

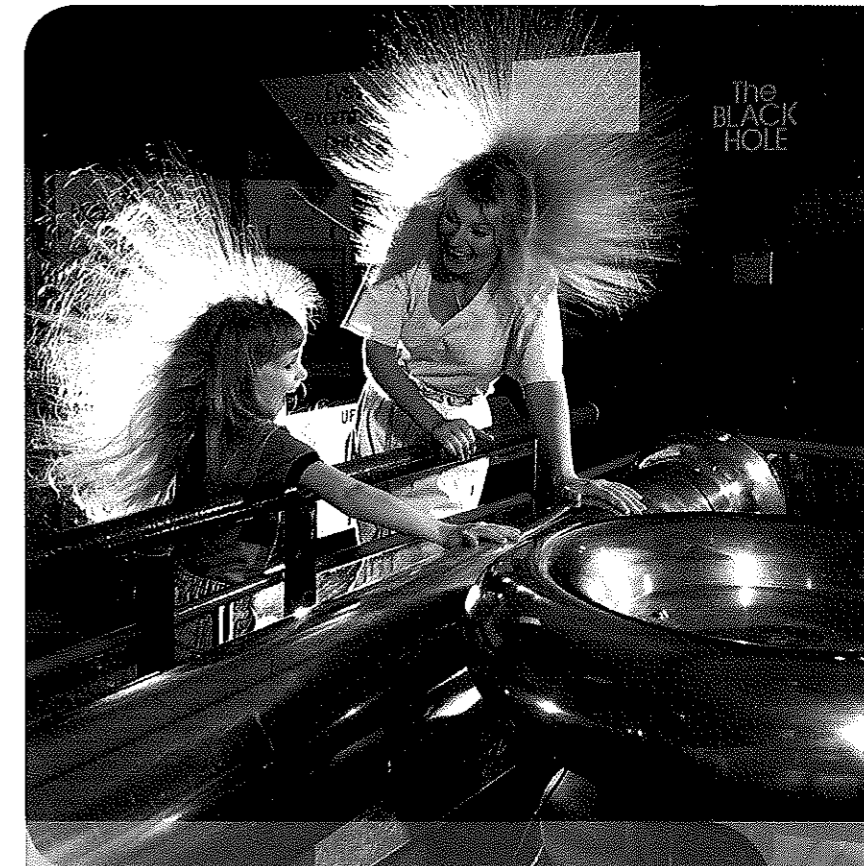
Ηλεκτρικά πεδία

- H1.1 Ιδιότητες των ηλεκτρικών φορτίων
- H1.2 Φόρτιση αντικειμένων με επαγωγή
- H1.3 Ο νόμος του Coulomb
- H1.4 Το ηλεκτρικό πεδίο
- H1.5 Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου
- H1.6 Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου
- H1.7 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του ηλεκτρομαγνητισμού. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της δύναμης που περιγράφουμε στη μηχανική. Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων είναι μία από τις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας μερικές βασικές ιδιότητες μιας εκδήλωσης της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης, της ηλεκτρικής (ή ηλεκτροστατικής) δύναμης. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τον νόμο του Coulomb, τον θεμελιώδη νόμο που διέπει την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους φορτισμένων σωματιδίων. Κατόπιν θα εισαγάγουμε την έννοια του ηλεκτρικού πεδίου που σχετίζεται με μια κατανομή φορτίου και θα περιγράψουμε την επίδρασή του σε άλλα φορτισμένα σωματίδια. Έπειτα θα δείξουμε πώς χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας δεδομένης κατανομής φορτίου. Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με τη μελέτη της κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

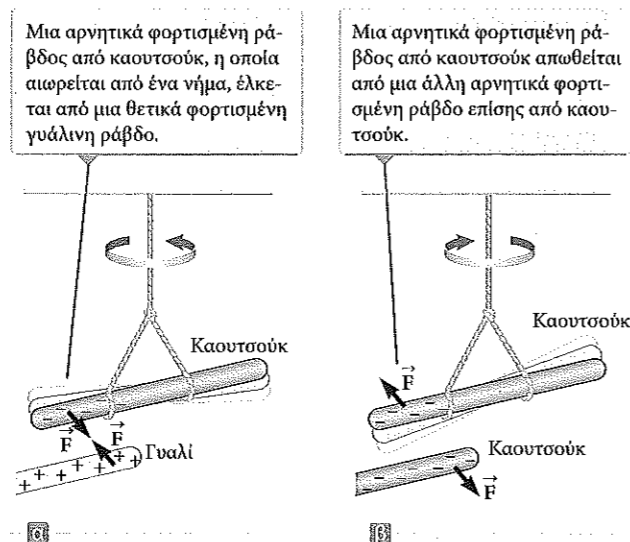
H1.1 Ιδιότητες των ηλεκτρικών φορτίων

Η ύπαρξη των ηλεκτρικών δυνάμεων μπορεί να αποδειχτεί με μερικά απλά πειράματα. Για παράδειγμα, αν τρίψουμε ένα μπαλόνι στα μαλλιά μας κατά τη διάρκεια μιας ξηρής ημέρας, θα διαπιστώσουμε ότι το μπαλόνι έλκει μικρά κομμάτια χαρτιού. Συχνά, αυτή η ελκτική δύναμη είναι τόσο ισχυρή ώστε τα κομματάκια χαρτιού «κρέμονται» από το μπαλόνι.

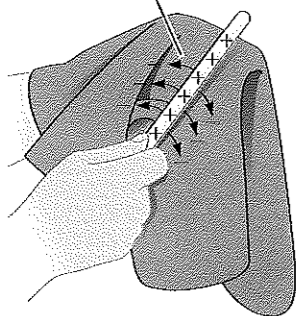


Μητέρα και κόρη «απολαμβάνουν» την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης του σώματός τους. Κάθε τρίχα της κεφαλής τους φορτίζεται και ασκεί απωστική δύναμη στις άλλες τρίχες, με αποτέλεσμα τα μαλλιά-«καρφάκια» που φαίνονται στην εικόνα. (Κατόπιν αδείας της Resonance Research Corporation)

Εικόνα Η1.1 Η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ (α) αντίθετα φορισμένων σωμάτων και (β) όμοια φορισμένων σωμάτων.



Λόγω της διατήρησης του φορτίου, κάθε ηλεκτρόνιο προσθέτει αρνητικό φορτίο στο μεταξωτό ύφασμα και προσδίδει στη γυάλινη ράβδο ισότιμο θετικό φορτίο.



Εικόνα Η1.2 Όταν μια γυάλινη ράβδος τρίβεται σε μεταξωτό ύφασμα, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από το γυαλί στο μεταξωτό ύφασμα. Επίσης, επειδή τα φορτία μεταφέρονται σε διακριτά πακέτα, τα φορτία στα δύο αντικείμενα είναι $\pm e$, ή $\pm 2e$, ή $\pm 3e$, κ.ο.κ.

Το ηλεκτρικό φορτίο ▶ διατηρείται

Όταν ένα υλικό συμπεριφέρεται έτσι, τότε λέμε ότι έχει **ηλεκτριστεί** ή ότι έχει **φορτιστεί ηλεκτρικά**. Μπορείτε εύκολα να ηλεκτρίσετε το σώμα σας τρίβοντας δυνατά τα παπούτσι σας σε ένα μάλλινο χαλί. Για να αντιληφθείτε το ηλεκτρικό φορτίο στο σώμα σας, αρκεί να αγγίξετε απαλά έναν φίλο σας (και να τον ξαφνιάσετε με ένα «τίναγμα»). Αν οι συνθήκες είναι κατάλληλες, θα δείτε έναν σπινθήρα όταν τον αγγίξετε, ενώ και οι δύο σας θα νιώσετε ένα ελαφρύ «τσιμπήμα». (Ένα τέτοιο πείραμα θα είναι πιο επιτυχημένο αν το πραγματοποιήσετε κατά τη διάρκεια μια ξηρής ημέρας, επειδή η υπερβολική υγρασία στον αέρα μπορεί να προκαλέσει «διαρροή» του φορτίου, με το οποίο έχει φορτιστεί το σώμα σας, προς τη Γη.)

Ο Βενιαμίν Φραγκλίνος (1706–1790) με μια σειρά απλών πειραμάτων διαπίστωσε ότι υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικών φορτίων, τα οποία ονόμασε **θετικά** και **αρνητικά**. Θεωρούμε ότι τα ηλεκτρόνια φέρουν αρνητικό φορτίο, ενώ τα πρωτόνια θετικό. Για να επιβεβαιώσουμε ότι όντως υπάρχουν δύο τύποι φορτίου, ας θεωρήσουμε ότι μια σκληρή ράβδος από καουτσούκ, η οποία έχει τριφτεί σε γούνα, κρέμεται από ένα νήμα (Εικόνα Η1.1). Όταν στη ράβδο από καουτσούκ πλησιάσει μια γυάλινη ράβδος η οποία έχει τριφτεί σε μεταξωτό ύφασμα, τότε οι ράβδοι έλκονται (Εικ. Η1.1α). Αντίθετα, αν δύο φορισμένες ράβδοι από καουτσούκ (ή δύο φορισμένες γυάλινες ράβδοι) πλησιάσουν μεταξύ τους (Εικόνα Η1.1β), τότε αυτές απωθούνται. Αυτή η παρατήρηση μας δείχνει ότι το καουτσούκ και το γυαλί φέρουν δύο διαφορετικούς τύπους φορτίου. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε ότι **τα ομόσημα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόσημα φορτία έλκονται**.

Σύμφωνα με τη σύμβαση του Φραγκλίνου, το ηλεκτρικό φορτίο της γυάλινης ράβδου λέγεται θετικό και εκείνο της ράβδου από καουτσούκ αρνητικό. Άρα, κάθε φορισμένο αντικείμενο που έλκεται από μια φορισμένη ράβδο από καουτσούκ (ή απωθείται από μια φορισμένη γυάλινη ράβδο) φέρει θετικό φορτίο, ενώ κάθε φορισμένο αντικείμενο που απωθείται από μια φορισμένη ράβδο από καουτσούκ (ή έλκεται από μια φορισμένη γυάλινη ράβδο) φέρει αρνητικό φορτίο.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα του ηλεκτρισμού, η οποία προκύπτει από πειραματικές παρατηρήσεις, είναι ότι στα κλειστά (απομονωμένα) συστήματα, **το ηλεκτρικό φορτίο πάντα διατηρείται**. Δηλαδή, κατά την τριβή ενός σώματος σε ένα άλλο, δεν παράγεται φορτίο. Η ηλεκτρίση οφείλεται στη **μεταφορά** φορτίου από το ένα σώμα στο άλλο. Το ένα σώμα αποκτά μια ποσότητα αρνητικού φορτίου ενώ το άλλο μια ποσότητα θετικού φορτίου. Για παράδειγμα, όταν μια γυάλινη ράβδος τρίβεται επάνω σε μεταξωτό ύφασμα (Εικόνα Η1.2), το μεταξωτό ύφασμα αποκτά αρνητικό φορτίο ισόποσο του θετικού φορτίου της ράβδου. Γνωρίζοντας πλέον τη δομή του ατόμου, ξέρουμε ότι κατά την τριβή μεταφέρονται ηλεκτρόνια από το γυαλί στο μεταξωτό ύφασμα. Παρομοίως, όταν το καουτσούκ τρίβεται σε γούνα, μεταφέρονται ηλεκτρό-

νια από τη γούνα στο καουτσούκ, με αποτέλεσμα να δίνουν στο καουτσούκ συνολικά αρνητικό φορτίο και στη γούνα συνολικά θετικό φορτίο. Η διαδικασία αυτή είναι εφικτή επειδή η ουδέτερη, μη φορισμένη ύλη περιέχει ίση ποσότητα θετικών φορτίων (πρωτόνια στους πυρήνες των ατόμων) και αρνητικών φορτίων (ηλεκτρόνια).

Το 1909, ο Robert Millikan (1868–1953) ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό φορτίο απαντάται πάντα στη φύση ως ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ποσότητας φορτίου e (δείτε την Ενότητα Η3.7). Στη σύγχρονη ορολογία, λέμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο q είναι **κβαντισμένο**, όπου q είναι το τυποποιημένο σύμβολο που χρησιμοποιείται για τη μεταβλητή του φορτίου. Δηλαδή, το ηλεκτρικό φορτίο υπάρχει σε μορφή διακριτών «πακέτων», άρα μπορούμε να γράψουμε $q = \pm Ne$, όπου το N είναι ακέραιος αριθμός. Άλλα πειράματα της ίδιας χρονικής περιόδου έδειξαν ότι το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο $-e$, ενώ το πρωτόνιο $+e$, δηλαδή έχει ίσο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Ορισμένα σωματίδια, όπως τα νετρόνια, δεν έχουν φορτίο.

Σύντομο ερώτημα Η1.1 Από ένα σύνολο τριών σωμάτων διαλέγουμε δύο κάθε φορά και τα φέρνουμε το ένα κοντά στο άλλο. Όταν πλησιάζουμε τα σώματα Α και Β, αυτά απωθούνται. Όταν πλησιάζουμε τα σώματα Β και Γ, επίσης απωθούνται. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς; (α) Τα σώματα Α και Γ φέρουν ομόσημα φορτία. (β) Τα σώματα Α και Γ φέρουν ετερόσημα φορτία. (γ) Και τα τρία σώματα φέρουν ομόσημα φορτία. (δ) Ένα σώμα είναι ουδέτερο (δεν φέρει φορτίο). (ε) Πρέπει να γίνουν περισσότερα πειράματα για να προσδιοριστούν τα πρόσημα των φορτίων.

Η1.2 Φόρτιση αντικειμένων με επαγωγή

Μας εξυπηρετεί να κατηγοριοποιούμε τα υλικά με κριτήριο το αν τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινούνται ή όχι μέσα σε αυτά:

Ηλεκτρικοί αγωγοί ονομάζονται τα υλικά στα οποία κάποια από τα ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα¹, μη δεσμευμένα σε άτομα, και μπορούν να κινούνται με σχετική ελευθερία μέσα στο υλικό· **ηλεκτρικοί μονωτές** ονομάζονται τα υλικά στα οποία όλα τα ηλεκτρόνια είναι δεσμευμένα σε άτομα και δεν μπορούν να κινούνται ελεύθερα μέσα στο υλικό.

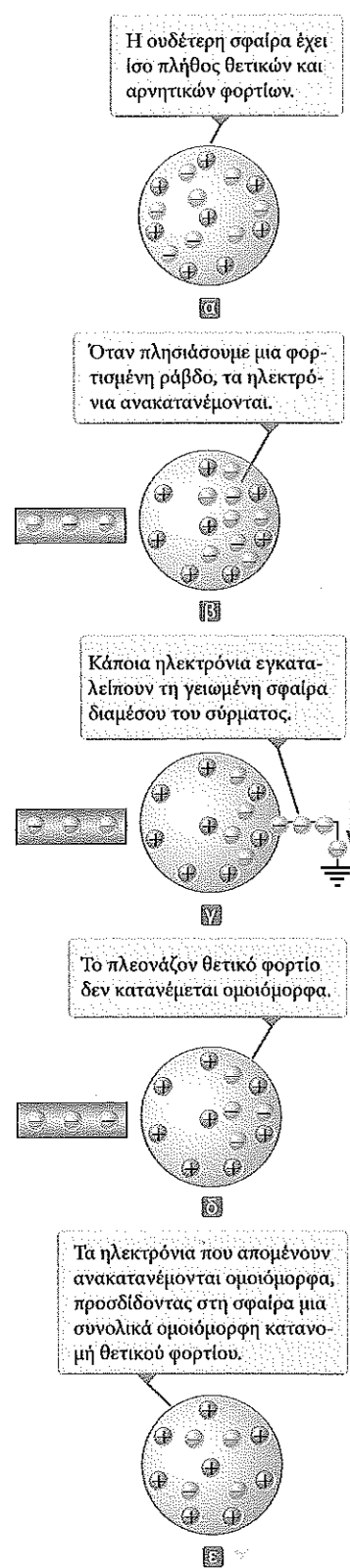
Υλικά όπως το γυαλί, το καουτσούκ, και το ξηρό ξύλο ανήκουν στην κατηγορία των ηλεκτρικών μονωτών. Κατά τη φόρτιση ενός τέτοιου υλικού με τριβή, φορτίζεται μόνο η περιοχή που τρίβεται και τα φορισμένα σωματίδια δεν έχουν τη δυνατότητα να μετακινηθούν σε άλλες περιοχές του.

Αντίθετα, υλικά όπως ο χαλκός, το αλουμίνιο, και ο άργυρος είναι καλοί ηλεκτρικοί αγωγοί. Όταν ένα τέτοιο υλικό φορτιστεί σε μια μικρή περιοχή του, τότε το φορτίο κατανέμεται άμεσα σε ολόκληρη την επιφάνειά του.

Οι **ημιαγωγοί** είναι μια τρίτη κατηγορία υλικών, των οποίων οι ηλεκτρικές ιδιότητες είναι ενδιάμεσες εκείνων των μονωτών και των αγωγών. Το πυρίτιο και το γερμάνιο είναι γνωστά παραδείγματα ημιαγωγών που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή διάφορων ηλεκτρονικών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων για υπολογιστές, κινητά τηλέφωνα, και συστήματα οικιακού κινηματογράφου. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες των ημιαγωγών μπορούν να τροποποιηθούν κατά αρκετές τάξεις μεγέθους με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων ορισμένων ατόμων.

Για να καταλάβουμε πώς μπορεί να φορτιστεί ηλεκτρικά ένας αγωγός με τη διαδικασία της **επαγωγής**, ας θεωρήσουμε μια ουδέτερη (μη φορισμένη) αγωγική σφαίρα,

¹Το άτομο ενός μετάλλου περιέχει ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια στην εξωτερική στοιβάδα του, τα οποία συγκρατούνται χαλαρά στον πυρήνα. Στα μέταλλα, που αποτελούν συγκεντρώσεις μεγάλου πλήθους ατόμων, τα **ελεύθερα ηλεκτρόνια** είναι εκείνα τα ηλεκτρόνια της εξωτερικής στοιβάδας τα οποία δεν είναι δεσμευμένα σε κάποιο συγκεκριμένο άτομο. Η κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων στο μέταλλο μοιάζει με αυτή των μορίων ενός αερίου σε ένα δοχείο.



Εικόνα Η1.3 Ηλεκτρική φόρτιση ενός μεταλλικού αντικείμενου με επαγωγή. (α) Μια ουδέτερη μεταλλική σφαίρα. (β) Κοντά στη σφαίρα τοποθετείται μια φορτισμένη ράβδος από καουτσούκ. (γ) Η σφαίρα γειώνεται. (δ) Η γείωση καταργείται. (ε) Η ράβδος απομακρύνεται.

η οποία είναι μονωμένη από το έδαφος (Εικόνα Η1.3α). Αν το φορτίο στη σφαίρα είναι ίσο ακριβώς με μηδέν, τότε το πλήθος των ηλεκτρονίων που υπάρχουν σε αυτή είναι ίσο με αυτό των πρωτονίων. Όταν πλησιάσουμε στη σφαίρα μια αρνητικά φορτισμένη ράβδο από καουτσούκ, τότε τα ηλεκτρόνια της περιοχής που βρίσκεται πιο κοντά στη ράβδο θα δεχθούν μια απωστική δύναμη και θα μεταφερθούν στην αντίθετη πλευρά της σφαίρας. Αυτή η μεταφορά έχει ως αποτέλεσμα να μειωθεί το πλήθος των ηλεκτρονίων στην περιοχή της σφαίρας που βρίσκεται πιο κοντά στη ράβδο και να αποκτήσει έτσι θετικό φορτίο (Εικόνα Η1.3β). (Στην Εικόνα Η1.3β, η αριστερή πλευρά της σφαίρας είναι θετικά φορτισμένη σαν να έχουν μεταφερθεί εκεί θετικά φορτία. Υπενθυμίζουμε όμως ότι μόνο τα ηλεκτρόνια μπορούν να μετακινούνται ελεύθερα.) Αυτή η διαδικασία μπορεί να συμβεί ακόμα και αν η ράβδος δεν ακουμπήσει καθόλου τη σφαίρα. Αν πραγματοποιήσουμε το ίδιο πείραμα έχοντας συνδέσει με ένα αγωγικό σύρμα τη σφαίρα με τη Γη (Εικ. Η1.3γ), κάποια ηλεκτρόνια του αγωγικού υλικού θα απωθηθούν τόσο έντονα από το αρνητικό φορτίο στη ράβδο, ώστε θα μετακινηθούν από τη σφαίρα προς τη Γη διαμέσου του σύρματος. Το σύμβολο \equiv στο άκρο του σύρματος (Εικόνα Η1.3γ) δείχνει ότι το σύρμα είναι **γειωμένο**, δηλαδή συνδεδεμένο με μια «δεξαμενή» φορτίων, όπως είναι η Γη, που μπορεί να δέχεται ή να παρέχει ηλεκτρόνια ελεύθερα, με αμελητέα επίδραση στα δικά της ηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Αν στη συνέχεια αφαιρέσουμε το σύρμα γείωσης (Εικ. Η1.3δ), η αγωγική σφαίρα θα έχει περίσσεια θετικού φορτίου από επαγωγή επειδή θα έχει λιγότερα ηλεκτρόνια απ' όσα χρειάζονται για να εξουδετερώσουν το θετικό φορτίο των πρωτονίων. Αν απομακρύνουμε τη ράβδο από καουτσούκ από τη σφαίρα (Εικ. Η1.3ε), αυτό το θετικό φορτίο από επαγωγή θα παραμείνει στη μη γειωμένη σφαίρα. Παρατηρήστε ότι η ράβδος από καουτσούκ δεν χάνει το αρνητικό φορτίο της κατά τη διαδικασία αυτή.

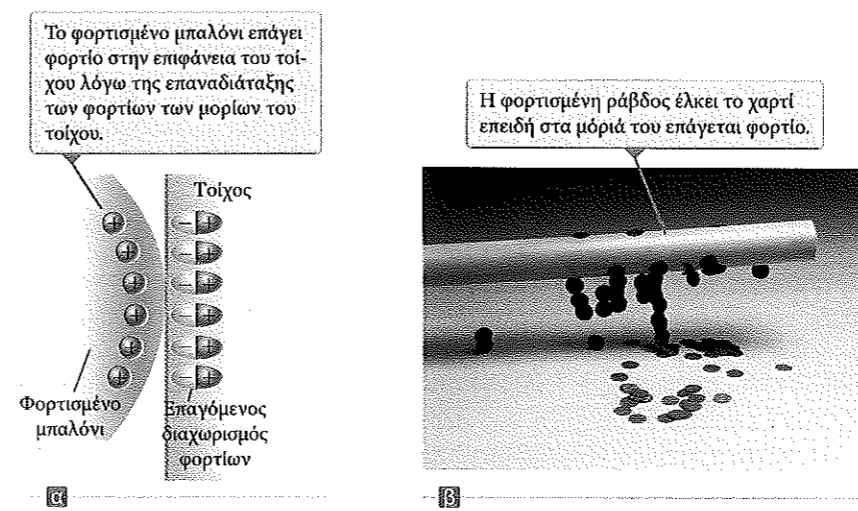
Η φόρτιση ενός σώματος με τη διαδικασία της επαγωγής δεν απαιτεί επαφή με το σώμα που επάγει το φορτίο. Κάτι που είναι τελείως αντίθετο με την ηλεκτρική φόρτιση ενός σώματος με τριβή (δηλαδή, δι' αγωγής ή εξ' επαφής), όπου απαιτείται η επαφή των δύο σωμάτων.

Στους μονωτές συμβαίνει μια διαδικασία παρόμοια με αυτή της επαγωγής στους αγωγούς. Στα περισσότερα ουδέτερα μόρια, το κέντρο του θετικού φορτίου συμπίπτει με εκείνο του αρνητικού. Παρουσία όμως ενός φορτισμένου σώματος, αυτά τα κέντρα στο εσωτερικό κάθε μορίου ενός μονωτή ενδέχεται να μετατοπιστούν ελάχιστα, με αποτέλεσμα να υπάρχει περισσότερο θετικό φορτίο στη μία πλευρά του μορίου απ' ό,τι στην άλλη. Αυτή η αναδιάταξη του φορτίου στα μόρια δημιουργεί μια στιβάδα φορτίου στην επιφάνεια του μονωτή (Εικόνα Η1.4α). Η εγγύτητα των θετικών φορτίων στην επιφάνεια του σώματος και των αρνητικών φορτίων στην επιφάνεια του μονωτή προκαλεί μια ελκτική δύναμη μεταξύ του σώματος και του μονωτή. Οι γνώσεις σας σχετικά με την επαγωγή στους μονωτές θα σας βοηθήσουν να εξηγήσετε για ποιο λόγο μια φορτισμένη ράβδος έλκει μικρά κομμάτια ηλεκτρικά ουδέτερου χαρτιού (Εικόνα Η1.4β).

Σύντομο ερώτημα Η1.2 Από ένα σύνολο τριών σωμάτων διαλέγουμε δύο κάθε φορά και τα φέρνουμε το ένα κοντά στο άλλο. Όταν πλησιάζουμε τα σώματα Α και Β, αυτά έλκονται. Όταν πλησιάζουμε τα σώματα Β και Γ, αυτά απωθούνται. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι οπωσδήποτε αληθείς; (α) Τα σώματα Α και Γ φέρουν ομόσημα φορτία. (β) Τα σώματα Α και Γ φέρουν ετερόσημα φορτία. (γ) Και τα τρία σώματα φέρουν ομόσημα φορτία. (δ) Ένα σώμα είναι ουδέτερο. (ε) Πρέπει να γίνουν πρόσθετα πειράματα για να προσδιοριστούν τα φορτία των σωμάτων.

Η1.3 Ο νόμος του Coulomb

Ο Charles Coulomb μέτρησε το μέγεθος των ηλεκτρικών δυνάμεων χρησιμοποιώντας μια συσκευή που επινόησε ο ίδιος, τον ζυγό στρέψης (Εικόνα Η1.5). Η αρχή λει-



τουργίας του ζυγού στρέψης είναι ίδια με εκείνη της συσκευής που χρησιμοποίησε ο Cavendish για να μετρήσει τη βαρυτική σταθερά (δείτε την Ενότητα Μ13.1), με τη διαφορά ότι οι ηλεκτρικά ουδέτερες σφαίρες έχουν αντικατασταθεί από φορτισμένες. Η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ των φορτισμένων σφαιρών Α και Β (Εικόνα Η1.5) προκαλεί είτε έλξη είτε άπωση των σφαιρών με αποτέλεσμα η κίνησή τους να συστρέφει το αιωρούμενο νήμα. Επειδή η ροπή επαναφοράς του συστραμμένου νήματος είναι ανάλογη της γωνίας περιστροφής του, η μέτρηση του ανοίγματός της δίνει ένα ποσοτικό μέτρο για την ηλεκτρική δύναμη έλξης ή άπωσης. Αφού οι σφαίρες φορτιστούν με τριβή, η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ τους είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη βαρυτική έλξη, οπότε η δεύτερη μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Τα πειράματα του Coulomb μας επιτρέπουν να γενικεύσουμε τις ιδιότητες της **ηλεκτρικής δύναμης** (η οποία μερικές φορές ονομάζεται και **ηλεκτροστατική δύναμη**) που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ακίνητων φορτισμένων σωματιδίων. Ο όρος **σημειακό φορτίο** αναφέρεται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο μηδενικού μεγέθους. Η μοντελοποίηση των ηλεκτρονίων και των πρωτονίων ως σημειακών φορτίων μάς επιτρέπει να περιγράψουμε ικανοποιητικά την ηλεκτρική τους συμπεριφορά. Πειράματα έχουν δείξει ότι το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης (που λέγεται και **δύναμη Coulomb**) μεταξύ δύο σημειακών φορτίων δίνεται από τον **νόμο του Coulomb**.

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{H1.1})$$

◀ Ο νόμος του Coulomb

όπου k_e είναι μια σταθερή ποσότητα η οποία ονομάζεται **σταθερά του Coulomb**. Στα πειράματά του, ο Coulomb κατάφερε να δείξει ότι η τιμή του εκθέτη της απόστασης r ήταν ίση με 2, με πιθανότητα σχετικού σφάλματος λίγων εκατοστιαίων μονάδων. Σύγχρονα πειράματα έχουν δείξει ότι ο εκθέτης ισούται με 2, με πιθανότητα σχετικού σφάλματος λίγων μονάδων στις 10^{16} . Τα πειράματα αυτά έδειξαν επίσης ότι η ηλεκτρική δύναμη, όπως και η βαρυτική, είναι συντηρητική.

Η τιμή της σταθεράς του Coulomb εξαρτάται από τις επιλεγμένες μονάδες. Η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου στο σύστημα μονάδων SI είναι το **coulomb** (C). Η σταθερά του Coulomb, k_e , σε μονάδες του συστήματος SI έχει τιμή

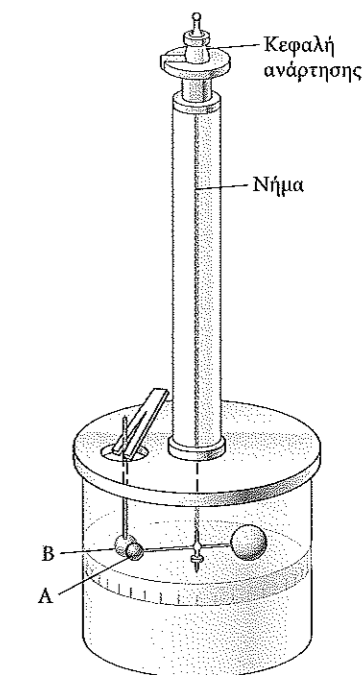
$$k_e = 8.9876 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (\text{H1.2})$$

◀ Η σταθερά του Coulomb

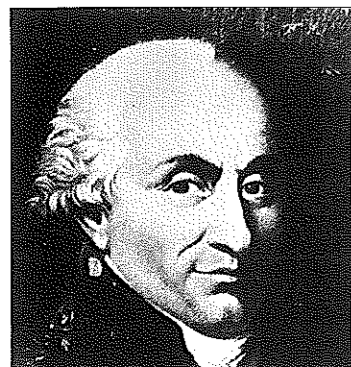
Η σταθερά αυτή γράφεται και με τη μορφή

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{H1.3})$$

Εικόνα Η1.4 (α) Φορτισμένο μπαλόνι πλησιάζει μονωτικό τοίχο. (β) Φορτισμένη ράβδος πλησιάζει μικρά κομμάτια χαρτιού.



Εικόνα Η1.5 Ο ζυγός στρέψης του Coulomb, τον οποίο χρησιμοποίησε για να αποδείξει τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου που διέπει την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων.



Charles Coulomb

Γάλλος φυσικός (1736–1806)

Η κύρια επιστημονική συνεισφορά του Coulomb ήταν στους τομείς της ηλεκτροστατικής και του μαγνητισμού. Κατά τη διάρκεια της ζωής του ασχολήθηκε επίσης με την αντοχή των υλικών και προσδιόρισε τις δυνάμεις που δέχονται σώματα σε δοκούς, συνεισφέροντας με τον τρόπο αυτό και στον τομέα της στατικής των κατασκευών. Στον κλάδο της εργονομίας, η έρευνά του διαφώτισε τους τρόπους βέλτιστης παραγωγής έργου από ανθρώπους και ζώα.

όπου η σταθερά ϵ_0 είναι γνωστή ως **διηλεκτρική σταθερά του κενού** και έχει τιμή

$$\epsilon_0 = 8.854 2 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{H1.4})$$

Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο e που έχει βρεθεί στη φύση², το φορτίο ενός ηλεκτρονίου ($-e$) ή ενός πρωτονίου ($+e$), είναι ίσο με

$$e = 1.602 18 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{H1.5})$$

Άρα, 1 C φορτίου είναι περίπου ίσο με το φορτίο 6.24×10^{18} ηλεκτρονίων ή πρωτονίων. Ο αριθμός αυτός είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων σε 1 cm³ χαλκού, το οποίο είναι της τάξης των 10^{23} . Παρ' όλα αυτά, το 1 C είναι μια σημαντική ποσότητα φορτίου. Στα συνηθισμένα πειράματα φόρτισης μιας ράβδου από γυαλί ή καουτσούκ με τριβή, δημιουργείται καθαρό φορτίο της τάξης των 10^{-6} C. Με άλλα λόγια, μόνο ένα πολύ μικρό κλάσμα του συνολικού διαθέσιμου φορτίου μεταφέρεται μεταξύ της ράβδου και του υλικού με το οποίο την τρίβουμε.

Στον Πίνακα Η1.1 αναφέρονται τα φορτία και οι μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου, και του νετρονίου. Θα παρατηρήσετε ότι το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο έχουν ίδιο ακριβώς φορτίο, αλλά τελείως διαφορετική μάζα. Από την άλλη, το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουν παρόμοια μάζα, αλλά τελείως διαφορετικό φορτίο. Στο Κεφάλαιο Σ8 εξετάζουμε αυτές τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες αναλυτικά.

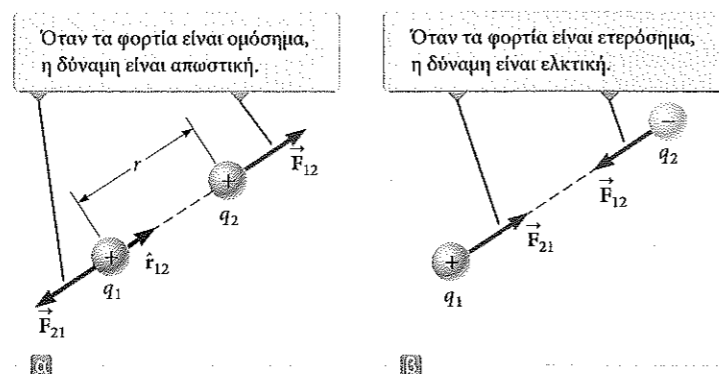
Όταν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb, πρέπει να θυμόμαστε ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και να τη χειριζόμαστε αναλόγως. Ο νόμος του Coulomb για την ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_{12} , που ασκεί ένα φορτίο q_1 σε ένα άλλο φορτίο q_2 , διατυπώνεται σε διανυσματική μορφή ως εξής

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (\text{H1.6})$$

όπου \hat{r}_{12} το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το φορτίο q_1 προς το q_2 (Δυναμική Εικόνα Η1.6α). Η ηλεκτρική δύναμη υπακούει στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, επομένως η ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 έχει ίσο μέτρο με εκείνη που ασκεί το q_1 στο q_2 και αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Τέλος, από την Εξίσωση Η1.6 προκύπτει ότι αν τα q_1 και q_2 είναι ομόσημα (Δυναμική Εικόνα Η1.6α) τότε το γινόμενο $q_1 q_2$ είναι θετικό και η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο έχει κατεύθυνση που το απομακρύνει από το άλλο (δηλαδή είναι απωστική). Αν τα q_1 και q_2 είναι αντίθετα (Δυναμική Εικόνα Η1.6β), τότε το γινόμενο $q_1 q_2$ είναι αρνητικό και η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο έχει κατεύθυνση που το φέρνει κοντά στο άλλο (δηλαδή είναι ελκτική). Αυτά τα πρόσημα περιγράφουν τη σχετική κατεύθυνση της δύναμης, αλλά όχι την απόλυτη. Αρνητικό γινόμενο υποδηλώνει

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η1.6

Δύο σημειακά φορτία χωρίζονται από απόσταση r και ασκούν το ένα στο άλλο μια δύναμη που προκύπτει από τον νόμο του Coulomb. Η δύναμη \vec{F}_{21} που ασκεί το q_2 στο q_1 έχει ίσο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση ως προς τη δύναμη \vec{F}_{12} , την οποία ασκεί το q_1 στο q_2 .



²Σε ελεύθερα σωματίδια δεν έχει παρατηρηθεί φορτίο μικρότερο από e . Ωστόσο, οι σύγχρονες θεωρίες αναφέρουν την ύπαρξη των σωματιδίων που ονομάζονται *κουάρκ* (quark) με φορτία $-e/3$ και $2e/3$. Αν και υπάρχουν επαρκείς πειραματικές αποδείξεις για την ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων στον πυρήνα των ατόμων, δεν έχουν βρεθεί ελεύθερα κουάρκ. Στο Κεφάλαιο Σ8 αναφερόμαστε και σε άλλες ιδιότητες των κουάρκ.

ΠΙΝΑΚΑΣ Η1.1

Φορτίο και μάζα ηλεκτρονίου, πρωτονίου, και νετρονίου

Σωματίδιο	Φορτίο (σε C)	Μάζα (σε kg)
Ηλεκτρόνιο (e)	$-1.602 176 5 \times 10^{-19}$	$9.109 4 \times 10^{-31}$
Πρωτόνιο (p)	$+1.602 176 5 \times 10^{-19}$	$1.672 62 \times 10^{-27}$
Νετρόνιο (n)	0	$1.674 93 \times 10^{-27}$

ελκτική δύναμη, ενώ θετικό γινόμενο υποδηλώνει απωστική δύναμη. Η απόλυτη κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται ένα φορτίο εξαρτάται από τη θέση του άλλου φορτίου. Για παράδειγμα, αν ο άξονας x βρίσκεται στη διεύθυνση των δύο φορτίων (Δυναμική Εικόνα Η1.6α) τότε το γινόμενο $q_1 q_2$ είναι θετικό, αλλά το διάνυσμα \vec{F}_{12} δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x ενώ το \vec{F}_{21} δείχνει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x .

Όταν υπάρχουν περισσότερα από δύο φορτία, τότε η δύναμη μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους φορτίων δίνεται από την Εξίσωση Η1.6. Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη σε κάθε φορτίο είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούν όλα τα άλλα επιμέρους φορτία. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν τέσσερα φορτία, η συνισταμένη δύναμη που ασκούν τα σωματίδια 2, 3, και 4 στο σωματίδιο 1 είναι

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}$$

Παράδειγμα Η1.1

Το άτομο του υδρογόνου

Το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο του ατόμου του υδρογόνου απέχουν μεταξύ τους (κατά μέσο όρο) περίπου 5.3×10^{-11} m. Βρείτε τις τιμές της ηλεκτρικής και της βαρυτικής δύναμης μεταξύ των δύο σωματιδίων.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Σκεφτείτε τα δύο σωματίδια που χωρίζονται από αυτή την πολύ μικρή απόσταση, όπως αναφέρεται στη διατύπωση του προβλήματος. Στο Κεφάλαιο Μ13, αναφέρουμε ότι η βαρυτική δύναμη μεταξύ μικρών σωμάτων είναι ασθενής, συνεπώς υποθέτουμε ότι η βαρυτική δύναμη μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου θα είναι σημαντικά μικρότερη από την ηλεκτρική δύναμη.

Κατηγοριοποίηση Θα υπολογίσουμε την ηλεκτρική και τη βαρυτική δύναμη με τη βοήθεια των παγκόσμιων νόμων που διέπουν αυτές τις δυνάμεις. Άρα, θα εντάξουμε αυτό το παράδειγμα στα προβλήματα αντικατάστασης.

Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Coulomb για να βρείτε την τιμή της ηλεκτρικής δύναμης:

$$F_e = k_e \frac{|e||-e|}{r^2} = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Χρησιμοποιήστε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα και τον Πίνακα Η1.1 (εκεί θα βρείτε τις μάζες κάθε σωματιδίου) για να βρείτε την τιμή της βαρυτικής δύναμης:

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

Ο λόγος τους είναι $F_e/F_g \approx 2 \times 10^{39}$. Επομένως, η βαρυτική δύναμη μεταξύ φορτισμένων ατομικών σωματιδίων είναι αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρική. Παρατηρήστε ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα έχει παρόμοια μορφή με τον νόμο των ηλεκτρικών δυνάμεων του Coulomb. Ποια είναι η βασική διαφορά των δύο δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων, εκτός από το μέγεθός τους;

Παράδειγμα Η1.2 Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη

Θεωρήστε τρία σημειακά φορτία που βρίσκονται στις κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου (Εικόνα Η1.7), όπου $q_1 = q_3 = 5.00 \mu\text{C}$, $q_2 = -2.00 \mu\text{C}$, και $a = 0.100 \text{ m}$. Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο q_3 .

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Σκεφτείτε τη συνολική δύναμη που ασκείται στο q_3 . Επειδή το φορτίο q_3 βρίσκεται κοντά σε δύο άλλα φορτία, δέχεται δύο ηλεκτρικές δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές ασκούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις (Εικόνα Η1.7).

Κατηγοριοποίηση Επειδή ασκούνται δύο δυνάμεις στο φορτίο q_3 , θα εντάξουμε αυτό το παράδειγμα στα προβλήματα άθροισης διανυσμάτων.

Ανάλυση Στην Εικόνα Η1.7 φαίνονται οι κατευθύνσεις των επιμέρους δυνάμεων που ασκούν τα φορτία q_1 και q_2 στο q_3 . Η δύναμη \vec{F}_{23} που ασκεί το q_2 στο q_3 είναι ελκτική, επειδή τα q_2 και q_3 έχουν αντίθετα πρόσημα. Στο σύστημα συντεταγμένων της Εικόνας Η1.7, η ελκτική δύναμη \vec{F}_{23} έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά (προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x).

Η δύναμη \vec{F}_{13} που ασκεί το q_1 στο q_3 είναι απωστική επειδή και τα δύο φορτία είναι θετικά. Η απωστική δύναμη \vec{F}_{13} σχηματίζει γωνία 45.0° με τον άξονα x .

$$\begin{aligned} \text{Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Η1.1 για να βρείτε το μέτρο της } \vec{F}_{23}: \\ F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2} \\ = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(2.00 \times 10^{-6} \text{ C})(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.100 \text{ m})^2} = 8.99 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Βρείτε το μέτρο της δύναμης } \vec{F}_{13}: \\ F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2}a)^2} \\ = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{2(0.100 \text{ m})^2} = 11.2 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Βρείτε τις συνιστώσες } x \text{ και } y \text{ της} \\ \text{δύναμης } \vec{F}_{13}: \\ F_{13x} = F_{13} \cos 45.0^\circ = 7.94 \text{ N} \\ F_{13y} = F_{13} \sin 45.0^\circ = 7.94 \text{ N} \end{aligned}$$

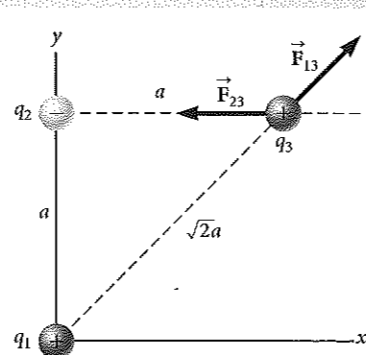
$$\begin{aligned} \text{Βρείτε τις συνιστώσες της} \\ \text{συνισταμένης δύναμης που} \\ \text{ασκείται στο } q_3: \\ F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.94 \text{ N} + (-8.99 \text{ N}) = -1.04 \text{ N} \\ F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.94 \text{ N} + 0 = 7.94 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Εκφράστε τη συνισταμένη δύναμη} \\ \text{που ασκείται στο } q_3 \text{ ως συνάρτηση} \\ \text{των μοναδιαίων διανυσμάτων:} \\ \vec{F}_3 = (-1.04\hat{i} + 7.94\hat{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο q_3 έχει κατεύθυνση προς τα επάνω και αριστερά (Εικόνα Η1.7). Αν το q_3 κινηθεί υπό την επίδραση της συνισταμένης δύναμης, τότε θα αλλάξουν οι αποστάσεις μεταξύ του q_3 και των άλλων φορτίων, και συνεπώς θα αλλάξει και η συνισταμένη δύναμη. Άρα, αν το q_3 κινείται ελεύθερα, τότε μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε ως ένα σωματίδιο στο οποίο ασκείται μια συνισταμένη δύναμη, αρκεί να λάβουμε υπόψη μας ότι η δύναμη αυτή δεν είναι σταθερή. Υπενθυμίζουμε ότι αναγράφουμε τις περισσότερες αριθμητικές τιμές με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων, κάτι που οδηγεί σε πράξεις όπως η: $7.94 \text{ N} + (-8.99 \text{ N}) = -1.04 \text{ N}$. Αν κρατήσετε περισσότερα σημαντικά ψηφία σε όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα, τότε θα διαπιστώσετε ότι η πράξη αυτή είναι σωστή.

ΚΙ ΑΝ...: Τι θα συνέβαινε αν τα πρόσημα και των τριών φορτίων άλλαζαν στα ακριβώς αντίθετα; Πώς θα επηρέαζε αυτή η αλλαγή το αποτέλεσμα για τη δύναμη \vec{F}_3 ;

Απάντηση Το φορτίο q_3 θα εξακολουθούσε να έλκεται από το q_2 και να απωθείται από το q_1 με δυνάμεις ίδιου μέτρου όπως στο παράδειγμα. Επομένως, το τελικό αποτέλεσμα για τη δύναμη \vec{F}_3 θα ήταν το ίδιο.



Εικόνα Η1.7 (Παράδειγμα Η1.2) Η δύναμη που ασκεί το q_1 στο q_3 είναι \vec{F}_{13} . Η δύναμη που ασκεί το q_2 στο q_3 είναι \vec{F}_{23} . Η συνισταμένη δύναμη \vec{F}_3 που δέχεται το q_3 είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$.

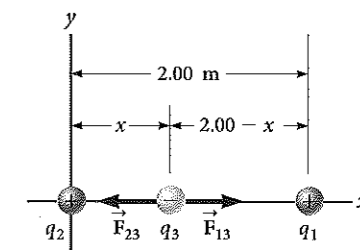
Σύντομο ερώτημα Η1.3 Το σώμα Α φέρει φορτίο $+2 \mu\text{C}$, ενώ το Β φέρει φορτίο $+6 \mu\text{C}$. Ποιος από τους ισχυρισμούς είναι αληθής για τις ηλεκτρικές δυνάμεις που δέχονται τα σώματα;
(α) $\vec{F}_{AB} = -3\vec{F}_{BA}$ (β) $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (γ) $3\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (δ) $\vec{F}_{AB} = 3\vec{F}_{BA}$
(ε) $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA}$ (στ) $3\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA}$

Παράδειγμα Η1.3 Σε ποιο σημείο είναι μηδενική η συνισταμένη δύναμη;

Όπως φαίνεται στην Εικόνα Η1.8, στον άξονα x υπάρχουν τρία σημειακά φορτία. Το θετικό φορτίο $q_1 = 15.0 \mu\text{C}$ βρίσκεται στη θέση $x = 2.00 \text{ m}$, το θετικό φορτίο $q_2 = 6.00 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο q_3 είναι μηδενική. Ποια είναι η συντεταγμένη του q_3 στον άξονα x ;

Εικόνα Η1.8 (Παράδειγμα Η1.3)

Τρία σημειακά φορτία βρίσκονται στον άξονα x . Αν η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το q_3 είναι ίση με μηδέν, τότε η δύναμη \vec{F}_{13} που ασκεί το q_1 στο q_3 πρέπει να έχει ίσο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τη δύναμη \vec{F}_{23} που ασκεί το q_2 στο q_3 .



ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Επειδή το q_3 βρίσκεται κοντά σε δύο άλλα φορτία, δέχεται δύο ηλεκτρικές δυνάμεις. Ωστόσο, αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, οι δυνάμεις βρίσκονται επάνω στην ίδια διεύθυνση (Εικόνα Η1.8). Εφόσον το q_3 είναι αρνητικό, ενώ τα q_1 και q_2 είναι θετικά, οι δυνάμεις \vec{F}_{13} και \vec{F}_{23} είναι και οι δύο ελκτικές.

Κατηγοριοποίηση Επειδή η συνισταμένη δύναμη στο q_3 είναι μηδενική, θα μοντελοποιήσουμε το σημειακό φορτίο ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Ανάλυση Γράψτε τη σχέση για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_3 όταν αυτό είναι σε ισορροπία:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = -k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \hat{i} + k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2} \hat{i} = 0$$

Μεταφέρετε τον δεύτερο όρο στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης και κατόπιν εξισώστε τους συντελεστές του μοναδιαίου διανύσματος \hat{i} :

$$k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}$$

Απαλείψτε τα k_e και $|q_3|$ και ξαναγράψτε την εξίσωση:

$$(2.00 - x)^2 |q_2| = x^2 |q_1| \\ (4.00 - 4.00x + x^2)(6.00 \times 10^{-6} \text{ C}) = x^2 (15.0 \times 10^{-6} \text{ C})$$

Αναγάγετε τη δευτεροβάθμια εξίσωση σε πιο απλή μορφή:

$$3.00x^2 + 8.00x - 8.00 = 0$$

Βρείτε τη θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $x = 0.775 \text{ m}$

Ολοκλήρωση Η άλλη ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι η $x = -3.44 \text{ m}$. Πρόκειται για μια άλλη θέση όπου οι δύο δυνάμεις που ασκούνται στο q_3 έχουν μεν ίσα μέτρα αλλά ίδια κατεύθυνση.

ΚΙ ΑΝ...: Υποθέστε ότι το q_3 μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος του άξονα x . Το μεταφέρουμε από την αρχική θέση του στο $x = 0.775 \text{ m}$ κατά μια μικρή απόσταση στον άξονα x . Όταν το αφήσουμε ελεύθερο, θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του ή θα απομακρυνθεί ακόμα περισσότερο από αυτήν; Δηλαδή, διαθέτει ευσταθή ή ασταθή ισορροπία;

Απάντηση Αν μετατοπίσουμε το q_3 δεξιά, τότε η δύναμη \vec{F}_{13} θα αυξηθεί ενώ η \vec{F}_{23} θα ελαττωθεί. Το αποτέλεσμα θα είναι μια ολική συνισταμένη δύναμη προς τα δεξιά, με κατεύθυνση ίδια με αυτή της μετατόπισης. Άρα, το φορτίο q_3 θα εξακολουθήσει να κινείται προς τα δεξιά και η ισορροπία θα είναι ασταθής. (Για μια ανασκόπηση της ευσταθούς και της ασταθούς ισορροπίας, ανατρέξτε στην Ενότητα Μ7.9 της Μηχανικής.)

Αν το q_3 περιορίζεται σε ένα σταθερό σημείο του άξονα x , αλλά μπορεί να κινείται προς τα επάνω και προς τα κάτω (Εικόνα Η1.8), τότε διαθέτει ευσταθή ισορροπία. Σε αυτή την περίπτωση, αν μετακινήσουμε το φορτίο προς τα επάνω (ή κάτω) και το αφήσουμε ελεύθερο, τότε αυτό θα κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας του και θα ταλαντωθεί ως προς αυτήν.

Παράδειγμα Η1.4 Βρείτε το φορτίο των σφαιρών

Δύο μικρές πανομοιότυπες φορτισμένες σφαίρες, καθεμιά με μάζα 3.00×10^{-2} kg, ισορροπούν αναρτημένες σε νήματα (Εικόνα Η1.9α). Το μήκος L κάθε νήματος είναι ίσο με 0.150 m, ενώ η γωνία θ είναι ίση με 5.00° . Βρείτε το φορτίο κάθε σφαίρας.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Θα κατανοήσουμε αυτό το παράδειγμα με τη βοήθεια της Εικόνας Η1.9α. Οι δύο σφαίρες απωθούν η μία την άλλη. Αν πλησιάσουμε τις σφαίρες και κατόπιν τις αφήσουμε ελεύθερες, θα απομακρυνθούν από το κέντρο και, αφού αποσβεστούν οι ταλαντώσεις λόγω της αντίστασης του αέρα, θα ισορροπήσουν όπως φαίνεται στην Εικόνα Η1.9α.

Κατηγοριοποίηση Εδώ η έννοια-κλειδί είναι η «ισορροπία». Θα μοντελοποιήσουμε κάθε σφαίρα ως σωματίδιο σε ισορροπία. Αυτό το παράδειγμα είναι παρόμοιο με τα προβλήματα σωμάτων σε ισορροπία του Κεφαλαίου Μ5 της Μηχανικής, με την πρόσθετη ιδιαιτερότητα ότι μία από τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σφαίρα είναι ηλεκτρική.

Ανάλυση Στην Εικόνα Η1.9β φαίνεται το διάγραμμα δυνάμεων για την αριστερή σφαίρα. Η σφαίρα ισορροπεί κάτω από την επίδραση της δύναμης \vec{T} του νήματος, της ηλεκτρικής δύναμης \vec{F}_e από την άλλη σφαίρα, και της βαρυτικής δύναμης $m\vec{g}$.

Γράψτε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την αριστερή σφαίρα σε μορφή συνιστωσών:

$$(1) \sum F_x = T \sin \theta - F_e = 0 \rightarrow T \sin \theta = F_e$$

$$(2) \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0 \rightarrow T \cos \theta = mg$$

Διαιρέστε κατά μέλη την Εξίσωση (1) με την Εξίσωση (2) για να βρείτε την F_e :

$$\tan \theta = \frac{F_e}{mg} \rightarrow F_e = mg \tan \theta$$

Εκμεταλλευτείτε τη γεωμετρία του ορθογώνιου τριγώνου (Εικόνα Η1.9α) για να βρείτε τη σχέση μεταξύ των a , L , και θ :

$$\sin \theta = \frac{a}{L} \rightarrow a = L \sin \theta$$

Λύστε τον νόμο του Coulomb (Εξ. Η1.1) ως προς το φορτίο $|q|$ σε κάθε σφαίρα:

$$|q| = \sqrt{\frac{F_e r^2}{k_e}} = \sqrt{\frac{F_e (2a)^2}{k_e}} = \sqrt{\frac{mg \tan \theta (2L \sin \theta)^2}{k_e}}$$

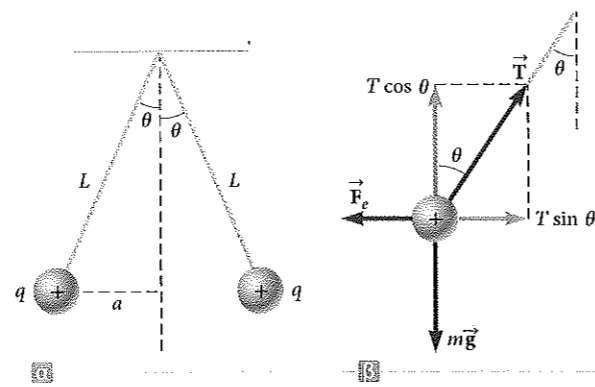
Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$|q| = \sqrt{\frac{(3.00 \times 10^{-2} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \tan(5.00^\circ) [2(0.150 \text{ m}) \sin(5.00^\circ)]^2}{8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}}$$

$$= 4.42 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Ολοκλήρωση Αν στην Εικόνα Η1.9 δεν δίνονταν τα πρόσημα των φορτίων, δεν θα υπήρχε τρόπος να τα προσδιορίσουμε. Στην πραγματικότητα, εφόσον οι σφαίρες είναι φορτισμένες ομόσημα, το πρόσημο του φορτίου δεν έχει σημασία. Η κατάσταση θα ήταν η ίδια είτε ήταν και οι δύο σφαίρες θετικά φορτισμένες είτε ήταν αρνητικά φορτισμένες.

ΚΙ ΑΝ...; Υποθέστε ότι ένας συμφοιτητής σας σας προτείνει να λύσετε το πρόβλημα αυτό χωρίς την παραδοχή ότι τα φορτία έχουν την ίδια τιμή. Ισχυρίζεται ότι αν τα φορτία δεν ήταν ίσα, η γεωμετρία του συστήματος δεν θα ήταν συμμετρική, οπότε τα νήματα θα σχημάτιζαν διαφορετικές γωνίες με την κατακόρυφο και το πρόβλημα θα ήταν πολύ πιο σύνθετο. Τι θα απαντούσατε;



Εικόνα Η1.9 (Παράδειγμα Η1.4) (α) Δύο πανομοιότυπες σφαίρες, καθεμιά με το ίδιο φορτίο q , αιωρούνται από νήματα και ισορροπούν. (β) Διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται στην αριστερή σφαίρα στο (α).

Η1.4 συν.

Απάντηση Η συμμετρία δεν αναιρείται και οι γωνίες δεν διαφέρουν. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, τα μέτρα των ηλεκτρικών δυνάμεων στις δύο σφαίρες παραμένουν ίδια, ανεξάρτητα από την ισότητα ή μη των φορτίων. Η λύση του παραδείγματος παραμένει ίδια με μία διαφορά: η τιμή του $|q|$ στη λύση αντικαθίσταται από τη $\sqrt{|q_1 q_2|}$ στη νέα κατάσταση, όπου q_1 και q_2 οι τιμές των φορτίων των δύο σφαιρών. Η συμμετρία του προβλήματος αναιρείται μόνο στην περίπτωση που διαφέρουν οι μάζες των σφαιρών. Σε αυτή την περίπτωση, τα νήματα θα σχημάτιζαν διαφορετικές γωνίες με την κατακόρυφο και το πρόβλημα θα ήταν πιο σύνθετο.

Η1.4 Το ηλεκτρικό πεδίο

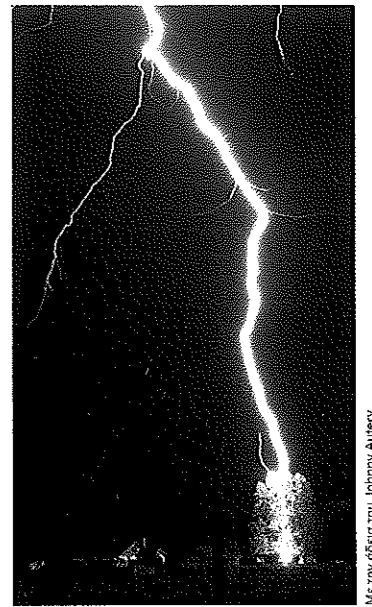
Στην Ενότητα Μ5.1 της Μηχανικής εξετάζουμε τις διαφορές μεταξύ των δυνάμεων από επαφή και των δυνάμεων από πεδία. Δύο δυνάμεις οι οποίες οφείλονται σε πεδία είναι η βαρυτική δύναμη (δείτε το Κεφ. Μ13 της Μηχανικής) και η ηλεκτρική δύναμη, την οποία εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο. Όπως επισημάναμε νωρίτερα, οι δυνάμεις που οφείλονται σε πεδία μπορούν και ασκούνται από απόσταση, με αποτέλεσμα να επιδρούν ακόμα και όταν δεν υπάρχει φυσική επαφή των αντικειμένων που αλληλεπιδρούν. Στην Ενότητα Μ13.4 ορίζουμε ότι το βαρυτικό πεδίο \vec{g} , που δημιουργεί ένα σωματίδιο-πηγή σε ένα σημείο του χώρου, ισούται με τη βαρυτική δύναμη \vec{F}_g η οποία ασκείται σε ένα δοκιμαστικό σωματίδιο μάζας m διά αυτή τη μάζα: $\vec{g} \equiv \vec{F}_g / m$. Η έννοια του πεδίου, η οποία προτάθηκε από τον Michael Faraday (1791–1867) στο πλαίσιο των ηλεκτρικών δυνάμεων, έχει τόσο μεγάλη πρακτική αξία ώστε θα ασχοληθούμε με αυτή σε αρκετά από τα επόμενα κεφάλαια. Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας, λέμε ότι στον χώρο γύρω από ένα φορτισμένο σώμα, το φορτίο-πηγή, υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Όταν σε αυτό το ηλεκτρικό πεδίο βρεθεί ένα άλλο φορτισμένο σώμα, το **δοκιμαστικό φορτίο**, τότε στο σώμα ασκείται ηλεκτρική δύναμη. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα μικρό θετικό δοκιμαστικό φορτίο q_0 (Εικόνα Η1.10), το οποίο έχει τοποθετηθεί κοντά σε ένα δεύτερο σώμα που φέρει ένα πολύ μεγαλύτερο θετικό φορτίο Q . Ορίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το φορτίο-πηγή στη θέση του δοκιμαστικού φορτίου ισούται με την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο ανά μονάδα φορτίου, ή, για την ακρίβεια, το **διάνυσμα \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου** σε ένα σημείο του χώρου ορίζεται ως ο λόγος της ηλεκτρικής δύναμης \vec{F}_e η οποία ασκείται σε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο q_0 που βρίσκεται σε εκείνο το σημείο, προς το δοκιμαστικό φορτίο:³

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (Η1.7)$$

Το διάνυσμα \vec{E} έχει μονάδες newton ανά coulomb (N/C) στο σύστημα SI. Η κατεύθυνση του \vec{E} είναι η κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο όταν τοποθετείται μέσα στο πεδίο (Εικόνα Η1.10). Σημειώστε ότι \vec{E} είναι το πεδίο που παράγει ένα φορτίο ή μια κατανομή φορτίου και όχι το ίδιο το δοκιμαστικό φορτίο. Επίσης, σημειώστε ότι η ύπαρξη ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ιδιότητα της πηγής του: δηλαδή, το πεδίο υφίσταται ανεξάρτητα της παρουσίας του δοκιμαστικού φορτίου. Το δοκιμαστικό φορτίο μας επιτρέπει να *ανιχνεύσουμε* το ηλεκτρικό πεδίο: σε ένα σημείο του χώρου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, αν σε ένα δοκιμαστικό φορτίο που βρίσκεται εκεί ασκείται ηλεκτρική δύναμη.

Αναδιατάσσοντας τους όρους της Εξίσωσης Η1.7 παίρνουμε:

³Όταν χρησιμοποιούμε την Εξίσωση Η1.7, πρέπει να κάνουμε την παραδοχή ότι το δοκιμαστικό φορτίο q_0 είναι τόσο μικρό ώστε δεν διαταράσσει την κατανομή φορτίων που προκαλεί το ηλεκτρικό πεδίο. Αν το δοκιμαστικό φορτίο δεν είναι αμελητέο, θα ανακατανομή το φορτίο στη μεταλλική σφαίρα και το ηλεκτρικό πεδίο που θα προκύψει θα διαφέρει από εκείνο που θα δημιουργούσε παρουσία του πολύ μικρότερου δοκιμαστικού φορτίου.



Αυτή η εντυπωσιακή φωτογραφία δείχνει έναν κεραυνό να χτυπά ένα δένδρο κοντά σε αγροτικές κατοικίες. Οι κεραυνοί είναι συνυφασμένοι με πολύ ισχυρά ηλεκτρικά πεδία στην ατμόσφαιρα.

◀ Ορισμός του ηλεκτρικού πεδίου

Αποφυγή παγίδων Η1.1

Μόνο σωματίδια

Η Εξίσωση Η1.8 ισχύει μόνο για ένα σωματίδιο με φορτίο q , δηλαδή για ένα σώμα μηδενικού (αμελητέου) μεγέθους. Για ένα φορτισμένο σώμα πεπερασμένου μεγέθους που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο, το πεδίο μπορεί να μην έχει ίδιο μέτρο και κατεύθυνση σε όλη την έκταση του σώματος, άρα η αντίστοιχη εξίσωση για τη δύναμη μπορεί να είναι πιο σύνθετη.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (H1.8)$$

Αυτή η εξίσωση δίνει τη δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο q το οποίο βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αν το q είναι θετικό, τα διανύσματα της δύναμης και του πεδίου είναι ομόρροπα. Αν το q είναι αρνητικό, τα διανύσματα της δύναμης και του πεδίου είναι αντίρροπα. Παρατηρήστε την ομοιότητα μεταξύ της Εξίσωσης Η1.8 και της αντίστοιχης εξίσωσης για ένα υλικό σώμα που βρίσκεται σε ένα βαρυντικό πεδίο, $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (Ενότητα Μ5.5). Αν γνωρίζουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο, τότε η Εξίσωση Η1.8 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ηλεκτρική δύναμη σε οποιοδήποτε φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται σε εκείνο το σημείο.

Για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση ενός ηλεκτρικού πεδίου, ας θεωρήσουμε ένα σημειακό φορτίο-πηγή q . Αυτό το φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία του περιβάλλοντος χώρου. Στο σημείο Σ τοποθετείται ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 σε απόσταση r από το φορτίο-πηγή (Δυναμική Εικόνα Η1.1α). Θα χρησιμοποιήσουμε το δοκιμαστικό φορτίο για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης, και άρα και εκείνη του ηλεκτρικού πεδίου. Σύμφωνα με τον νόμο του Coulomb, η δύναμη που ασκεί το q στο δοκιμαστικό φορτίο είναι ίση με

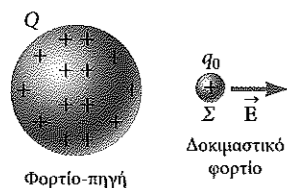
$$\vec{F}_e = k_e \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

όπου \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το q προς το q_0 . Στη Δυναμική Εικόνα Η1.1α, η δύναμη αυτή δείχνει μακριά από το φορτίο-πηγή q . Καθώς το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Σ , δηλαδή στη θέση του δοκιμαστικού φορτίου, ορίζεται από τον τύπο $\vec{E} = \vec{F}_e / q_0$, το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το q στο Σ είναι

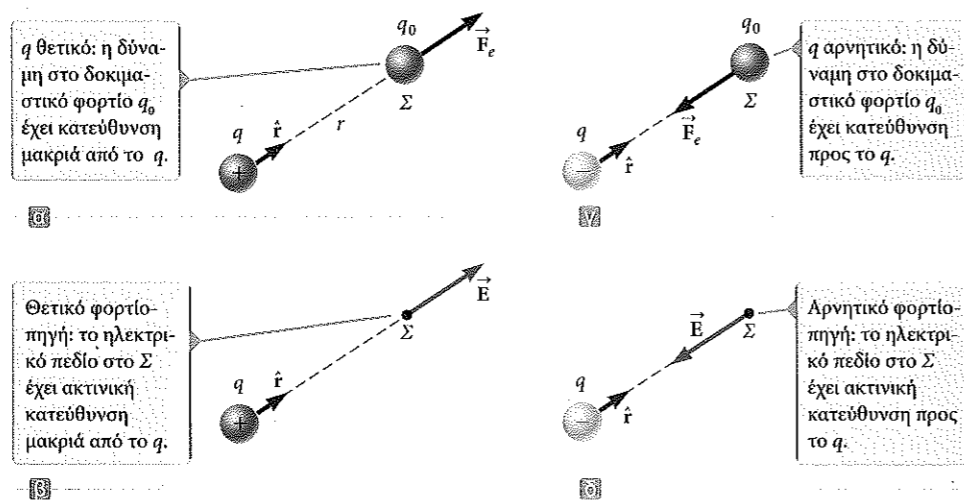
$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (H1.9)$$

Αν το φορτίο-πηγή q είναι θετικό, η Δυναμική Εικόνα Η1.1β δείχνει την κατάσταση χωρίς το δοκιμαστικό φορτίο: το φορτίο-πηγή δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στο Σ , με κατεύθυνση μακριά από το q . Αν το q είναι αρνητικό (Δυναμική Εικόνα Η1.1γ), τότε η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο έχει κατεύθυνση προς το φορτίο-πηγή, επομένως το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ έχει κατεύθυνση προς το φορτίο-πηγή (Δυναμική Εικόνα Η1.1δ).

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σύνολο σημειακών φορτίων σε ένα σημείο Σ , υπολογίζουμε με την Εξίσωση Η1.9 τα διανύσματα των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων στο Σ και έπειτα τα προσθέτουμε διανυσματικά. Με άλλα



Εικόνα Η1.10 Μικρό δοκιμαστικό φορτίο q_0 που τοποθετείται στο σημείο Σ κοντά σε ένα σώμα με πολύ μεγαλύτερο θετικό φορτίο Q δέχεται την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , το οποίο προκαλεί το φορτίο-πηγή Q στο σημείο Σ . Θα θεωρούμε πάντα ότι το δοκιμαστικό φορτίο είναι τόσο μικρό ώστε το πεδίο του φορτίου-πηγής δεν επηρεάζεται από την παρουσία του.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η1.11

(α), (γ) Όταν ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο q_0 τοποθετείται κοντά σε ένα φορτίο-πηγή q , το δοκιμαστικό φορτίο δέχεται δύναμη. (β), (δ) Στο σημείο Σ υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, που οφείλεται στην παρουσία του q .

λόγια, το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργεί μια ομάδα φορτίων-πηγών σε οποιοδήποτε σημείο Σ ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών πεδίων όλων των φορτίων. Αυτή η αρχή της υπέρθεσης που εφαρμόζεται στα πεδία προκύπτει απευθείας από τη διανυσματική πρόσθεση των ηλεκτρικών δυνάμεων. Άρα, το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί μια ομάδα φορτίων-πηγών σε ένα σημείο Σ εκφράζεται ως το διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (H1.10)$$

όπου r_i η απόσταση από το i -οστό φορτίο-πηγή q_i προς το σημείο Σ και \hat{r}_i το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το q_i προς το Σ .

Στο Παράδειγμα Η1.5, θα διερευνήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε δύο φορτία, χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης. Στο δεύτερο μέρος του παραδείγματος θα επικεντρωθούμε στο **ηλεκτρικό δίπολο**, το οποίο ορίζεται ως ένα θετικό φορτίο q και ένα αρνητικό φορτίο $-q$ που απέχουν μεταξύ τους $2a$. Το ηλεκτρικό δίπολο αποτελεί καλό μοντέλο για πολλά μόρια, όπως αυτό του υδροχλωρικού οξέος (HCl). Τα ουδέτερα άτομα και μόρια συμπεριφέρονται ως δίπολα όταν βρίσκονται σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Επίσης, πολλά μόρια, όπως αυτό του HCl, είναι μόνιμα δίπολα. Στο Κεφάλαιο Η4 θα εξετάσουμε την επίδραση τέτοιων διπόλων στη συμπεριφορά υλικών που βρίσκονται σε ηλεκτρικά πεδία.

Σύντομο ερώτημα Η1.4 Δοκιμαστικό φορτίο $+3 \mu\text{C}$ βρίσκεται σε ένα σημείο Σ , όπου υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο με κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο $4 \times 10^6 \text{ N/C}$. Αν αυτό το δοκιμαστικό φορτίο αντικατασταθεί από άλλο δοκιμαστικό φορτίο $-3 \mu\text{C}$, τι θα συμβεί στο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο Σ ; (α) Δεν θα επηρεαστεί. (β) Θα αντιστραφεί. (γ) Θα αλλάξει με τρόπο που δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί.

Παράδειγμα Η1.5 Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν δύο φορτία

Τα φορτία q_1 και q_2 βρίσκονται στον άξονα x , σε αποστάσεις a και b , αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων (Εικόνα Η1.12).

(Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Σ , με συντεταγμένες $(0, y)$.

ΛΥΣΗ

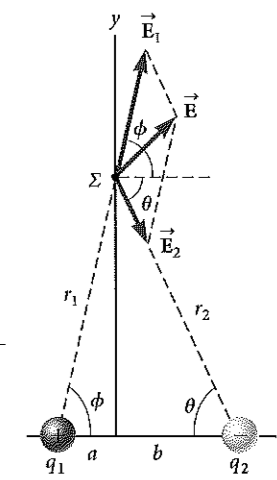
Μοντελοποίηση Συγκρίνετε το παράδειγμα αυτό με το Παράδειγμα Η1.2. Σε εκείνο, προσθέσαμε τα διανύσματα των δυνάμεων για να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται ένα φορτισμένο σωματίδιο. Εδώ, θα προσθέσουμε τα διανύσματα των ηλεκτρικών πεδίων για να βρούμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου.

Κατηγοριοποίηση Έχουμε δύο φορτία-πηγές και θέλουμε να βρούμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο, άρα θα εντάξουμε το παράδειγμα σε αυτά όπου μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αρχή της υπέρθεσης, όπως αυτή περιγράφεται από την Εξίσωση Η1.10.

Ανάλυση Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q_1 στο σημείο Σ :

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2}$$

◀ Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από πεπερασμένο πλήθος σημειακών φορτίων



Εικόνα Η1.12 (Παράδειγμα Η1.5) Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} στο Σ είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, όπου \vec{E}_1 είναι το πεδίο που προκαλεί το θετικό φορτίο q_1 και \vec{E}_2 είναι το πεδίο που προκαλεί το αρνητικό φορτίο q_2 .

συνεχίζεται

H1.5 συν.

Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q_2 στο Σ :

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2}$$

Εκφράστε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου κάθε φορτίου σε μορφή μοναδιαίου διανύσματος:

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \phi \hat{i} + k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \phi \hat{j}$$

$$\vec{E}_2 = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos \theta \hat{i} - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin \theta \hat{j}$$

Γράψτε τις συνιστώσες του διανύσματος του ολικού ηλεκτρικού πεδίου:

$$(1) E_x = E_{1x} + E_{2x} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \phi + k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos \theta$$

$$(2) E_y = E_{1y} + E_{2y} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \phi - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin \theta$$

(B) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Η ειδική αυτή περίπτωση παρουσιάζεται στην Εικόνα Η1.13. Παρατηρήστε τη συμμετρία και το γεγονός ότι η κατανομή των φορτίων έχει πλέον τη μορφή ηλεκτρικού δίπολου.

Κατηγοριοποίηση Επειδή η περίπτωση της Εικόνας Η1.13 είναι ειδική περίπτωση της γενικότερης που φαίνεται στην Εικόνα Η1.12, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του μέρους (A) και να αντικαταστήσουμε σε αυτό τις κατάλληλες τιμές στις μεταβλητές.

Ανάλυση Βάσει της συμμετρίας της Εικόνας Η1.13, υπολογίστε τις Εξισώσεις

(1) και (2) από το μέρος (A) με $a = b$, $|q_1| = |q_2| = q$, και $\phi = \theta$:

$$(3) E_x = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta + k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta$$

$$E_y = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin \theta - k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin \theta = 0$$

Από τη γεωμετρία της Εικόνας Η1.13, υπολογίστε το $\cos \theta$:

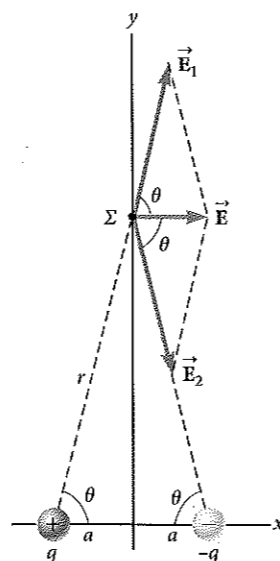
$$(4) \cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

Αντικαταστήστε την Εξίσωση (4) στην (3):

$$E_x = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} = k_e \frac{2aq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

(Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στο ηλεκτρικό δίπολο όταν το σημείο Σ είναι σε απόσταση $y \gg a$ από την αρχή των αξόνων.

Εικόνα Η1.13 (Παράδειγμα Η1.5) Όταν τα φορτία της Εικόνας Η1.12 έχουν ίσες τιμές και ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων, δημιουργούνται συνθήκες συμμετρίας, όπως φαίνεται εδώ.



H1.5 συν.

ΛΥΣΗ

Στη λύση του μέρους (B), επειδή $y \gg a$, θεωρήστε αμελητέα την ποσότητα a^2 σε σχέση με την y^2 και γράψτε την παράσταση για το E ως εξής:

$$(5) E \approx k_e \frac{2aq}{y^3}$$

Ολοκλήρωση Από την Εξίσωση (5), διαπιστώνουμε ότι σε σημεία που βρίσκονται μακριά από το δίπολο, κατά μήκος της διαμέσου της ευθείας που συνδέει τα δύο φορτία, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το δίπολο μεταβάλλεται ανάλογα του $1/r^3$, ενώ το πιο αργά μεταβαλλόμενο, ως προς την απόσταση, πεδίο ενός σημειακού φορτίου μεταβάλλεται ανάλογα του $1/r^2$ (δείτε Εξ. Η1.9). Αυτό συμβαίνει επειδή σε απομακρυσμένα σημεία τα πεδία των δύο φορτίων, τα οποία έχουν την ίδια τιμή και αντίθετο πρόσημο, πρακτικά αλληλοαναιρούνται. Η μεταβολή του E ανάλογα με την ποσότητα $1/r^3$ για την περίπτωση του δίπολου ισχύει και για οποιοδήποτε απομακρυσμένο σημείο του άξονα x , αλλά και για οποιοδήποτε απομακρυσμένο σημείο γενικότερα.

H1.5 Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

Συνήα, οι αποστάσεις μεταξύ των φορτίων μιας ομάδας από φορτία είναι πολύ μικρότερες από την απόσταση μεταξύ αυτής της ομάδας και του σημείου στο οποίο πρέπει να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα φορτίων ως συνεχές. Το σύστημα των φορτίων που βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους ισοδυναμεί με ένα συνολικό φορτίο συνεχώς κατανεμημένο σε μια ευθεία, μια επιφάνεια ή έναν όγκο.

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου, χρησιμοποιούμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά, διαιρούμε την κατανομή φορτίου σε μικρά στοιχεία, καθένα από τα οποία περιέχει ένα μικρό φορτίο Δq (Εικόνα Η1.14). Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση Η1.9 για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα από αυτά τα στοιχεία σε ένα σημείο Σ . Τέλος, υπολογίζουμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κατανομή φορτίου στο Σ , αθροίζοντας τις συνεισφορές όλων των φορτισμένων στοιχείων (δηλαδή, εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης).

Στο σημείο Σ , το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε ένα στοιχείο με φορτίο Δq είναι

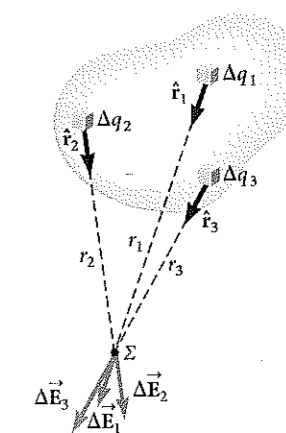
$$\Delta \vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

όπου r η απόσταση από το στοιχείο έως το Σ και \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το στοιχείο προς το Σ . Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο, που οφείλεται σε όλα τα στοιχεία της κατανομής φορτίου, στο σημείο Σ είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται στο i -στό στοιχείο της κατανομής. Επειδή η κατανομή φορτίου έχει μοντελοποιηθεί ως συνεχής, το συνολικό πεδίο στο Σ όταν $\Delta q_i \rightarrow 0$ είναι

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (\text{H1.11})$$



Εικόνα Η1.14 Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου σε ένα σημείο Σ είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων $\Delta \vec{E}_i$ που δημιουργούν όλα τα στοιχεία Δq_i της κατανομής φορτίου. Εδώ φαίνονται τρία στοιχειώδη φορτία.

◀ Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από συνεχή κατανομή φορτίου

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε ολόκληρη την κατανομή φορτίου. Η ολοκλήρωση στην Εξίσωση Η1.11 είναι διανυσματική πράξη, άρα πρέπει να πραγματοποιηθεί με τον ανάλογο τρόπο.

Ας εξηγήσουμε αυτόν τον τύπο υπολογισμού με ορισμένα παραδείγματα, όπου το φορτίο είναι κατανεμημένο σε μια ευθεία, μια επιφάνεια ή έναν όγκο. Σε τέτοιους υπολογισμούς, μας εξυπηρετεί να χρησιμοποιούμε την έννοια της *πυκνότητας φορτίου* με την παρακάτω σημειογραφία:

- Αν ένα φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όγκο V , τότε η **χωρική πυκνότητα φορτίου** ρ ορίζεται από τη σχέση

$$\rho \equiv \frac{Q}{V}$$

όπου το ρ έχει μονάδες C/m^3 .

- Αν ένα φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε επιφάνεια εμβαδού A , τότε η **επιφανειακή πυκνότητα φορτίου** σ ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A}$$

όπου το σ έχει μονάδες C/m^2 .

- Αν ένα φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε μια ευθεία μήκους ℓ , τότε η **γραμμική πυκνότητα φορτίου** λ ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$$

όπου το λ έχει μονάδες C/m .

- Αν το φορτίο δεν είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε έναν όγκο, μια επιφάνεια ή μια ευθεία, τότε οι ποσότητες φορτίου dq σε ένα στοιχειώδες τμήμα του όγκου, της επιφάνειας ή της ευθείας είναι

$$dq = \rho dV \quad dq = \sigma dA \quad dq = \lambda d\ell$$

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Για τη λύση προβλημάτων προσδιορισμού του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν μεμονωμένα φορτία ή μια κατανομή φορτίου, ενδείκνυται η παρακάτω διαδικασία.

- 1. Μοντελοποίηση.** Αναπαραστήστε νοερά το πρόβλημα: αναλογιστείτε με προσοχή τα μεμονωμένα φορτία ή την κατανομή φορτίου και φανταστείτε τι είδους ηλεκτρικό πεδίο θα δημιουργούσαν. Λάβετε υπόψη τη συμμετρία που ενδεχομένως υπάρχει στη διάταξη των φορτίων ώστε να «ολπτικοποιήσετε» ευκολότερα το ηλεκτρικό πεδίο.
- 2. Κατηγοριοποίηση.** Μελετάτε μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων ή μια συνεχή κατανομή φορτίου; Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση θα σας υποδείξει τη διαδικασία ανάλυσης.
- 3. Ανάλυση.**

(α) Αν μελετάτε μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων, χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης: όταν υπάρχουν πολλά σημειακά φορτία, το ολικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου είναι το *διανυσματικό άθροισμα* όλων των επιμέρους πεδίων που δημιουργούν τα μεμονωμένα φορτία (Εξ. Η1.10). Να είστε πολύ προσεκτικοί στη χρήση διανυσματικών ποσοτήτων. Ίσως είναι χρήσιμο να μελετήσετε το Κεφάλαιο Μ3 για την πρόσθεση διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε στο Παράδειγμα Η1.5.

Χωρική πυκνότητα
φορτίου

Επιφανειακή
πυκνότητα φορτίου

Γραμμική πυκνότητα
φορτίου

(β) Αν μελετάτε μια συνεχή κατανομή φορτίου, αντικαταστήστε τα διανυσματικά άθροισματα, που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του ολικού ηλεκτρικού πεδίου από τα επιμέρους φορτία, με διανυσματικά ολοκληρώματα. Η κατανομή φορτίου χωρίζεται σε απειροστά τμήματα και η άθροιση των διανυσμάτων γίνεται με ολοκλήρωση σε ολόκληρο το εύρος της κατανομής (Εξ. Η1.11). Τέτοιου είδους διαδικασίες μπορείτε να δείτε στα Παραδείγματα Η1.6 έως Η1.8.

Είτε έχετε κατανομή σημειακών φορτίων είτε συνεχή κατανομή φορτίου, πρέπει να λαμβάνετε υπόψη τη συμμετρία. Εκμεταλλευτείτε οποιαδήποτε μορφή συμμετρίας του συστήματος, την οποία παρατηρήσατε στο βήμα της μοντελοποίησης, ώστε να απλοποιήσετε τους υπολογισμούς σας. Ένα δείγμα εφαρμογής της συμμετρίας είναι η απαλοιφή των συνιστωσών του πεδίου που είναι κάθετες στον άξονα στο Παράδειγμα Η1.7.

4. Ολοκλήρωση. Ελέγξτε αν η παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στην οποία καταλήξατε συμφωνεί με τη νοητική σας αναπαράσταση και αν αντικατοπτρίζει τη συμμετρία που είχατε εντοπίσει. Μεταβάλλετε νοερά παραμέτρους, όπως η απόσταση του σημείου παρατήρησης από τα φορτία ή η ακτίνα τυχόν κυκλικών σωμάτων, για να εξακριβώσετε αν το μαθηματικό αποτέλεσμα αλλάζει με εύλογο τρόπο.

Παράδειγμα Η1.6

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια φορτισμένη ράβδος

Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο Σ του επιμήκους άξονα της ράβδος, σε απόσταση a από το ένα άκρο της (Εικ. Η1.15).

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Το πεδίο $d\vec{E}$ στο Σ που οφείλεται σε κάθε στοιχειώδες φορτίο της ράβδος έχει κατεύθυνση ίδια με την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x , επειδή κάθε στοιχειώδες τμήμα φέρει θετικό φορτίο.

Κατηγοριοποίηση Επειδή η ράβδος είναι συνεχής, θα υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων. Καθώς κάθε τμήμα της ράβδος παράγει ηλεκτρικό πεδίο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x , μπορούμε να βρούμε το άθροισμα των συνεισφορών τους χωρίς να χρειαστεί να προσθέσουμε διανύσματα.

Ανάλυση Έστω ότι η ράβδος βρίσκεται στον άξονα x , ότι dx είναι το μήκος ενός στοιχειώδους τμήματός της, και ότι dq είναι το φορτίο του τμήματος αυτού. Επειδή η ράβδος φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους λ , το φορτίο dq στο στοιχειώδες τμήμα είναι $dq = \lambda dx$.

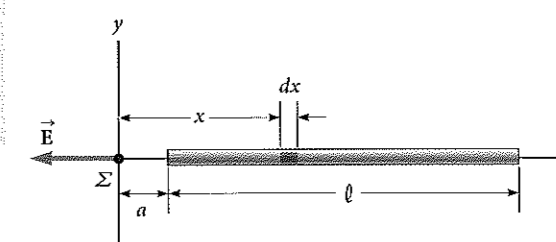
Βρείτε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ένα τμήμα της ράβδος με φορτίο dq στο σημείο Σ :

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda dx}{x^2}$$

Βρείτε το συνολικό πεδίο στο Σ χρησιμοποιώντας⁴ την Εξίσωση Η1.11:

$$E = \int_a^{\ell+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2}$$

συνεχίζεται



Εικόνα Η1.15 (Παράδειγμα Η1.6) Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος, η οποία βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x , στο σημείο Σ .

⁴Για να κάνετε ολοκληρώσεις όπως αυτή, πρέπει πρώτα να εκφράσετε το στοιχειώδες φορτίο dq συναρτήσει των άλλων μεταβλητών του ολοκληρώματος. (Σε αυτό το παράδειγμα, υπάρχει μία μόνο μεταβλητή, η x , οπότε αντικαταστήσαμε $dq = \lambda dx$.) Η ολοκλήρωση πρέπει να γίνεται σε βαθμωτές ποσότητες, επομένως, αν είναι απαραίτητο, εκφράστε το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει των συνιστωσών του. (Στο παράδειγμα αυτό, το πεδίο έχει μόνο μία συνιστώσα, τη x , οπότε η λεπτομέρεια αυτή δεν θα σας απασχολήσει.) Κατόπιν, αναγάγετε την παράσταση σε ένα ολοκλήρωμα με μία μόνο μεταβλητή (ή σε περισσότερα ολοκληρώματα, καθένα με μία επιμέρους μεταβλητή). Σε παραδείγματα με σφαιρική ή κυλινδρική συμμετρία, η μεταβλητή είναι η ακτινική συντεταγμένη.

H1.6 συν.

Παρατηρήσετε ότι οι k_e και $\lambda = Q/\ell$ είναι σταθερές και μπορούν να βγουν εκτός ολοκλήρωσης, και υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$E = k_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{\ell+a}$$

$$(1) \quad E = k_e \frac{Q}{\ell} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell+a} \right) = \frac{k_e Q}{a(\ell+a)}$$

Ολοκλήρωση Αν $a \rightarrow 0$, κάτι που αντιστοιχεί με ολίσθηση της ράβδου προς τα αριστερά ώσπου το αριστερό άκρο της να βρεθεί στην αρχή των αξόνων, τότε $E \rightarrow \infty$. Αυτό αντιπροσωπεύει την κατάσταση στην οποία το σημείο παρατήρησης Σ ταυτίζεται με το φορτίο στο άκρο της ράβδου, οπότε το πεδίο γίνεται άπειρο.

ΚΙ ΑΝ...: Υποθέστε ότι το Σ βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη ράβδο. Ποια είναι η φύση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα τέτοιο σημείο;

Απάντηση Αν το Σ είναι μακριά από τη ράβδο ($a \gg \ell$), τότε το ℓ στον παρονομαστή της Εξίσωσης (1) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο και έτσι $E \approx k_e Q/a^2$. Αυτό είναι ακριβώς ό,τι θα αναμένατε από ένα σημειακό φορτίο. Άρα, για μεγάλες τιμές του a/ℓ , η κατανομή φορτίου μοιάζει με αυτή ενός σημειακού φορτίου με τιμή Q : το σημείο Σ απέχει τόσο πολύ από τη ράβδο ώστε δεν μπορούμε να διακρίνουμε το μέγεθός της. Συχνά, η οριακή προσέγγιση ($a/\ell \rightarrow \infty$) αποτελεί καλή μέθοδο ελέγχου μιας μαθηματικής παράστασης.

Παράδειγμα Η1.7

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου

Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανομημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ο δακτύλιος σε ένα σημείο Σ το οποίο βρίσκεται στον κεντρικό άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου, σε απόσταση x από το κέντρο του (Εικ. Η1.16α).

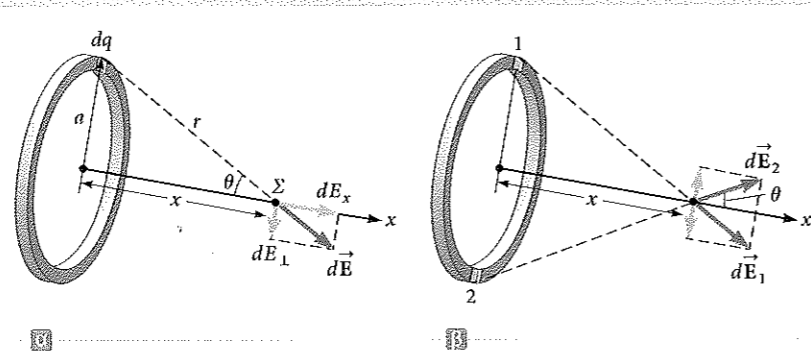
ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Στην Εικόνα Η1.16α φαίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ στο σημείο Σ , το οποίο οφείλεται σε ένα τμήμα φορτίου που βρίσκεται στην κορυφή του δακτυλίου. Αυτό το διάγραμμα του πεδίου μπορεί να αναλυθεί παράλληλα και κάθετα στον άξονα του δακτυλίου στις συνιστώσες dE_x και dE_z αντίστοιχα. Στην Εικόνα Η1.16β φαίνονται οι συνεισφορές στο ηλεκτρικό πεδίο δύο διαμετρικά αντίθετων τμημάτων του δακτυλίου. Λόγω συμμετρίας, οι κάθετες συνιστώσες του πεδίου αλληλοαναιρούνται. Αυτό ισχύει για όλα τα παρόμοια ζεύγη τμημάτων του δακτυλίου, άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τις κάθετες συνιστώσες του πεδίου και να επικεντρωθούμε αποκλειστικά στις παράλληλες συνιστώσες, οι οποίες απλώς προστίθενται.

Κατηγοριοποίηση Επειδή ο δακτύλιος είναι συνεχής, θα υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων.

Ανάλυση Υπολογίστε την παράλληλη συνιστώσα της συνεισφοράς στο ηλεκτρικό πεδίο ενός στοιχειώδους φορτίου dq του δακτυλίου:

$$(1) \quad dE_x = k_e \frac{dq}{r^2} \cos \theta = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2} \cos \theta$$



Εικόνα Η1.16 (Παράδειγμα Η1.7) Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας a . (α) Το πεδίο που δημιουργεί ένα στοιχειώδες φορτίο dq στο σημείο Σ στον άξονα x . (β) Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Σ είναι παράλληλο με τον άξονα x . Η κάθετη συνιστώσα του πεδίου που δημιουργεί το τμήμα 1 στο σημείο Σ αναιρείται από την κάθετη συνιστώσα του τμήματος 2.

H1.7 συν.

Από τη γεωμετρία της Εικόνας Η1.16α, υπολογίστε το $\cos \theta$:

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

Αντικαταστήστε την Εξίσωση (2) στην (1):

$$dE_x = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dq$$

Όλα τα τμήματα του δακτυλίου συνεισφέρουν εξίσου στο πεδίο στο σημείο Σ επειδή ισαπέχουν από αυτό. Ολοκληρώστε για να βρείτε το συνολικό πεδίο στο σημείο Σ :

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dq = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq$$

$$(3) \quad E = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q$$

Ολοκλήρωση Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το πεδίο είναι μηδενικό στο $x = 0$. Αυτό συμφωνεί με τη συμμετρία του προβλήματος; Επίσης, παρατηρήστε ότι η Εξίσωση (3) ανάγεται στην $k_e Q/x^2$ αν $x \gg a$, άρα για θέσεις που βρίσκονται πολύ μακριά από τον δακτύλιο, αυτός συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

ΚΙ ΑΝ...: Υποθέστε ότι στο κέντρο του δακτυλίου της Εικόνας Η1.16 τοποθετείται ένα αρνητικό φορτίο, το οποίο μετατοπίζεται ελαφρώς κατά απόσταση $x \ll a$ κατά μήκος του άξονα x . Όταν το φορτίο αφαιρεθεί ελεύθερο, τι τύπο κίνησης θα πραγματοποιήσει;

Απάντηση Στη σχέση για το πεδίο ενός φορτισμένου δακτυλίου, έστω $x \ll a$, το οποίο δίνει

$$E_x = \frac{k_e Q}{a^3} x$$

Άρα, από την Εξίσωση Η1.8, η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο $-q$ το οποίο βρίσκεται κοντά στο κέντρο του δακτυλίου είναι

$$F_x = -\frac{k_e q Q}{a^3} x$$

Επειδή η δύναμη αυτή υπακούει στον νόμο του Hook (Εξ. Η1.1), η κίνηση του αρνητικού φορτίου είναι απλή αρμονική ταλάντωση!

Παράδειγμα Η1.8

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Δίσκος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο Σ το οποίο βρίσκεται στον κεντρικό άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, σε απόσταση a από το κέντρο του (Εικ. Η1.17).

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Αν θεωρήσουμε τον δίσκο ως ένα σύνολο ομόκεντρων δακτυλίων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος Η1.7 –το οποίο μας δίνει το πεδίο που δημιουργεί δακτύλιος ακτίνας a – και να αθροίσουμε τις συνεισφορές όλων των δακτυλίων που απαρτίζουν τον δίσκο. Λόγω συμμετρίας, η διεύθυνση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα είναι παράλληλη με αυτόν.

Κατηγοριοποίηση Επειδή ο δίσκος είναι συνεχής, θα υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια ομάδα μεμονωμένων φορτίων.

συνεχίζεται

H1.8 συν.

Ανάλυση Βρείτε το φορτίο dq σε έναν δακτύλιο ακτίνας r και πλάτους dr (Εικόνα Η1.17):

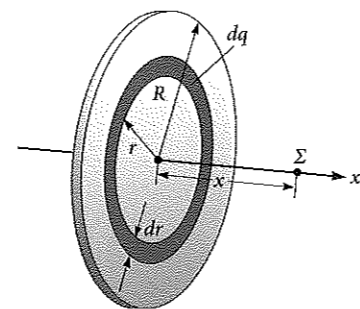
Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα στην εξίσωση που δίνεται για το E_x στο Παράδειγμα Η1.7 (αντικαθιστώντας το a με το r και το Q με το dq) για να βρείτε το πεδίο που δημιουργεί ο δακτύλιος:

Για να υπολογίσετε το συνολικό πεδίο στο σημείο Σ , ολοκληρώστε την παράσταση στις τιμές $r = 0$ έως $r = R$, παρατηρώντας ότι το x εδώ είναι μια σταθερά:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$

$$dE_x = \frac{k_e x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi\sigma r dr)$$

$$\begin{aligned} E_x &= k_e x \pi \sigma \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= k_e x \pi \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-3/2} d(r^2) \\ &= k_e x \pi \sigma \left[\frac{(r^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R = 2\pi k_e \sigma \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$



Εικόνα Η1.17 (Παράδειγμα Η1.8) Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R . Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο Σ του άξονα έχει διεύθυνση παράλληλη με τον κεντρικό άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου.

Ολοκλήρωση Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε $x > 0$. Για να υπολογίσουμε το πεδίο κοντά στον δίσκο παράλληλα στον άξονα, κάνουμε την παραδοχή $R \gg x$, οπότε η παράσταση εντός αγκύλης ανάγεται σε μονάδα και παίρνουμε την προσέγγιση του πεδίου σε μικρή απόσταση

$$E_x = 2\pi k_e \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

όπου ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Στο Κεφάλαιο Η2, θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα για το πεδίο που δημιουργεί ένα επίπεδο άπειρων διαστάσεων με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

H1.6 Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Με την Εξίσωση Η1.7 ορίσαμε το ηλεκτρικό πεδίο με μαθηματικό τρόπο. Ας διερευνήσουμε τώρα έναν τρόπο οπτικής αναπαράστασής του. Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης της μορφής του ηλεκτρικού πεδίου είναι με τη σχεδίαση των **γραμμών ηλεκτρικού πεδίου** που καθιέρωσε ο Faraday, οι οποίες σχετίζονται με το ηλεκτρικό πεδίο μιας περιοχής του χώρου ως εξής:

- Η διεύθυνση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} εφάπτεται στη γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της. Η γραμμή έχει διεύθυνση που επισημαίνεται με ένα βέλος και είναι ίδια με εκείνη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου. Η κατεύθυνση της γραμμής είναι η ίδια με εκείνη της δύναμης που ασκείται σε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο το οποίο βρίσκεται στο πεδίο.
- Το πλήθος των γραμμών που διέρχονται από μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογο της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την περιοχή.

Άρα, οι γραμμές του πεδίου είναι πυκνές όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό και αραιές όπου το πεδίο είναι ασθενές.

Οι παραπάνω ιδιότητες φαίνονται στην Εικόνα Η1.18. Η πυκνότητα των γραμμών του πεδίου που διέρχονται από την επιφάνεια Α είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα των γραμμών του πεδίου που διέρχονται από την επιφάνεια Β. Άρα, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερο στην επιφάνεια Α απ' ό,τι στην Β. Ακόμα, επειδή οι γραμμές σε κάθε θέση δείχνουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις, το πεδίο δεν είναι ομογενές.

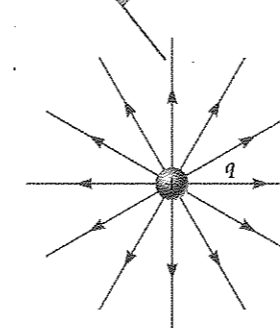
Συμφωνεί η σχέση μεταξύ της έντασης και της πυκνότητας των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου με τη Εξίσωση Η1.9, δηλαδή με την παράσταση που βρήκαμε για το E χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, ας θεωρήσουμε μια υποθετική σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r , με κέντρο ένα σημειακό φορτίο. Από τη συμμετρία προκύπτει ότι η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας. Το πλήθος N των γραμμών που ξεκινούν από το φορτίο είναι ίσο με εκείνο των γραμμών που εισέρχονται στη σφαιρική επιφάνεια. Άρα, το πλήθος των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας στη σφαίρα είναι $N/4\pi r^2$ (όπου $4\pi r^2$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας). Επειδή η ένταση E είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας, συμπεραίνουμε ότι το E μεταβάλλεται ανάλογα του $1/r^2$, κάτι που συμφωνεί με την Εξίσωση Η1.9.

Στην Εικόνα Η1.19α φαίνονται μερικές αντιπροσωπευτικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ένα θετικό σημειακό φορτίο. Αυτό το διδιάστατο σχέδιο δείχνει μόνο τις γραμμές του πεδίου που ανήκουν σε ένα επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σημειακό φορτίο. Στην πραγματικότητα, οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω προς κάθε διεύθυνση· άρα, αντί αυτού του επιπέδου ακτινωτού «τροχού», θα έπρεπε να σχεδιάσουμε μια πλήρη σφαιρική κατανομή γραμμών. Επειδή το θετικό φορτίο-πηγή θα απωθούσε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο που θα τοποθετούσαμε στο πεδίο, οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω. Οι γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ένα αρνητικό σημειακό φορτίο κατευθύνονται ακτινικά προς το φορτίο (Εικ. Η1.19β). Και στις δύο περιπτώσεις, οι γραμμές έχουν ακτινική διεύθυνση και εκτείνονται ως το άπειρο. Σημειώστε ότι οι γραμμές πυκνώνουν όσο πλησιάζουν στο φορτίο, κάτι που υποδηλώνει ότι η ένταση του πεδίου αυξάνει όσο πλησιάζουμε το φορτίο-πηγή.

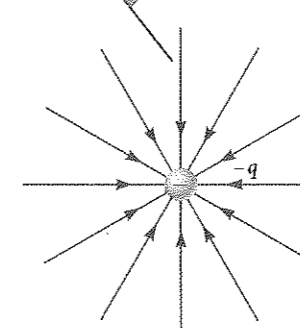
Οι κανόνες σχεδίασης των γραμμών ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι οι εξής:

- Οι γραμμές ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά. Σε περίπτωση πλεονάσματος ενός τύπου φορτίου, κάποιες από αυτές θα ξεκινούν από το άπειρο ή θα καταλήγουν σε αυτό.

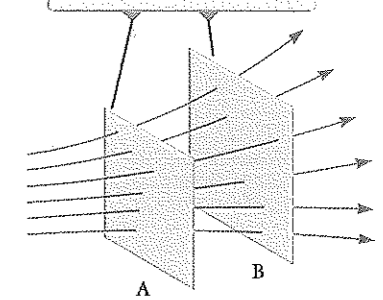
Για θετικό σημειακό φορτίο, οι γραμμές του πεδίου έχουν ακτινική κατεύθυνση μακριά από το φορτίο.



Για αρνητικό σημειακό φορτίο, οι γραμμές του πεδίου έχουν ακτινική κατεύθυνση προς το φορτίο.



Το μέτρο του πεδίου είναι μεγαλύτερο στην επιφάνεια Α απ' ό,τι στην επιφάνεια Β.



Εικόνα Η1.18 Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που διέρχονται από δύο επιφάνειες.

Αποφυγή παγίδων Η1.2

Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι τροχιές σωματιδίων!

Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου απεικονίζουν το πεδίο στα διάφορα σημεία του χώρου. Με εξαίρεση κάποιες πολύ ειδικές περιπτώσεις, οι γραμμές δεν αντιπροσωπεύουν την τροχιά κίνησης φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

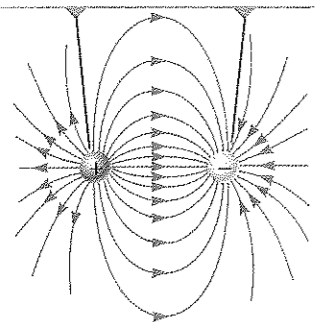
Αποφυγή παγίδων Η1.3

Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι απτές

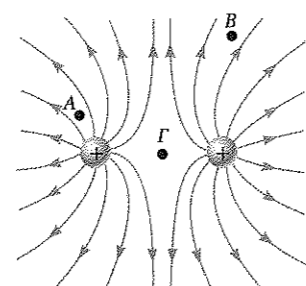
Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δεν έχουν υλική υπόσταση. Αποτελούν μόνο μια εικονική αναπαράσταση που περιγράφει ποιοτικά το ηλεκτρικό πεδίο. Από κάθε φορτίο μπορεί να σχεδιαστεί μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος γραμμών, κάτι που δίνει την αίσθηση ότι το πεδίο είναι κβαντισμένο και υπάρχει μόνο σε ορισμένα τμήματα του χώρου. Στην πραγματικότητα, το πεδίο είναι συνεχές και υπάρχει σε κάθε σημείο του χώρου. Μην αποκομίζετε λανθασμένες εντυπώσεις από το διδιάστατο σχέδιο των γραμμών το οποίο χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια τριδιάστατη κατάσταση.

Εικόνα Η1.19 Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου. Σημειώστε ότι στις εικόνες φαίνονται μόνο οι γραμμές του πεδίου οι οποίες βρίσκονται στο επίπεδο της σελίδας.

Το πλήθος των γραμμών του πεδίου που ξεκινούν από το θετικό φορτίο είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών που καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο.

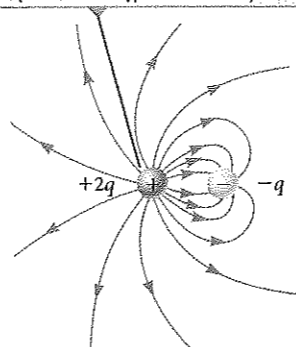


Εικόνα Η1.20 Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δύο σημειακών φορτίων ίσης απόλυτης τιμής και αντίθετου προσήμου (ηλεκτρικό δίπολο).



Εικόνα Η1.21 Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δύο θετικών σημειακών φορτίων. (Στο Σύντομο ερώτημα Η1.5 γίνεται αναφορά στα σημεία Α, Β, και Γ.)

Οι μισές γραμμές που ξεκινούν από το $+2q$ καταλήγουν στο $-q$ και οι άλλες μισές καταλήγουν στο άπειρο.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η1.22

Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από τα σημειακά φορτία $+2q$ και $-q$.

- Το πλήθος των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή καταλήγουν σε ένα αρνητικό είναι ανάλογο της τιμής του φορτίου.
- Οι γραμμές του πεδίου δεν τέμνονται ποτέ.

Επιλέγουμε να συμβολίσουμε το πλήθος των γραμμών του πεδίου που ξεκινούν από οποιοδήποτε σώμα με θετικό φορτίο q_+ με Cq_+ και το πλήθος των γραμμών που καταλήγουν σε οποιοδήποτε σώμα με αρνητικό φορτίο q_- με $C|q_-|$, όπου C μια αυθαίρετη σταθερά αναλογίας. Μόλις όμως επιλέξουμε τη σταθερά C , το πλήθος των γραμμών είναι πλέον σταθερό. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα δύο φορτίων, αν το σώμα 1 έχει φορτίο Q_1 και το σώμα 2 έχει φορτίο Q_2 , τότε ο λόγος των γραμμών του πεδίου που τέμνονται σε κάθε φορτίο είναι $N_2/N_1 = |Q_2/Q_1|$. Στην Εικόνα Η1.20 φαίνονται οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δύο σημειακών φορτίων με ίση τιμή, αλλά αντίθετο πρόσημο (ηλεκτρικό δίπολο). Επειδή τα φορτία έχουν ίση τιμή, το πλήθος των γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο πρέπει να είναι ίσο με το πλήθος εκείνων που καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο. Σε σημεία του χώρου πολύ κοντά στα φορτία, οι γραμμές είναι σχεδόν ακτινικές, όπως και στην περίπτωση ενός μεμονωμένου φορτίου. Η υψηλή πυκνότητα γραμμών μεταξύ των φορτίων είναι ένδειξη περιοχής με ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο.

Στην Εικόνα Η1.21 φαίνονται οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου κοντά σε δύο ίσα θετικά σημειακά φορτία. Και πάλι, οι γραμμές είναι σχεδόν ακτινικές σε σημεία κοντά σε οποιοδήποτε από τα δύο φορτία, ενώ επειδή τα φορτία έχουν ίση τιμή, από κάθε φορτίο ξεκινά το ίδιο πλήθος γραμμών. Επειδή δεν υπάρχουν αρνητικά φορτία, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου εκτείνονται έως το άπειρο. Σε μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία, το πεδίο είναι περίπου ίσο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου με τιμή $2q$.

Στη Δυναμική Εικόνα Η1.22, βλέπουμε ένα σκαρίφημα των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ένα θετικό φορτίο $+2q$ και ένα αρνητικό φορτίο $-q$. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των γραμμών που ξεκινούν από το φορτίο $+2q$ είναι διπλάσιο εκείνου που καταλήγουν στο φορτίο $-q$. Έτσι, μόνο οι μισές από τις γραμμές που ξεκινούν από το θετικό φορτίο καταλήγουν στο αρνητικό. Οι άλλες μισές καταλήγουν σε ένα αρνητικό φορτίο που υποθέτουμε ότι βρίσκεται σε ένα σημείο στο άπειρο. Σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από αυτή των φορτίων, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι ισοδύναμες με εκείνες ενός μεμονωμένου φορτίου $+q$.

Σύντομο ερώτημα Η1.5 Ταξινομήστε σε φθίνουσα σειρά τις τιμές του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία Α, Β, και Γ της Εικόνας Η1.21.

Η1.7 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Όταν ένα σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m βρεθεί σε ένα ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι $q\vec{E}$, όπως προβλέπει η Εξίσωση Η1.8. Αν αυτή είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, τότε είναι και η συνολική δύναμη που δέχεται, οπότε προκαλεί την επιτάχυνσή του σύμφωνα με το τυπικό μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης. Άρα,

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a}$$

και έτσι η επιτάχυνση του σωματιδίου ισούται με

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (\text{Η1.12})$$

Αν το \vec{E} είναι ομογενές (δηλαδή έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση), τότε και η ηλεκτρική δύναμη που δρα στο σωματίδιο είναι σταθερή, οπότε η κίνησή του περιγράφεται από το μοντέλο του σταθερά επιταχυνόμενου σωματιδίου. Αν το σωματίδιο φέρει θετικό φορτίο, η επιτάχυνσή του έχει την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Αν το σωματίδιο φέρει αρνητικό φορτίο, η επιτάχυνσή του έχει κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη του ηλεκτρικού πεδίου.

Αποφυγή παγίδων Η1.4

Απλώς μία ακόμα δύναμη
Οι ηλεκτρικές δυνάμεις και τα πεδία μπορεί να σας φαίνονται αφηρημένες έννοιες. Ωστόσο, η δύναμη \vec{F}_e προκαλεί κίνηση των σωματιδίων σύμφωνα με τα καθιερωμένα μοντέλα δυνάμεων και κίνησης που περιγράφουμε στα Κεφάλαια Μ2 έως Μ6. Αν βασιστείτε σε αυτά τα μοντέλα, θα λύσετε πιο εύκολα τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου.

Παράδειγμα Η1.9 Δύο μοντέλα για ένα επιταχυνόμενο θετικό φορτίο

Ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} έχει διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα x μεταξύ δύο παράλληλων φορτισμένων πλακών που απέχουν μεταξύ τους d (Εικόνα Η1.23). Ένα θετικό σημειακό φορτίο q μάζας m , το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας στο σημείο Α δίπλα στη θετική πλάκα, αφήνεται ελεύθερο και επιταχύνεται μέχρι το σημείο Β δίπλα στην αρνητική πλάκα.

(Α) Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου στο σημείο Β μοντελοποιώντας το ως σωματίδιο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Στο σημείο Α, το θετικό φορτίο δέχεται μια ηλεκτρική δύναμη προς τα δεξιά (Εικόνα Η1.23) επειδή το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

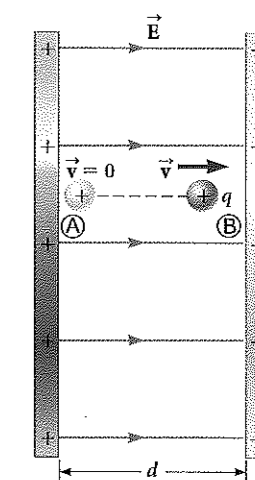
Κατηγοριοποίηση Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, στο φορτίο ασκείται μια σταθερή ηλεκτρική δύναμη. Άρα, όπως προτείνεται και στη διατύπωση του προβλήματος, το σημειακό φορτίο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σταθερά επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο.

Ανάλυση Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.17 (Κεφ. Μ2 Μηχανικής) για να εκφράσετε την ταχύτητα του σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης του:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = 0 + 2a(d - 0) = 2ad$$

Λύστε ως προς v_f και αντικαταστήστε την τιμή της επιτάχυνσης από την Εξίσωση Η1.12:

$$v_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\left(\frac{qE}{m}\right)d} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$



Εικόνα Η1.23 (Παράδειγμα Η1.9) Θετικό σημειακό φορτίο q σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} δέχεται σταθερή επιτάχυνση με κατεύθυνση ίδια με αυτή του πεδίου.

H1.9 συν.

(B) Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου στο σημείο \textcircled{B} μοντελοποιώντας το ως μη απομονωμένο σύστημα.

ΛΥΣΗ

Κατηγοριοποίηση Από τη διατύπωση του προβλήματος προκύπτει ότι το φορτίο αποτελεί ένα ανοιχτό (μη απομονωμένο) σύστημα. Στο φορτίο μεταφέρεται ενέργεια μέσω του έργου της ηλεκτρικής δύναμης η οποία ασκείται σε αυτό. Στην αρχική κατάσταση του συστήματος το σωματίδιο βρίσκεται στο \textcircled{A} , ενώ στην τελική κατάσταση το σωματίδιο είναι στο \textcircled{B} .

Ανάλυση Γράψτε την ανηγμένη μορφή της Εξίσωσης M8.2 διατήρησης της ενέργειας (Κεφ. M8 Μηχανικής) για το σύστημα του φορτισμένου σωματιδίου:

$$W = \Delta K$$

Αντικαταστήστε στο έργο και τις κινητικές ενέργειες τις κατάλληλες τιμές:

$$F_e \Delta x = K_{\textcircled{B}} - K_{\textcircled{A}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2F_e \Delta x}{m}}$$

Αντικαταστήστε την ηλεκτρική δύναμη F_e και τη μετατόπιση Δx :

$$v_f = \sqrt{\frac{2(qE)(d)}{m}} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

Ολοκλήρωση Η απάντηση στο ερώτημα (B) είναι ίδια με εκείνη του ερωτήματος (A), όπως αναμέναμε.

Παράδειγμα Η1.10 Επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο

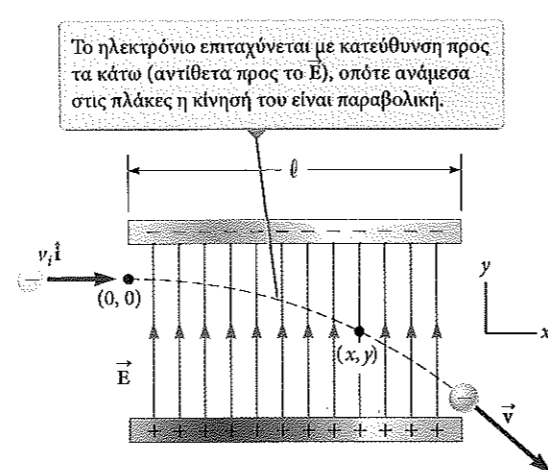
Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (Δυναμική Εικόνα Η1.24) με $v_i = 3.00 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $\ell = 0.100 \text{ m}$.

(A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου ενόσω βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο.

ΛΥΣΗ

Μοντελοποίηση Αυτό το παράδειγμα διαφέρει από το προηγούμενο επειδή η ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου είναι αρχικά κάθετη στις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. (Στο Παράδειγμα Η1.9, η ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου είναι πάντα παράλληλη στις γραμμές του πεδίου.) Έτσι, το ηλεκτρόνιο σε αυτό το παράδειγμα διαγράφει καμπύλη τροχιά (Δυναμική Εικόνα Η1.24).

Κατηγοριοποίηση Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, στο ηλεκτρόνιο ασκείται μια σταθερή ηλεκτρική δύναμη. Για να βρούμε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ Η1.24

(Παράδειγμα Η1.10) Ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται οριζόντια στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν δύο φορτισμένες πλάκες.

H1.10 συν.

Ανάλυση Στη Δυναμική Εικόνα Η1.24, η κατεύθυνση της επιτάχυνσης του ηλεκτρονίου είναι προς τα κάτω, δηλαδή αντίθετη ως προς αυτή των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Συνδυάζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης, που δίνει η Εξίσωση Η1.8, βρείτε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης του ηλεκτρονίου στον άξονα y :

$$\sum F_y = m a_y \rightarrow a_y = \frac{\sum F_y}{m} = -\frac{eE}{m_e}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$a_y = \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(200 \text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = -3.51 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$$

(B) Αν το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε πότε εξέρχεται από αυτό.

ΛΥΣΗ

Κατηγοριοποίηση Εφόσον η ηλεκτρική δύναμη ασκείται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση (Δυναμική Εικόνα Η1.24), μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση του σωματιδίου στην οριζόντια διεύθυνση μοντελοποιώντας το ως ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ανάλυση Λύστε την Εξίσωση M2.7 (Κεφ. M2 Μηχανικής) για τη χρονική στιγμή που το ηλεκτρόνιο φτάνει στη δεξιά ακμή της πλάκας:

$$x_f = x_i + v_x t \rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$t = \frac{\ell - 0}{v_x} = \frac{0.100 \text{ m}}{3.00 \times 10^6 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

(Γ) Αν η κατακόρυφη θέση του ηλεκτρονίου όταν εισέρχεται στο πεδίο είναι $y_i = 0$, ποια είναι η κατακόρυφη θέση του όταν εξέρχεται από αυτό;

ΛΥΣΗ

Κατηγοριοποίηση Εφόσον η ηλεκτρική δύναμη είναι σταθερή (Δυναμική Εικόνα Η1.24), μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση του σωματιδίου στην κατακόρυφη διεύθυνση μοντελοποιώντας το ως σταθερά επιταχυνόμενο σωματίδιο.

Ανάλυση Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.16 (Κεφ. M2 Μηχανικής) για να περιγράψετε τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t :

$$y_f = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$y_f = 0 + 0 + \frac{1}{2} (-3.51 \times 10^{13} \text{ m/s}^2) (3.33 \times 10^{-8} \text{ s})^2 = -0.0195 \text{ m} = -1.95 \text{ cm}$$

Ολοκλήρωση Αν το ηλεκτρόνιο εισέλθει στο πεδίο από ένα σημείο κάτω ακριβώς από την αρνητική πλάκα (Δυναμική Εικόνα Η1.24) και η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι μικρότερη από την τιμή που μόλις υπολογίσατε, το ηλεκτρόνιο θα προσκρούσει στη θετική πλάκα.

Θεωρήσαμε αμελητέα τη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο, κάτι που αποτελεί καλή προσέγγιση στη μελέτη των ατομικών σωματιδίων. Για ηλεκτρικό πεδίο 200 N/C , ο λόγος του μέτρου της ηλεκτρικής δύναμης eE προς το μέτρο της βαρυτικής δύναμης mg είναι της τάξης του 10^{12} για τα ηλεκτρόνια και 10^9 για τα πρωτόνια.