

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
2ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

1. Έστω $f(x), g(x), h(x)$ συναρτήσεις με

$$D_f = D_g = D_h = (-1002, -57) \cup (-57, 11).$$

Αν

$$\lim_{x \rightarrow -57} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -57} g(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -57} h(x) = -3,$$

υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -57} \frac{f(x) - 3g(x)h(x)}{\sqrt[4]{g(x)h(x)} + 7}.$$

2. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση με $D_f = (-2\pi, 31) \cup (31, 54)$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 31} \frac{f(x) - 4}{x - 31} = -12,$$

υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 31} f(x).$$

3. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 - x - 2}.$$

4. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 7}{x^4 - 1}.$$

5. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x^3 + 8}.$$

Υπόδειξη: Αν $p \in \mathbb{N}$ και $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} x^{p+1} - y^{p+1} &= (x - y)(x^p + x^{p-1}y + x^{p-2}y^2 + \dots + x^2y^{p-2} + xy^{p-1} + y^p) \\ &= (x - y) \sum_{i=0}^p x^{p-i}y^i. \end{aligned}$$

6. Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{n_1} - x_0^{n_1}}{x^{n_2} - x_0^{n_2}}.$$

Δείτε την Υπόδειξη στην Άσκηση 5.

7. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}.$$

8. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -7} \tan(x + 7).$$

9. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

10. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση με $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, b)$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

11. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi)^3 \cos\left(\frac{1}{x - \pi}\right).$$