

7) Η $f(x) = \sin x$ και $g(x) = x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
 Βρίσκουμε στα x στο $(0, \pi/4)$ στα οποία η $y = \sin x$ και
 $g(x) = x$ τέμνονται.

$$\sin x = x \Rightarrow \sin x - x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ και } x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ και } x = 0$$

Επομένως δεν τέμνονται.

Αρα,

$$A = \int_0^{\pi/4} (\sin x - x) dx$$

Αρχικά έχουμε ότι

$$\int (\sin x - x) dx = \int \sin x dx - \int x dx = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C$$

Επομένως,

$$\int_0^{\pi/4} (\sin x - x) dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{2}{1}} \right) - \left(-\cos 0 - 0 \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} + 1$$

$$\text{Αρα, } A = \left| 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} \right| = |1 - 0,707 - 32,045| = |-31,7| = 31,7$$

$$= \frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414}{2} = 0,707, \quad \frac{\pi^2}{32} = \frac{9,87}{9,308} = 32,045$$

10/12/2018

17^ο Φυλλάριο Ασκήσεων

1(b) Έστω $f(x) = x$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και επομένως η $f(x)$ είναι
 ολοκλήρωτη στο $[a, b]$.

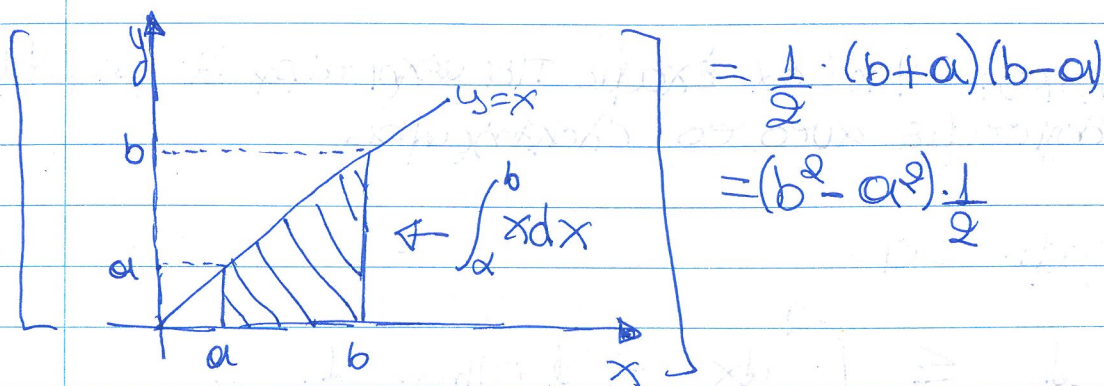
Επομένως έχουμε ότι

$$f(x) = x \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Αρα,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx = \text{το εμβαδόν του τριγώνου μεταξύ της}$$

$$y = x \text{ και του άξονα } x \text{ από } x = a \text{ έως } x = b$$



Παρατήρηση: Χρησιμοποιώντας το θ.θ. Α.Λ.Σ παίρνουμε

$$\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

2) (β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$

Άρα η $f(x)$ είναι ολοκλήρωτη στο $[-3, 0]$.

Ενδεύμε

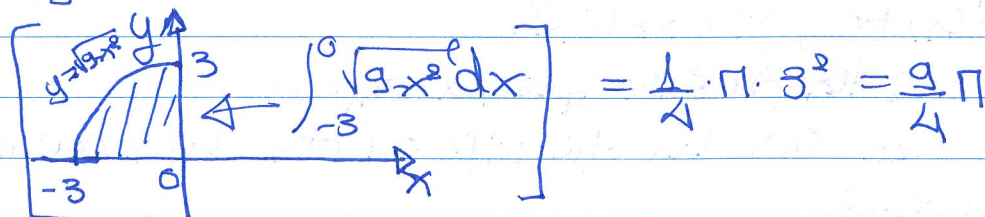
$$\alpha\omega(f) = \frac{1}{0 - (-3)} \int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx$$

Παρατ. : Με δοσα ξέρουμε μέχρι τώρα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx$

Εφόσον $f(x) = \sqrt{9-x^2} \geq 0$ για $x \in [-3, 0]$,

παίρνουμε

$\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx$ = το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y = \sqrt{9-x^2}$ και του άξονα x από $x = -3$ έως $x = 0$.



Άρα,

$$\alpha\omega(f) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \pi = \frac{3}{4} \pi$$

5) Παρατήρηση: Ανοδοά έχουμε πάλι μέχρι τώρα αν μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως το άκρο της.

Γνωρίζουμε ότι

$$(2-0) \min_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq (2-0) \max_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2}$$

δηλ.

$$2 \min_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq 2 \max_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2}$$

Θα βρούμε το ο.ε. και το ο.κ. της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο $[0,2]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.α. στο $[0,2]$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,2)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα,

$$f'(x) \neq 0, \text{ για } x \in (0,2).$$

Επομένως η $f(x)$ δεν έχει κριτικά σημεία.

Άρα, τα ο.α. της $f(x)$ επηρεάζονται από άκρα του π.ο. της $x=0$ και $x=2$.

Έχουμε ότι

$$f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \text{ και ότι}$$

$$f(2) = \frac{1}{5}$$

✓
Άρα,

$$\min_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad \max_{x \in [0,2]} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Από όλα αυτά έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$2 \cdot \frac{1}{5} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq 2 \cdot 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{2}{5} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq 2.$$

6) Παράτ. το $\int_a^b \frac{dx}{3x-x^2}$ δεν μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τους δοσ. έχουμε πλε. μέχρι εδώ.

Έστω

$$f(x) = \frac{1}{3x-x^2}.$$

Έχουμε ότι

$$3x-x^2=0 \Leftrightarrow x(3-x)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=0.$$

Επομένως $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο D_f .

Άρα, το $\int_a^b f(x) dx$ ορίζεται για $a < b < 0$ ή για $0 < a < b < 3$ ή $3 < a < b$

Έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{3x-x^2} \quad f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3x-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-x^2 > 0 \Leftrightarrow x(3-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \text{ και } 3-x > 0 \\ \text{ή } x < 0 \text{ και } 3-x < 0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \text{ και } 3 > x \\ x < 0 \text{ και } 3 < x \end{array} \right] \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Έστω $a < b < 0$

τότε $f(x) < 0$, για $x \in [a, b]$.

και επομένως $\int_a^b f(x) dx < 0$

Όμοια αν $3 < a < b$ τότε $\int_a^b f(x) dx < 0$

Αν $0 < a < b < 3$, τότε
 $f(x) > 0$, για $x \in [a, b]$,
 και ενδεύως $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Έστω $0 < a' < a < b < b' < 3$

τότε

$$\int_{a'}^b f(x) dx = \underbrace{\int_{a'}^a f(x) dx}_0 + \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_V + \underbrace{\int_b^{b'} f(x) dx}_0 > \int_a^b f(x) dx$$

Άρα, η τιμή του $\int_a^b f(x) dx$

αυξάνει αν $a \rightarrow 0^+$ και $b \rightarrow 3^-$.

Δεν γνωρίζω αν έχει μέγιστη τιμή.

Παράρτημα: το $\int_0^3 \frac{dx}{3x-x^2}$ δεν ορίζεται.

Ολοκληρώματα αυτής της μορφής απομάκρυνται γενικευμένα ολοκληρώματα.

28ο Φυλλάδιο Ασκήσεων.

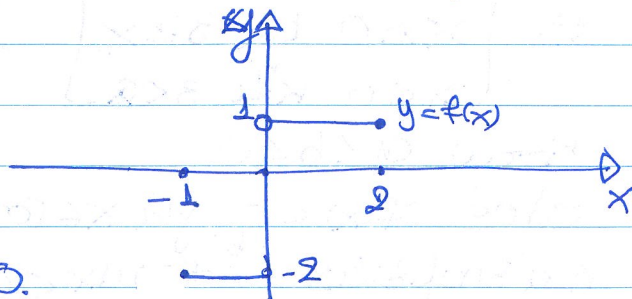
- 1) Επρόκειτο η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, από το Θ.Μ.Τ. για ορισμένα ολοκληρώματα, υπάρχει $c \in [a, b]$ τ.ω.

$$f(c) = \text{av}(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει αν η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Για παράδειγμα, έστω

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$



Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 -2 dx + \int_0^2 1 dx =$$

$$(-2) + 2 = 0$$

Παραμένει $f(x) \neq 0$ για $x \in [-1, 2]$.

- 2) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων, των κανόνων αλγορίθμης παραγωγής και το θ.θ.Α.Α.Δ.

Παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(- \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2} \right) = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

$$= - \frac{d}{du} \left(\int_0^u \frac{dt}{1+t^2} \right) \Big|_{u=\tan x} \cdot \frac{d}{dx} (\tan x) \left[\begin{array}{l} \text{κανόνες αλγορίθμης} \\ \text{παραγ.} \end{array} \right]$$

$$= - \frac{d}{du} \left(\int_0^u \frac{dt}{1+t^2} \right) \Big|_{u=\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$= - \frac{1}{1+u^2} \Big|_{u=\tan x} \cdot \sec^2 x = - \frac{1}{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x$$

$$= - \frac{1}{\sec^2 x} \cdot \sec^2 x = -1. \quad [\theta.\theta.A.A.\Delta]$$

Παράδειγμα: Εξίσωση

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2} \right) = -1$$

δηλαδή ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \frac{d}{dx} (-x)$$

Άρα υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ π.ω.

$$\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2} = -x + C.$$

3) Έξοφλε δ-α

$$\int_0^x f(t) dt = x \cdot \cos(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = \frac{d}{dx} (x \cdot \cos(\pi x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx} (x \cdot \cos(\pi x)) \quad [\text{Θ.Θ.Α.Α.Ι.}]$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x\pi) + x(-\sin(x\pi) \cdot \pi)$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x\pi) - \pi x \sin(x\pi)$$

4) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας παραγώγισης και το Θ.Θ.Α.Α.Ι. παίρνουμε ότι

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(3 + \int_1^{x^2} \sec(1-t) dt \right)$$

$$= \frac{d}{dx} (3) + \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \sec(1-t) dt \right)$$

$$= 0 + \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \sec(1-t) dt \right)$$

$$= \frac{d}{dv} \left(\int_1^v \sec(1-t) dt \right) \bigg|_{v=x^2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2) \quad [\text{Κανόνα αλυσ. παραγ.}]$$

$$= \frac{d}{dv} \left(\int_1^v \sec(1-t) dt \right) \bigg|_{v=x^2} \cdot 2x$$

$$= \sec(1-x^2) \cdot 2x = 2 \sec(1-x^2) x$$

$$\text{Άρα, } g'(1) = 2 \cdot \sec(1-1^2) \cdot 1$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

Επίσης έχουμε ότι

$$g(1) = 3 + \int_1^{1^2} \sec(1-t) dt =$$

$$= 3 + \int_1^1 \sec(1-t) dt = 3 + 0 = 3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $y=g(x)$ στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x=1$, είναι

$$y-3 = 2(x-1)$$

$$\text{ή } y = 2x + 1.$$

5) Παρατήρηση: Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int \frac{dx}{x}.$$

Από όλα έχουμε πεί μέχρι εδώ δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int \frac{dx}{x}$.

Οπότε να βρούμε μια ανεξάρτητη της $\frac{1}{x}$.

Έστω

$$F(x) = \int_4^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$

Τότε, από το Θ.Θ.Α.Λ.1, παίρνουμε ότι

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_4^x \frac{dt}{t} \right) = \frac{1}{x}.$$

Ενδεώς

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx}, \quad \text{για } x > 0.$$

Άρα, υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ ε.ω.

$$y = F(x) + C, \quad x > 0$$

Εφόσον $y(4) = 1$,

$$F(4) + C = 1$$

Έχουμε ότι

$$F(4) + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_4^4 \frac{dt}{t} + C = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Ενδεχώς,
 $y = \int_4^x \frac{dt}{t} + 1.$

6) Εξάγετε ότι

$$\text{av}(f) = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} |\cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left([\sin x]_0^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((1 - 0) - (0 - 1) \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Av } x \in [0, \pi/2] \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x \geq 0 \\ \Rightarrow |\cos x| = \cos x \\ \text{Av } x \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x \leq 0 \\ \Rightarrow |\cos x| = -\cos x \end{array} \right]$$

[2.8.4.1.2]

11/12/2018

19ο Φυσικό Αποφασιστικό

1) Εξάγετε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (1 - \sin x)^{3/2} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = 1 - \sin x \\ u = 1 - \sin x \Rightarrow du = -\cos x \cdot dx \Rightarrow -du = \cos x dx \\ u(0) = 1 - \sin 0 = 1, \quad u(\pi/2) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right]$$

$$= - \int_0^1 u^{3/2} du = \int_0^1 u^{3/2} du = \left[\frac{u^{5/2}}{5/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5} \cdot (1^{5/2} - 0^{5/2}) = \frac{2}{5}$$

2^{ος} ερώτημα: Υπολογίστε το άθροισμα αόκων/ερωτήσεων

$$\int \cos x \cdot (1 - \sin x)^{3/2} dx$$

Εξάμετροι

$$\int \cos(1 - \sin x)^{3/2} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = 1 - \sin x \\ u = 1 - \sin x \Rightarrow du = -\cos x dx \Rightarrow -du = \cos x dx \end{array} \right]$$

$$= - \int u^{3/2} du = - \frac{u^{5/2}}{5/2} + C = - \frac{2}{5} u^{5/2} + C$$

$$= - \frac{2}{5} (1 - \sin x)^{5/2} + C$$

Αρα, από 8.0.Α.1.2, $\int_0^{\pi/2} \cos x (1 - \sin x)^{3/2} dx = \left[- \frac{2}{5} (1 - \sin x)^{5/2} \right]_0^{\pi/2}$

$$- \frac{2}{5} \cdot ((1 - \sin(\pi/2)) - (1 - \sin 0)) = \frac{2}{5}$$

2) 1^{ος} ερώτημα: Εξάμετροι

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \tan x \\ u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx \\ u(0) = \tan 0 = 0 \\ u(\pi/4) = \tan \pi/4 = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

H/W 2^{ος} ερώτης: Υπολογίστε άμεσα ορισκήματα χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με τον 1^ο ερώτη.

Λύση: Εφαρμογή

$$\int \tan x \sec^2 x dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$$

Εφαρμογή στο 2^ο Α.Α.2

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\tan^2(\pi/4)}{2} - \frac{\tan^2 0}{2} = \frac{1}{2}$$

3^{ος} ερώτης: Εφαρμογή

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \tan x \sec x \sec x dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } W = \sec x \\ W = \sec x \Rightarrow dW = \tan x \sec x dx \\ W(0) = \sec(0) = 1 \\ W(\pi/4) = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} W dW = \left[\frac{W^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

H/W 4^{ος} ερώτης: Υπολογίστε άμεσα ορισκήματα χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με τον 3^ο ερώτη.

Λύση: Εφαρμογή

$$\int \tan x \sec^2 x dx = \int \tan x \sec x \sec x dx = \int W dW = \frac{W^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } W = \sec x \\ W = \sec x \Rightarrow dW = \tan x \sec x dx \end{array} \right]$$

Εφαρμογή

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \left[\frac{\sec^2 x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5^{ος} ερώτησ: Υπολόγισε το αόριστο ολοκλήρωμα.

$$\int \tan x \sec^2 x dx$$

Εξάγε δει

$$\begin{aligned} \int \tan x \sec^2 x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \text{Θέτω } z &= \cos x \\ z = \cos x &\Rightarrow dz = -\sin x dx \Rightarrow -dz = \sin x dx \end{aligned} \right]$$

$$= - \int \frac{dz}{z^3} = - \int z^{-3} dz = - \frac{z^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{1}{2z^2} + C = \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$$

Από το δ.δ.Α.Α.2.,

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \left[\frac{1}{2 \cos^2 x} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2 \cos^2(\pi/4)} - \frac{1}{2 \cos^2 0} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

H/W

6^{ος} ερώτησ: Υπολόγισε το ορισμένο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση του χρησιμοποιήσας σε 5^{ος} ερώτ.

$$\text{Εξάγε δει } \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\left[\begin{aligned} \text{Θέτω } z &= \cos x \\ z = \cos x &\Rightarrow dz = -\sin x dx \Rightarrow -dz = \sin x dx \\ z(0) &= \cos 0 = 1, \quad z(\pi/4) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right] = - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dz}{z^3} =$$

$$= \left[\frac{z^{-2}}{-2} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

3) 1^{ος} ερώτος: Έξοδος βγ

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sec \theta}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos \theta}}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin \theta \cdot \sqrt{\cos \theta}}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = \cos \theta \\ y = \cos \theta \Rightarrow dy = -\sin \theta d\theta \Rightarrow -dy = \sin \theta d\theta \\ y(0) = \cos 0 = 1 \\ y(\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \int_1^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^1 y^{-1/2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{y^{1/2}}{1/2} \right]_{1/2}^1 = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} \left[y^{1/2} \right]_{1/2}^1 = \sqrt{2} \left(1^{1/2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} - 1$$

2^{ος} ερώτος: Υπολογίστε το άθροισμα ορισμένων χαρακτηριστικών ενδιάμεσων με τον 1^ο ερώτο.

3^{ος} ερώτος: Έξοδος βγ

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sec \theta}} d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } w = \sec \theta \\ w = \sec \theta \Rightarrow dw = \tan \theta \cdot \sec \theta \cdot d\theta \Rightarrow \frac{1}{\sec \theta} dw = \tan \theta \cdot d\theta \\ \Rightarrow \frac{1}{w} dw = \tan \theta \cdot d\theta \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} W(0) = \sec 0 = 1 \\ W(1/3) = \sec(1/3) = 2 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{w}} \cdot \frac{1}{w} \cdot dw = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 w^{-3/2} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{W^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^2 = -\sqrt{2} \left(2^{-1/2} - 1^{-1/2} \right) = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1$$

Σημείωση: Θα μπορούσα να γράψω

$$\int_0^{1/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2} \sec \theta} \cdot d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1/3} \frac{\tan \theta \cdot \sec \theta}{\sqrt{\sec \theta} \cdot \sec \theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1/3} \frac{\tan \theta \cdot \sec \theta}{(\sec \theta)^{3/2}} d\theta$$

και να δέσω $u = \sec \theta$.

1^{ος} ερώτης: Υπολογίσαμε το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που χρησιμοποιήσαμε στον 3^ο τρόπο.

2^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Η $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Βρίσκει τα x στο $(0, 2)$ στα οποία η $y = f(x)$ τέμνει τον άξονα x , δηλ. $f(x) = 0$.

Εκπαιδευ

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ή } x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα, η $y = x^3 + x^2 - x - 1$ τέμνει τον άξονα x στο $(0, 2)$ για $x = 1$.
Επομένως,

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - x - 1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 + x^2 - x - 1) dx \right| \\
 &= \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \right| = \\
 &= \left| \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left(\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} - 0 \right) \right| + \left| \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 1 \right) \right| \\
 &= \left| -\frac{11}{12} \right| + \left| \frac{55}{12} \right| = \frac{11}{12} + \frac{55}{12} = \frac{66}{12} = \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

2) Η $f(x) = x^{1/3} - x$ είναι συνεχής στο $[1/8, 8]$.

Βρίσκω τα x στο $(1/8, 8)$ στα οποία η $y = x^{1/3} - x$ τέμνει τον άξονα x .

Εξάγεω ότι

$$\begin{aligned}
 x^{1/3} - x &= 0 \Leftrightarrow x^{1/3}(1 - x^{2/3}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^{1/3} = 0 \text{ ή } 1 - x^{2/3} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^{2/3} = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1
 \end{aligned}$$

Άρα η $y = x^{1/3} - x$ τέμνει τον άξονα x στο $(1/8, 8)$ για $x = 1$.

Επομένως

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{1/8}^1 (x^{1/3} - x) dx \right| + \left| \int_1^8 (x^{1/3} - x) dx \right| \\
 &= \left| \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^2}{2} \right]_{1/8}^1 \right| + \left| \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^8 \right| \\
 &= \left| \frac{3}{4} [x^{4/3}]_{1/8}^1 - \frac{1}{2} [x^2]_{1/8}^1 \right| + \left| \frac{3}{4} [x^{4/3}]_1^8 - \frac{1}{2} [x^2]_1^8 \right| \\
 &= \left| \frac{3}{4} \left(1^{4/3} - \left(\frac{1}{8} \right)^{4/3} \right) - \frac{1}{2} \left(1^2 - \left(\frac{1}{8} \right)^2 \right) \right| + \left| \frac{3}{4} (8^{4/3} - 1^{4/3}) - \frac{1}{2} (8^2 - 1^2) \right| =
 \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{3}{4} \left(\frac{1-1}{16} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1-1}{64} \right) \right| + \left| \frac{3}{4} \left(\frac{16-1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{64-1}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{27}{128} \right| + \left| \frac{-81}{4} \right| = \frac{27}{128} + \frac{81}{4} = \frac{2619}{128}$$

$$\left[\left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{4}{3}}} \right]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

3) Οι $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ και $g(x) = x^2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
Βρίσκουμε τα x στα οποία οι $y = x^4 - 4x^2 + 4$ και $y = x^2$
τέμνονται.

Έχουμε ότι

$$x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Άρα οι καμπύλες τέμνονται για $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$.

Επομένως,

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} ((x^4 - 4x^2 + 4) - x^2) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 ((x^4 - 4x^2 + 4) - x^2) dx \right| + \left| \int_1^2 ((x^4 - 4x^2 + 4) - x^2) dx \right|$$

Σημείωση: Αντί για $(x^4 - 4x^2 + 4) - x^2$ θα μπορούσα να πάρω
 $x^2 - (x^4 - 4x^2 + 4)$.

H/W $\rightarrow$ Ασκ: Ολοκληρώσε τον υπολογισμό του εμβαδού

4) Οι $f(x) = \sin(2x)$ και $g(x) = 2\sin x$ είναι συνεχείς στο $[0, \pi]$.

Βρίσκουμε τα x στο $(0, \pi)$ στα οποία οι $y = \sin(2x)$ και $y = 2\sin x$
τέμνονται.

Έχουμε ότι

$$\sin(2x) = 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = 1 \quad [\sin x \neq 0, \text{ για } x \in (0, \pi)]$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Άρα οι $y = \sin(2x)$ και $y = 2\sin x$ δεν τέμνονται στο $(0, \pi)$.

Επομένως

$$A = \left| \int_0^{\pi} (\sin(2x) - 2\sin x) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \sin(2x) dx - 2 \int_0^{\pi} \sin x dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} - 2 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2} (\cos(2\pi) - \cos(0 \cdot 2)) + 2 (\cos \pi - \cos 0) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2} (1 - 1) + 2 (-1 - 1) \right| = \left| -4 \right| = 4$$

Σημείωση: Άρα για $\sin(2x) - 2\sin x$ στο οριστήριο να μπορούμε να πάρω $2\sin x - \sin(2x)$.

5) Δίδω το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = -x + 2 \text{ και } y = 4 - x^2 \text{ από } x = -2 \text{ έως } x = 3.$$

Οι $f(x) = -x + 2$ και $g(x) = 4 - x^2$ είναι συνεχείς στο $[-2, 3]$

Βρίσκουμε τα x στο $(-2, 3)$ ^{για τα} ~~οποία~~ ^{οποία} οι $y = -x + 2$ και $y = 4 - x^2$ τέμνονται.

Έχουμε ότι

$$-x + 2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

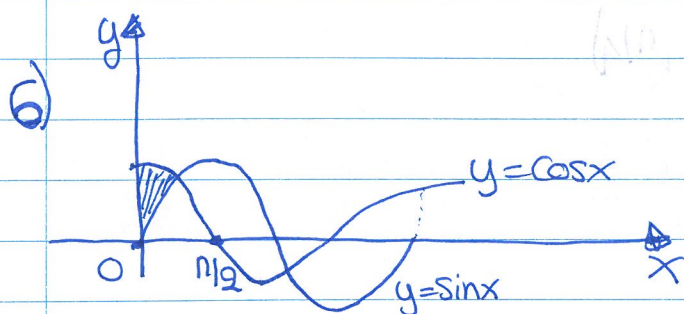
Άρα η $y = -x + 2$ και $y = 4 - x^2$ τέμνονται στο $(-2, 3)$ για $x = 2$ και $x = -1$.

Επομένως $A = \left| \int_{-2}^{-1} ((-x+2) - (4-x^2)) dx \right| + \left| \int_{-1}^2 ((-x+2) - (4-x^2)) dx \right| +$

$$\left| \int_2^3 ((-x+2) - (4-x^2)) dx \right|.$$

Σημείωση: Αντί για $(-x+2)-(4-x^2)$ θα μπορούσα να πάρω $(4-x^2)-(-x+2)$.

H/W → Ασκή: Ολοκληρώστε τον υπολογισμό του εμβαδού.



Ο. $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \cos x$
είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$

Βρίσκουμε τα x στο $(0, \pi/2)$ στα οποία η $y = \sin x$ και $y = \cos x$ τέμνονται.

Έχουμε ότι

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$[x \in (0, \pi/2) \Rightarrow \cos x \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Αρα,

$$A = \left| \int_0^{\pi/4} (\sin x - \cos x) dx \right| = \left| \int_0^{\pi/4} \sin x dx - \int_0^{\pi/4} \cos x dx \right|$$

$$= \left| [-\cos x]_0^{\pi/4} - [\sin x]_0^{\pi/4} \right| =$$

$$= \left| -(\cos \pi/4 - \cos 0) - (\sin \pi/4 - \sin 0) \right|$$

$$= \left| -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) \right| = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

Σημείωση: Αντί για $\sin x - \cos x$ στο ολοκληρωτικό θα μπορούσα να πάρω $\cos x - \sin x$

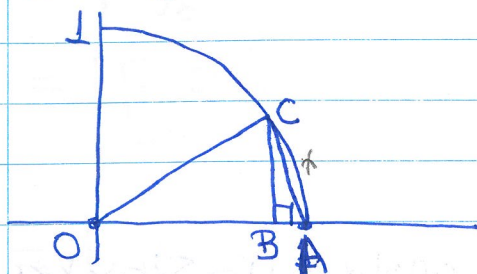
7) Οι $f(x)=x$ και $g(x)=\sin x$ είναι συνεχείς στο $[0, \pi/4]$.

Δεν μπορούμε να αποδείξουμε την εξίσωση $x=\sin x$.

Θ.δ.ο.

$$x \geq \sin x, \text{ για } x \in (0, \pi/4)$$

1ος τρόπος:



Εφαπτεται ότι

$$BC \leq AC \leq \widehat{AC}$$

Άρα

$$\sin x \leq x$$

2ος τρόπος: Προσέγγιση

$$x \geq \sin x \Leftrightarrow x - \sin x \geq 0$$

Έστω $h(x) = x - \sin x, x \in [0, \pi/4]$.

Θ.δ.ο.

$$h(x) \geq 0, \text{ για } x \in [0, \pi/4]$$

Εφαπτεται ότι

$$h(0) = 0 - \sin 0 = 0.$$

Άρα για Ν.δ.ο. $h(x) \geq 0, \text{ για } x \in [0, \pi/4]$

αρκεί ν.δ.ο. η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[0, \pi/4]$.

Εφαπτεται ότι

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x - \sin x) = 1 - \cos x \geq 0, \text{ για } x \in (0, \pi/4).$$

Άρα η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[0, \pi/4]$.

Επομένως

$$x \geq \sin x, x \in [0, \pi/4].$$

Εφόσον

$$x \geq \sin x, \text{ για } x \in [0, \pi/4],$$

Εφαπτεται

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/4} (x - \sin x) dx = \int_0^{\pi/4} x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/4} - \left[-\cos x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - 0^2 \right) + \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{32} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{\pi^2 + 16\sqrt{2} - 32}{32}
 \end{aligned}$$

the end.

Σημειώσεις 13/12/18 σε φύλλα

14/12/2018

② ΕΙΔΕΙΕΣ ΣΥΜΠΡΟΣΕΩΣ

- Ναρκηψιος Αντιστροφης συνδεσης

Προσδιορισμός 1: Έστω f για μία συνάρτηση η οποία είναι 1-1 στο δίκτο-σημα I .

Αν η f είναι ναρκηψιος στο I και $f'(x) \neq 0$ για $x \in I$, τότε η $f^{-1}(x)$ είναι ναρκηψιος στο $f(I)$.

Συνεπώς θα

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(x_0)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=z_0} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{-1}(z_0)}}$$

$$f'(\tilde{f}(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f'(\tilde{z}_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}$$

- Η αντιστροφή της $\ln x$

Η $\ln x$ είναι αύξουσα και άρα είναι 1-1.

Το π.ο. της $\ln x$ είναι το $(0, \infty)$ και η εικόνα της είναι το $\mathbb{R}$. Επομένως υπάρχει η αντιστροφή της $\ln x$, $\ln^{-1} x$, με π.ο. το $\mathbb{R}$ και εικόνα το $(0, \infty)$.

