

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**  
**7ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

**1.** Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$  και

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x^2 + a, & x > 0 \end{cases} .$$

- (α) Για ποιες τιμές των  $a, b$  υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;  
(β) Για ποιες τιμές των  $a, b$  είναι η  $f(x)$  συνεχής στο 0;

**2.** Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a \neq 0$  και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^4}{3} + bx + \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ ax^2 + b \cos(bx) + 2b, & x > 0 \end{cases} .$$

- (α) Για ποιες τιμές των  $a, b$  υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;  
(β) Για ποιες τιμές των  $a, b$  είναι η  $f(x)$  συνεχής στο 0;

**3.** Έστω  $f(x)$  μία συνεχής συνάρτηση με  $D_f = [0, 1]$  για την οποία ισχύει ότι

$$0 \leq f(x) \leq 1, \text{ για } x \in [0, 1] \quad (\text{δηλαδή } R_f \subseteq [0, 1]).$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $c \in [0, 1]$  τέτοιο ώστε  $f(c) = c$  (το  $c$  ονομάζεται σταθερό σημείο της  $f(x)$ ).

**4.** Έστω  $a \in \mathbb{R}$  και  $k \in \mathbb{Z}$ . Αποδείξτε ότι

- (α)  $\lim_{x \rightarrow a+2k\pi} \sin x = \lim_{y \rightarrow a} \sin y$ ,  
(β)  $\lim_{x \rightarrow a+2k\pi} \cos x = \lim_{y \rightarrow a} \cos y$ ,  
(γ)  $\lim_{x \rightarrow a+k\pi} \tan x = \lim_{y \rightarrow a} \tan y$ ,  
(δ)  $\lim_{x \rightarrow a+k\pi} \cot x = \lim_{y \rightarrow a} \cot y$ ,  
(ε)  $\lim_{x \rightarrow a+2k\pi} \sec x = \lim_{y \rightarrow a} \sec y$ ,  
(στ)  $\lim_{x \rightarrow a+2k\pi} \csc x = \lim_{y \rightarrow a} \csc y$ .

**5.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

(α)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$ ,

(β)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x$ ,

(γ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin x$ ,

(δ)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \sin x$ ,

(ε)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin x$ ,

(στυ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$ ,

(ζ)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$ ,

(η)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \cos x$ ,

(θ)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \cos x$ ,

(ι)  $\lim_{x \rightarrow -\pi} \cos x$ ,

(ια)  $\lim_{x \rightarrow \frac{13\pi}{2}} \cos x$ .

**6.** Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

(α)  $f(x) = \sin x$ ,

(β)  $f(x) = \cos x$ ,

(γ)  $f(x) = \tan x$ ,

(δ)  $f(x) = \cot x$ ,

(ε)  $f(x) = \sec x$ ,

(στ)  $f(x) = \csc x$ .

**7.** Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της

(α)  $y = \tan x$ ,

(β)  $y = \cot x$ .