ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
3ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

1. Έστω

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x<4 \\ -11, & x=4 \\ x^2, & x>4 \end{cases}.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x-a, & x<0 \\ bx^2+2b, & 0<x\le 1 \\ bx^3, & 1<x \end{cases}.$$

(α) Για ποιες τιμές των a, b υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$;
(β) Για ποιες τιμές των a, b υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$;
(γ) Για ποιες τιμές των a, b υπάρχουν και το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και το $\lim_{x\to 1} f(x)$;

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

(α) $$\lim_{x\to 5^-}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|},$$
(β) $$\lim_{x\to 5^+}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|},$$
(γ) $$\lim_{x\to 5}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|}.$$

4. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+x-12}}.$$

5. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sec x.$$

6. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to \pi} (x-\pi)^3 \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right).$$

7. Έστω $f(x)$ μία περιττή συνάρτηση (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in D_f$) με $D_f = (-a, 0) \cup (0, a)$ και $x_0 \in (-a, a)$. Αποδείξτε ότι

(α) $\displaystyle \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to -x_0^+} f(x) = -L\,,$

(β) $\displaystyle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to -x_0^-} f(x) = -L\,,$

(γ) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0\,,$

(δ) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$

8. Έστω $f(x)$ μία άρτια συνάρτηση (δηλαδή $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in D_f$) με $D_f = (-a, 0) \cup (0, a)$ και $x_0 \in (-a, a)$. Αποδείξτε ότι

(α) $\displaystyle \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to -x_0^+} f(x) = L\,,$

(β) $\displaystyle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to -x_0^-} f(x) = L\,,$

(γ) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = L\,,$

(δ) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = L\,.$