

19/12/2018

23^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Το όριο είναι της μορφής 0^0 .

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\csc x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x \cdot \tan x}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x$$

$$= -1 \cdot 0 = 0$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\sin x}) = 0$$

Ενδεώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

Άσκηση 2: Το όριο είναι της μορφής 1^0 .

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln((e^x + x)^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + x)}{x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(e^x + x))'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^x + x} \cdot (e^x + 1)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{e^0 + 1}{e^0 + 0} = 2$$

Αρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x + x)^{1/x} = 2$$

Ενδεχόμενα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{1/x} = e^2$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(e^x + x)^{1/x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x + x)^{1/x}} = e^2 \right]$$

Πρόταση 3: Το όριο είναι της μορφής 0^0
 Έστω ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x)^{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot \ln(\cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\sec x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital⁰⁰, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\ln(\cos x))'}{(\sec x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{\sec x \cdot \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\tan x}{\sec x \cdot \tan x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = -0 = 0$$

Αρα

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x)^{\cos x} = 0$$

Ενδεχόμενα

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\cos x} = e^0 = 1$$

Άσκηση 4: Το όριο είναι της μορφής ∞ .

Έστω ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\ln x} \cdot \ln(1+2x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+2x} \cdot 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1+2x))^{\frac{1}{2\ln x}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

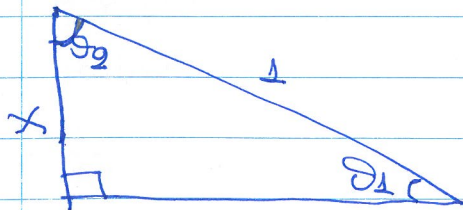
Ενδεώς,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}} = e^{1/2}$$

24 = Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 2: Έστω $0 < x < 1$

Δεσφύμε το ορθόγωνο τρίγωνο του οποίου η υπο-είναιος έχει μήκος 1, και η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος x .



Έστω ότι

$$\sin \theta_1 = x$$

$$\text{και } \cos \theta_2 = x$$

Εφόσον $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ και $\sin \theta_1 = x$, έχω ότι

$$\sin^{-1} x = \theta_1$$

Εφόσον $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ και $\cos \theta_2 = x$ έχω ότι

$$\cos^{-1} x = \theta_2$$

Αρα

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Για οποιοδήποτε $90^\circ + \theta_1 + \theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$

Επομένως

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } 0 < x < 1 \quad (*)$$

• Έστω $-1 < x < 0$

Εξάγουμε $-1 < x < 0$, έχουμε ότι
 $0 < -x < 1$.

Αρα, από την (*),

$$\sin^{-1}(-x) + \cos^{-1}(-x) = \frac{\pi}{2} \quad (++)$$

Προσθέτουμε

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x \quad (+++)$$

και ότι

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x \quad (+++)$$

Αντί της (+), (++), (+++) παίρνουμε ότι
 $(-\sin^{-1}x) + (\pi - \cos^{-1}x) = \frac{\pi}{2}$

Αρα

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } -1 < x < 0. \quad (****)$$

Εν συνεχεία έχουμε

$$\sin^{-1}(-1) + \cos^{-1}(-1) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi = \frac{\pi}{2}, \quad (**)$$

$$\sin^{-1}(0) + \cos^{-1}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (***)$$

$$\sin^{-1}(1) + \cos^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \quad (****)$$

Αντί της (*), (**), (***), (****), (*****) παίρνουμε ότι

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \text{ για } x \in [-1, 1]$$

Aufgabe 3: Erweitern bei
 $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$[\sec^{-1} 2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]$$

$$= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$[\cos^{-1}(-2) = \pi - \cos^{-1} 2]$$

$$= \pi - \sec^{-1} x$$

Aufgabe 4: Wurde bei
 $\sec^2 \vartheta = 1 + \tan^2 \vartheta$

Apa,
$$\sec^2(\tan^{-1}(2x)) = 1 + (\tan(\tan^{-1}(2x)))^2$$
$$= 1 + (2x)^2 \quad [\tan(\tan^{-1} 2) = 2]$$
$$= 1 + 4x^2$$

Endeuvus
$$|\sec^2(\tan^{-1}(2x))| = \sqrt{1+4x^2}$$

kai apa

$$|\sec(\tan^{-1}(2x))| = \sqrt{1+4x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$,
 $\tan^{-1}(2x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

für $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sec \vartheta = \frac{1}{\cos \vartheta} > 0$.

Apa, für $x \in \mathbb{R}$,
 $\sec(\tan^{-1}(2x)) > 0$

Endeuvus, für $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sec(\tan^{-1}(2x))| = \sec(\tan^{-1}(2x))$$

Apa
$$\sec(\tan^{-1}(2x)) = \sqrt{1+4x^2}$$

Αποκρίση: Έστω ~~$x \in (-1, 0] \cup [0, 1]$~~ $x \in [-1, 0] \cup [0, 1]$.

Εκφράζεται

$$\cot(\sin^{-1}x) = \frac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sin(\sin^{-1}x)} = \frac{\cos(\sin^{-1}x)}{x}$$

Οπότε αντιστρέφουμε το $\cos(\sin^{-1}x)$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

και άρα

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta.$$

Αρα,

$$\begin{aligned}\cos^2(\sin^{-1}x) &= 1 - (\sin(\sin^{-1}x))^2 \\ &= 1 - x^2\end{aligned}$$

Επομένως

$$\sqrt{\cos^2(\sin^{-1}x)} = \sqrt{1-x^2}$$

και άρα

$$|\cos(\sin^{-1}x)| = \sqrt{1-x^2}.$$

Για ~~$x \in (-1, 0]$~~ $x \in [-1, 1]$

$$\sin^{-1}x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Για $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta \geq 0$.

Επομένως

$$\cos(\sin^{-1}x) \geq 0, \forall x \in [-1, 1].$$

Αρα,

$$|\cos(\sin^{-1}x)| = \cos(\sin^{-1}x).$$

Επομένως

$$\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Αρα

$$\cot(\sin^{-1}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

25: Φαλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x) \\ &= \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x^2}) + \frac{d}{dx} (\sin^{-1}x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Ενδεώς,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{1 - (-\frac{1}{2})}{\sqrt{1 - (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Για } x = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Άρα η εφαπτομένη έχει κλίση $m = \sqrt{3}$ και διέρχεται από το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ενδεώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\text{ή } y = \sqrt{3}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Άσκηση 2: Έστω $D_f = \mathbb{R}$

Εφόσον $f_1(x) = \tan^{-1}(3x)$ και $f_2(x) = 2x$ είναι συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, η $f(x)$ είναι συναρτημένη στο $\mathbb{R}$.

Έστω

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (\tan^{-1}(3x) - 2x)$$

$$= \frac{d}{dx} (\tan^{-1}(3x)) - 2 \frac{d}{dx} (x)$$

$$= \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 - 2 = \frac{3}{1+9x^2} - 2$$

$$= \frac{3 - 2 - 18x^2}{1+9x^2} = \frac{1-18x^2}{1+9x^2}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Έστω

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-18x^2}{1+9x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-18x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{18}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Άρα η $f(x)$ έχει κριτικές σημεία για $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ και για $x = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Έστω

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-18x^2}{1+9x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-18x^2 > 0 \quad (1+9x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{3\sqrt{2}} < x < \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

(α) Η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3\sqrt{2}}]$ και στο $[\frac{1}{3\sqrt{2}}, \infty)$ και είναι αύξουσα στο $[-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}]$.

(B) Η $f(x)$ έχει π.ε. για $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ και ε.μ. για $x = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Άσκηση 3: Εξάσκηση

$$\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{(\sec^{-1}x)^3 \cdot x \sqrt{x^2-1}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \sec^{-1}x \\ u = \sec^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx \quad \begin{array}{l} x \in [2/\sqrt{3}, 2] \Rightarrow \\ |x| = x \end{array} \\ du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ u(2/\sqrt{3}) = \sec^{-1}(2/\sqrt{3}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2/\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \\ u(2) = \sec^{-1}(2) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\ = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{u^3} = \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{3})^2} - \frac{1}{(\frac{\pi}{6})^2} \right) \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{9}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^2} \right) = \frac{27}{2\pi^2} \end{array} \right]$$

Άσκηση 5: Εξάσκηση

$$\int \frac{(\tan^{-1}(3x))^2 dx}{1+9x^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \tan^{-1}(3x) \\ u = \tan^{-1}(3x) \Rightarrow du = \frac{3}{1+9x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{3} du = \frac{1}{1+9x^2} dx \\ = \frac{1}{3} \int u^2 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{9} (\tan^{-1}(3x))^3 + C \end{array} \right]$$

Ασκηση 6: Εξάσκηση

$$\int \frac{2}{x(1+\ln^2 x)} dx = 2 \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \ln x \\ u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \end{array} \right]$$

$$= 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2 \cdot \tan^{-1} u + C = 2 \cdot \tan^{-1}(\ln x) + C$$

Ασκηση 7: Εξάσκηση

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx = -$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \sin x \\ u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \sin^{-1} u + C = \sin^{-1}(\sin x) + C$$

$$\text{για } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ \sin^{-1}(\sin x) = x.$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx = x + C, \text{ για } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

2ος τρόπος: Εξάσκηση

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx = \int \frac{\cos x}{|\cos x|} dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{|\cos x|} dx$$

$$\left[\text{για } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \cos x > 0 \right]$$

$$\left[\text{Άρα, για } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, |\cos x| = \cos x \right]$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos x} dx = \int dx = x + C$$

$$\text{Επομένως } \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx = x + C, \text{ για } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 8: Exemple de

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Posons } u=2x \\ u=2x \Rightarrow du=2dx \Rightarrow \frac{1}{2}du=dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \sec^{-1}|u| + C = \sec^{-1}|2x| + C$$

2^{es} exémples: Exemple de

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{4(x^2-\frac{1}{4})}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-(\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \sec^{-1} \left| \frac{x}{\frac{1}{2}} \right| \right) + C$$

$$= \sec^{-1}|2x| + C$$

Aufgabe 9: Exemple de

$$\begin{aligned} 3-2t-t^2 &= 3-(t^2+2t) \\ &= 3-(t^2+2 \cdot 1 \cdot t + 1^2 - 1^2) \\ &= 3-((t+1)^2 - 1) \\ &= 4-(t+1)^2 \end{aligned}$$

Exemple de

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{\sqrt{3-2t-t^2}} dt &= \int \frac{6}{\sqrt{4-(t+1)^2}} dt \\ &= 6 \int \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Set } v = t+1 \\ v = t+1 \Rightarrow dv = dt \end{array} \right]$$

$$= 6 \int \frac{dv}{\sqrt{4-v^2}} = 6 \int \frac{dv}{\sqrt{2^2-v^2}} =$$

$$= 6 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{v}{2}\right) + C = 6 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) + C$$

Aufgabe 10 : Exemple de

$$\frac{1}{9x^2+3x+4} = \frac{1}{9\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\right)}$$

$$= \frac{1}{9\left(x^2+2 \cdot \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{4}{9}\right)}$$

$$= \frac{1}{9\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{15}{36}\right)}$$

Aus $\int \frac{dx}{9x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{9\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{15}{36}\right)} =$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{15}{36}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Set } v = x + \frac{1}{6} \\ v = x + \frac{1}{6} \Rightarrow dv = dx \end{array} \right] = \frac{1}{9} \int \frac{dv}{v^2 + \frac{15}{36}} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dv}{v^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{6}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{v}{\frac{\sqrt{15}}{6}}\right) \right) + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{15}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{6 \cdot v}{\sqrt{15}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{15}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{6}\right)\right) + C = \frac{2}{3\sqrt{15}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Ασκηση 11 :

Εξομειότα

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 3 \\ = (x-2)^2 - 1$$

Αρα,

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = x-2 \\ u = x-2 \Rightarrow du = dx \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C \\ = \sec^{-1}|x-2| + C.$$

Ζητείται: Ασκηση 1 | 24^ο φύλλο Ασκήσεων

$$\tan(\sec^{-1}(-\sqrt{2})) = \tan(\sec^{-1}(\sec(\frac{3\pi}{4}))) = \\ = \tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$$

Ασκηση 4 | 25^ο φύλλο Ασκήσεων

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \sin^{-1}x \\ u = \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C =$$

$$= \ln|\sin^{-1}x| + C$$