ένας αγωγός που βρίσκεται σε **ηλεκτροστατική ισορροπία** έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού, είτε ο αγωγός είναι συμπαγής είτε κοίλος.
2. Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, τότε αυτό βρίσκεται στην επιφάνειά του.
3. Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο σ/ϵ_0, όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στο συγκεκριμένο σημείο.
4. Σε έναν αγωγό με ακανόνιστο σχήμα, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της σε θέσεις όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι ελάχιστη.

Θεματικές ερωτήσεις

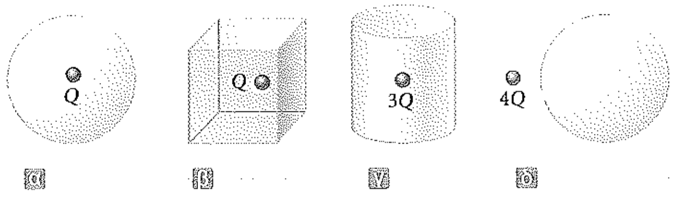
☐ Το σύμβολο αυτό υποδηλώνει ότι η απάντηση υπάρχει στο βιβλίο Student Solutions Manual/Study Guide

1. Ένα ορθογώνιο κουτί μήκους 1.00 m, πλάτους 2.00 m και ύψους 2.50 m περιέχει φορτία 3.00 nC, −2.00 nC, −7.00 nC, και 1.00 nC. Έξω από αυτό υπάρχουν φορτία 1.00 nC και 4.00 nC. Πόση είναι η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κουτιού; (α) 0 (β) -5.64×10^2 N · m²/C (γ) -1.47×10^3 N · m²/C (δ) 1.47×10^3 N · m²/C (ε) 5.64×10^2 N · m²/C
2. Μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στο επίπεδο xy δημιουργεί ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο 1.00 N/C. Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό μιας μεταλλικής σφαίρας, η οποία τοποθετείται 0.500 m επάνω από το επίπεδο xy; (α) 1.00 N/C (β) −1.00 N/C (γ) 0 (δ) 0.250 N/C (ε) Το πεδίο διαφέρει ανάλογα με τη θέση στο εσωτερικό της σφαίρας.
3. Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις *δεν* μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα ο νόμος του Gauss για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου; (α) Κοντά σε ένα επίμηκες, ομοιόμορφα φορτισμένο σύρμα. (β) Επάνω από ένα μεγάλο, ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο. (γ) Στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας. (δ) Έξω από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα. (ε) Ο νόμος του Gauss μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα και άμεσα σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις.
4. ☐ Μέσα σε μια κυβική επιφάνεια Gauss βρίσκεται ένα σωματίδιο με φορτίο q. Κοντά σε αυτό δεν υπάρχουν άλλα φορτία. **(i)** Αν το σωματίδιο είναι στο κέντρο του κύβου, ποια είναι η ροή που διέρχεται από κάθε έδρα του κύβου; (α) 0 (β) $q/2\epsilon_0$ (γ) $q/6\epsilon_0$ (δ) $q/8\epsilon_0$ (ε) Εξαρτάται από το μέγεθος του κύβου. **(ii)** Αν το σωματίδιο μπορεί να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του κύβου, ποια είναι η μέγιστη τιμή στην οποία μπορεί να φτάσει η ροή που διέρχεται από μια έδρα του κύβου; Επιλέξτε ένα από τα ενδεχόμενα που δόθηκαν στο πρώτο σκέλος.
5. Μια κυβική επιφάνεια Gauss περιβάλλει ένα επίμηκες, ευθύ, φορτισμένο νημάτιο, το οποίο διαπερνά κάθετα δύο απέναντι έδρες. Κοντά σε αυτό δεν υπάρχουν άλλα φορτία. **(i)** Σε πόσες από τις έδρες του κύβου είναι μηδενικό το ηλεκτρικό πεδίο; (α) 0 (β) 2 (γ) 4 (δ) 6 **(ii)** Σε πόσες από τις έδρες του κύβου είναι μηδενική η ηλεκτρική ροή; Επιλέξτε ένα από τα ενδεχόμενα που δόθηκαν στο πρώτο σκέλος.
6. Μια κυβική επιφάνεια Gauss διχοτομείται από ένα μεγάλο φορτισμένο έλασμα, το οποίο είναι παράλληλο στις επάνω και κάτω έδρες του κύβου. Κοντά σε αυτό δεν υπάρχουν άλλα φορτία. **(i)** Σε πόσες από τις έδρες του κύβου είναι μηδενικό το ηλεκτρικό πεδίο; (α) 0 (β) 2 (γ) 4 (δ) 6 **(ii)** Σε πόσες από τις έδρες του κύβου είναι μηδενική η ηλεκτρική ροή; Επιλέξτε ένα από τα ενδεχόμενα που δόθηκαν στο πρώτο σκέλος.
7. Δύο συμπαγείς σφαίρες, και οι δύο με ακτίνα 5 cm, φέρουν πανομοιότυπο συνολικό φορτίο 2 μC. Η σφαίρα Α είναι καλός αγωγός. Η σφαίρα Β είναι μονωτής, με το φορτίο της να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. **(i)** Ποια είναι η σχέση μεταξύ των μέτρων των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί κάθε σφαίρα ξεχωριστά σε ακτίνα 6 cm; (α) $E_A > E_B = 0$ (β) $E_A > E_B > 0$ (γ) $E_A = E_B > 0$ (δ) $0 < E_A < E_B$ (ε) $0 = E_A < E_B$ **(ii)** Ποια είναι η σχέση μεταξύ των μέτρων των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί κάθε σφαίρα ξεχωριστά σε ακτίνα 4 cm; Επιλέξτε ένα από τα ενδεχόμενα που δόθηκαν στο πρώτο σκέλος.
8. Ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από ένα επίμηκες, ευθύ νημάτιο που περιβάλλεται από επίμηκες, ομοαξονικό, κυλινδρικό αγώγιμο κέλυφος. Υποθέστε ότι το νημάτιο φέρει φορτίο Q, ότι το συνολικό φορτίο στο κέλυφος είναι μηδέν, και ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα συγκεκριμένο σημείο Σ, στο μέσο της απόστασης μεταξύ του νήματος και της εσωτερικής επιφάνειας του κελύφους, είναι $E_1\hat{\mathbf{i}}$. Στη συνέχεια, τοποθετείτε το καλώδιο σε ένα ομογενές εξωτερικό πεδίο $-E\,\hat{\mathbf{i}}$. Πόση θα είναι τότε η οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Σ; (α) 0 (β) Μεταξύ 0 και E_1. (γ) E_1 (δ) Μεταξύ 0 και $-E_1$. (ε) $-E_1$
9. Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας 5 cm φέρει ηλεκτρικό φορτίο κατανεμημένο ομοιόμορφα στον όγκο της. Υπάρχει επίσης ένα αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος, ομόκεντρο με τη σφαίρα και με μηδενικό συνολικό φορτίο (Εικόνα ΘΕ Η2.9). Η εσωτερική ακτίνα του κελύφους είναι 10 cm, ενώ η εξωτερική 15 cm. Κοντά σε αυτό δεν υπάρχουν άλλα φορτία. (α) Ταξινομήστε τις τιμές του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία A (σε ακτίνα 4 cm), B (σε ακτίνα 8 cm), Γ (σε ακτίνα 12 cm), και Δ (σε ακτίνα 16 cm) από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Επισημάνετε στην κατάταξή σας πιθανές περιπτώσεις ίσων τιμών. (β) Ταξινομήστε με παρόμοιο τρόπο την ηλεκτρική ροή η οποία διέρχεται διαμέσου των ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών στα σημεία A, B, Γ, και Δ.



Εικόνα ΘΕ Η2.9

10. Ένα μεγάλο μεταλλικό σφαιρικό κέλυφος φέρει μηδενικό συνολικό φορτίο. Στηρίζεται σε μια μονωτική βάση και έχει μια μικρή οπή στην κορυφή του. Από την οπή κατεβάζουμε με μια μεταξωτή κλωστή στο εσωτερικό του κελύφους μια μικρή βελόνα με φορτίο Q. **(i)** Πόσο είναι το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους, (α) Q (β) Q/2 (γ) 0 (δ) −Q/2 ή (ε) −Q; Από τα ίδια ενδεχόμενα επιλέξτε τις απαντήσεις σας και για τα επόμενα ερωτήματα. **(ii)** Πόσο είναι το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους; **(iii)** Η βελόνα μπορεί να έρθει σε επαφή με την εσωτερική επιφάνεια του κελύφους. Μετά από την επαφή αυτή, πόσο θα είναι το φορτίο στη βελόνα; **(iv)** Πόσο είναι τώρα το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους; **(v)** Πόσο είναι τώρα το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους;
11. Ταξινομήστε τις τιμές της ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από κάθε επιφάνεια Gauss της Εικόνας ΘΕ Η2.11 από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη. Επισημάνετε στην κατάταξή σας πιθανές περιπτώσεις ίσων τιμών.



Εικόνα ΘΕ Η2.11

Εννοιολογικές ερωτήσεις

☐ Το σύμβολο αυτό υποδηλώνει ότι η απάντηση υπάρχει στο βιβλίο Student Solutions Manual/Study Guide

1. Τον χειμώνα, ο Ήλιος βρίσκεται σε χαμηλότερο σημείο στον ουρανό απ' ό,τι το καλοκαίρι. (α) Πώς επιδρά η αλλαγή θέσης στη ροή ηλιακού φωτός που προσπίπτει σε μια συγκεκριμένη περιοχή της επιφάνειας της Γης; (β) Πώς επιδρά η αλλαγή θέσης στον καιρό;
2. Αν από μια επιφάνεια Gauss εξέρχονται περισσότερες γραμμές ηλεκτρικού πεδίου απ' όσες εισέρχονται, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το συνολικό φορτίο που περιέχει η επιφάνεια αυτή;