

7) Θέλω να βρω το ο.μ. της $h(t) = -33t^2 + 198t + 140$ στο $[0, \infty)$ και το t για το οποίο επιτυγχάνεται το ο.μ. { Μάθημα
αίτιο
Μαρέτ

Έχουμε ότι

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(-33t^2 + 198t + 140) = -66t + 198$$

Η $h'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0, \infty)$

Έχουμε ότι

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -66t + 198 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Άρα, η $h'(t)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $t = 3$

Έχουμε ότι

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow -66t + 198 > 0 \Leftrightarrow -66t > -198 \Leftrightarrow t < 3$$

Επομένως η $h(t)$ είναι αύξουσα στο $[0, 3]$ και φθίνουσα στο $[3, \infty)$

Η $h(t)$ έχει π.ε. για $t = 0$ και ε.μ. για $t = 3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-33t^2 + 198t + 140) = -\infty. \quad \text{οχι ο.ε.}$$

Άρα η $h(t)$ έχει ο.μ. $h(3)$ για $t = 3$.

Επομένως το μέγιστο ύψος του σώματος είναι $h(3) = 437\text{m}$ την χρονική στιγμή $t = 3\text{ sec}$.



20/11/2018

14ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Σημ.: Εναλλακτικά θα μπορούσα να δω ότι το όριο

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2 \cdot 1 - 2}{2 \cdot 1} = 0$$

$$3) \text{ Το όριο είναι της μορφής } \frac{0}{0}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(3x))'}{(\tan(5x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos(3x)}{5\sec^2(5x)} \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x)}{\sec^2(5x)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\cos(0)}{\sec^2(0)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$4) \text{ Το όριο είναι της μορφής } \frac{\infty}{\infty}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^4+x^2+4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)'}{(x^4+x^2+4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4x^3+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4x^3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$5) \text{ Το όριο είναι της μορφής } -\frac{\infty}{\infty}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x-7}{-3x^3+2x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^3+x-7)'}{(-3x^3+2x^2-9)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2+1}{-9x^2+4x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2+1}{-9x^2+4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6x^2+1)'}{(-9x^2+4x)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x}{-18x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.

Οπότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x}{-18x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(12x)'}{(-18x+4)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{-18} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x-7}{-3x^3+2x^2-9} = -\frac{2}{3}$$

6) α) Το όριο είναι της μορφής $0 \cdot \infty$.

Εφαπεί οτι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cos x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cos x} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cos x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\frac{1}{2} - x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \csc x = 1$$

(ως έμαθα)

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \tan x = 1$$

2^{ος} τρόπος: Το όριο είναι της μορφής $0 \cdot \infty$.

Εφαπεί οτι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cot x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\frac{1}{2} - x)'}{(\cot x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

* Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \tan x = 1$

7) Το όριο είναι της μορφής $\infty - \infty$.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1/2} - x}{x^{3/2}}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1/2} - x}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^{1/2} - x)'}{(x^{3/2})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2} - 1}{\frac{3}{2}x^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2\sqrt{x}}{3x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2\sqrt{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \infty = \infty$$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \infty$

Σημ: Θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

Παλ: Υπολογίζε το όριο χωρίς κανόνα L'Hopital.

8) (α) Το όριο είναι της μορφής $\infty - \infty$.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x - \sec x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{-\sin x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cot x = -\cot \frac{\pi}{2} = -0 = 0$$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x - \sec x) = 0$.

α) Έστω ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 - 6x + b \sin(2x)}{cx^2}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα L'Hopital να πάρουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 - 6x + b \sin(2x)}{cx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax^2 - 6x + b \sin(2x))'}{(cx^2)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - 6 + 2b \cos(2x)}{2cx}$$

Έστω $b \neq 3$.

τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + 2b \cos(2x) - 6}{2cx} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (2ax - 6 + 2b \cos(2x)) \cdot \frac{1}{2c} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(2a \cdot 0 - 6 + 2b \cdot \cos 0)}{2c} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(2b - 6)}{2c} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{2b - 6}{2c} \cdot \begin{cases} \infty, & \text{όταν } x \rightarrow 0^+ \\ -\infty, & \text{όταν } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Εφόσον $b \neq 3$, $\frac{2b - 6}{2c} \neq 0$.

Άρα, για $b \neq 3$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει

Τότε για $b = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - 6 + 2b \cos(2x)}{2cx} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - 6 + 6 \cos(2x)}{2cx}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα L'Hopital να πάρουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - 6 + 6 \cos(2x)}{2cx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2ax - 6 + 6 \cos(2x))'}{(2cx)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - 12 \sin(2x)}{2c} = \frac{2a - 12 \sin 0}{2c} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Αν } \alpha, \gamma \text{ ή } b=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{c}$$

(β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Από ε(α), το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει για $b=3$.

$$\text{Για } b=3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{c}.$$

Εξαιτίας ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = d \Leftrightarrow a = c \cdot d.$$

Αρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 για $b=3$ και $\alpha, c, d \in \mathbb{R}$ με $a, c, d \neq 0$ ε.ω. $a = c \cdot d$.

Ζητεί: 12: παράδειγμα Ασκήσεων

β) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εξαιτίας ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εξαιτίας ότι

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(2ax + b) = 2a$$

Εφόσον $a \neq 0$

$f''(x) \neq 0$ Αρα, η $f(x)$ δεν εφ'απείγει στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = 2a > 0, \forall \alpha > 0$$

$$\{ 2a < 0, \forall \alpha < 0$$

(α) Αν $a > 0$, η $f(x)$ σφ'απείγει τα πάντα πάνω στο $\mathbb{R}$

4/12/2018

15^ο ΦΑΛΛΟ ΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Έχουμε ότι

$$\int (12(y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) dy - \cot^5(y/3) \cdot \sec^2(y/3)) dy =$$

$$= 12 \int (y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) dy - \int \cot^5(y/3) \cdot \sec^2(y/3) dy$$

Υπολογίζουμε το

$$\int (y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) dy$$

Έχουμε ότι

$$\int (y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) dy$$

Θέτουμε $v = y^4 + 4y^2 + 1$

$$v = y^4 + 4y^2 + 1 \Rightarrow dv = (4y^3 + 8y) dy \Rightarrow$$

$$dw = 4(y^3 + 2y) dy \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot dw = (y^3 + 2y) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int v^2 \cdot dw = \frac{1}{4} \cdot \frac{v^3}{3} + C = \frac{v^3}{12} + C$$

$$= \frac{(y^4 + 4y^2 + 1)^3}{12} + C$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \cot^5(y/3) \cdot \sec^2(y/3) dy$$

Έχουμε ότι

$$\int \cot^5(y/3) \cdot \sec^2(y/3) dy =$$

Θέτουμε $z = \frac{y}{3}$

$$z = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} dy \Rightarrow 3 dz = dy$$

$$= 3 \int \cot^5(2) \cdot \sec^2 2 \, dz = 3 \int \left(\frac{1}{\tan 2} \right)^5 \cdot \sec^2 2 \, dz$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Défini } u = \tan 2 \\ u = \tan 2 \Rightarrow du = \sec^2 2 \, dz \end{array} \right]$$

$$= 3 \int \left(\frac{1}{u} \right)^5 du = 3 \int u^{-5} du = 3 \cdot \left(\frac{u^{-4}}{-4} \right) + C$$

$$= -\frac{3}{4u^4} + C = -\frac{3}{4 \tan^4 2} + C = -\frac{3}{4 \tan^4(y/3)} + C$$

Exemple: On propose de trouver $u = \tan(y/3)$.

Après avoir simplifié l'expression de u

$$\int (12(y^4 + 4y^2 + 1)^2 (y^3 + 2y) - \cot^5(y/3) \cdot \sec^2(y/3)) \, dy$$

$$= \frac{12 \cdot (y^4 + 4y^2 + 1)^3}{12} - \left(-\frac{3}{4 \tan^4(y/3)} \right) + C$$

$$= (y^4 + 4y^2 + 1)^3 + \frac{3}{4} \cot^4(y/3) + C$$

2) Exemple de

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}(1+x)^2} + \frac{4}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx$$

$$= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2} + 4 \int \frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Υπολογίστε το

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Εξάγουμε δε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} =$$

Θέτουμε $z = 1 + \sqrt{x}$

$$z = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow 2dz = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2 \int \frac{dz}{z^2} = 2 \int z^{-2} dz = 2 \cdot \frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{z} + C$$

$$= -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C$$

Υπολογίστε το

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Εξάγουμε δε

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx =$$

Θέτουμε $y = \frac{1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow dy = -2x^{-3} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dy = \frac{1}{x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sin y \cdot \cos y dy$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Đặt } z = \sin y \\ z = \sin y \Rightarrow dz = \cos y dy \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \int z dz = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} + C = -\frac{z^2}{4} + C$$

$$= -\frac{\sin^2 y}{4} + C = -\frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$$

(b) Đặt $u = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ và tìm đạo hàm của u theo x
 $\frac{du}{dx} = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$
 $du = -\frac{2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

Áp dụng vào tích phân

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} + \frac{4}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) dx =$$

$$= 3 \left(\frac{-2}{1+\sqrt{x}} \right) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + C =$$

$$= -\frac{6}{1+\sqrt{x}} - \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$$

3) Đặt $u = \sqrt{x}$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \cdot \sin^3(\sqrt{x})} dx = \int \frac{\cos u}{u \cdot \sin^3 u} du$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Đặt } u = \sqrt{x} \\ u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ 2 du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right]$$

$$= 2 \int \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^3 u}} du$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Đặt } W = \sin u \\ W = \sin u \Rightarrow dW = \cos u du \end{array} \right]$$

$$= 2 \cdot \int \frac{dW}{\sqrt{W^3}} = 2 \cdot \int W^{-3/2} dW$$

$$= 2 \cdot \frac{W^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{4}{\sqrt{W}} + C = -\frac{4}{\sqrt{\sin u}} + C$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{\sin(x)}} + C.$$

Impe: Đx phương trình vi phân đrợc cho và tìm nghiệm $y = \sin(\sqrt{x})$.

4) Example: $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\int \tan^2(7-2x^3) \cdot 3x^2 dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Đặt } v = 7-2x^3 \\ v = 7-2x^3 \Rightarrow dv = -6x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dv = 3x^2 dx \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \int \tan^2 v dv = -\frac{1}{2} \int (\sec^2 v - 1) dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\int \sec^2 v dv - \int dv \right) = -\frac{1}{2} (\tan v - v) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \tan v + \frac{v}{2} + C = -\frac{1}{2} \tan(7-2x^3) + \frac{7-2x^3}{2} + C$$

5) 1^{ος} τρόπος: Εξάγεται

$$\int \sin x \cdot \cos x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Δέσμευση } u = \sin x \\ u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \end{array} \right]$$

$$= \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

2^{ος} τρόπος: Εξάγεται

$$\left[\begin{array}{l} \text{Δέσμευση } u = \cos x \\ u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow -du = \sin x dx \end{array} \right]$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = - \int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$$

3^{ος} τρόπος: Εξάγεται

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos(2x)}{2} \right) + C = -\frac{\cos(2x)}{4} + C \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις: Πλην

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C_1,$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2,$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + C_3.$$

Γιατί είναι όλα τα τρία αποτελέσματα;

Exemple de

$$\frac{\sin^2 x}{2} + C_1 = \frac{1 - \cos^2 x}{2} + C_1 =$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + \left(C_1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$

Enons exemple de

$$\frac{-\cos(2x)}{4} + C_3 = \frac{-2\sin^2 x - 1}{4} + C_3$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + \left(C_3 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_2$$

6) Exemple de

$$\int \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

Décrivons $u = \frac{\pi}{2} - x$

$$u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow -du = dx$$

$$= - \int \csc^2 u \cdot \cot u \cdot du$$

Intégration par

$$\int \csc^2 u \cdot \cot u \, du$$

Soit $W = \cot u$

Décrivons $W = \cot u$

$$W = \cot u \Rightarrow dW = -\csc^2 u \, du \Rightarrow -dW = \csc^2 u \, du$$

$$= - \int W \, dW = -\frac{W^2}{2} + C = -\frac{\cot^2 u}{2} + C$$

2^{ος} Ερώτηση: Έξοψη δα

$$\int \csc^2 u \cdot \cot u \, du =$$
$$= \int \csc u \cdot \csc u \cdot \cot u \, du$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } w = \csc u \\ w = \csc u \Rightarrow dw = -\csc u \cdot \cot u \, du \\ \Rightarrow -dw = \csc u \cdot \cot u \, du \end{array} \right]$$

$$= - \int w \, dw = - \frac{w^2}{2} + C = - \frac{\csc^2 u}{2} + C$$

Επίπε: Γιατί είναι ίδια η αντιστροφή που εφάρμοζουμε;

$$\text{Λογικά } \boxed{\cot^2 u + 1 = \csc^2 u}$$

$$\text{Άρα, } \int \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{\cot^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} + C$$

$$\eta \int \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} + C$$

7) (a) Ερώτηση

$$a(t) = \pi^2 \cos(\pi t) \Rightarrow v'(t) = \pi^2 \cos(\pi t)$$

$$\Rightarrow \int v'(t) \, dt = \int \pi^2 \cos(\pi t) \, dt$$

$$\Rightarrow v(t) = \int \pi^2 \cos(\pi t) \, dt$$

$$\Rightarrow v(t) = \pi^2 \int \cos(\pi t) \, dt$$

$$\Rightarrow v(t) = \pi^2 \cdot \frac{\sin(\pi t)}{\pi} + C$$

$$\Rightarrow v(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + C$$

Εφόσον $v(0) = 8$, $\pi \cdot \sin(\pi \cdot 0) + C = 8 \Rightarrow \pi \cdot \sin 0 + C = 8 \Rightarrow$
 $\pi \cdot 0 + C = 8 \Rightarrow C = 8$

Επιλέγουμε η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t
είναι $V(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8 \text{ m/sec}$

(β) Έχουμε ότι

$$V(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S'(t) = \pi \cdot \sin(\pi t) + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int S'(t) dt = \int (\pi \cdot \sin(\pi t) + 8) dt$$

$$\Rightarrow S(t) = \int (\pi \cdot \sin(\pi t) + 8) dt$$

$$\Rightarrow S(t) = \pi \int \sin(\pi t) dt + 8 \int dt$$

$$\Rightarrow S(t) = -\pi \cdot \frac{\cos(\pi t)}{\pi} + 8t + C$$

$$\Rightarrow S(t) = -\cos(\pi t) + 8t + C$$

$$\text{Εφόσον } S(0) = 0,$$

$$-\cos(\pi \cdot 0) + 8 \cdot 0 + C = 0.$$

Έχουμε ότι

$$-\cos(\pi \cdot 0) + 8 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos 0 + 0 + C = 0$$

$$\Rightarrow -1 + C = 0$$

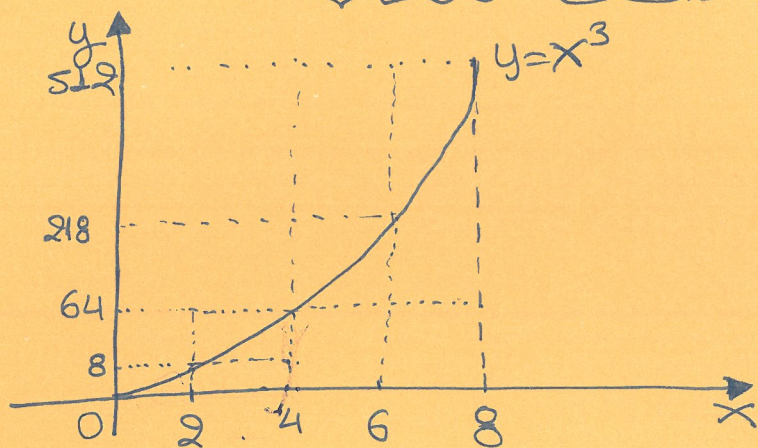
$$\Rightarrow C = 1.$$

Άρα

$$S(t) = -\cos(\pi t) + 8t + 1 \text{ m}$$

16ο Φαμάδιο Ασκήσεων

1)



(α) Παρατηρώντας
 $f(0)(8-0) \leq A \leq f(8)(8-0)$

και άρα $0 \leq A \leq 5096$

(β) Έχουμε ότι

$$f(0)(4-0) + f(4)(8-4) \leq A \leq f(4)(4-0) + f(8)(8-4)$$

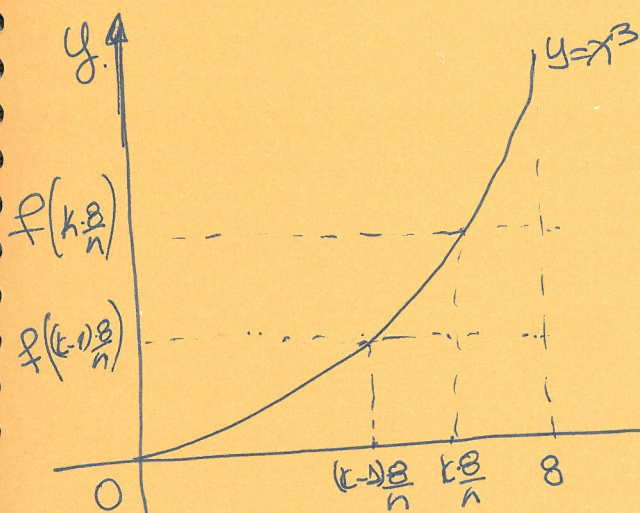
και άρα $256 \leq A \leq 2304$

(γ) Έχουμε ότι

$$f(0) \cdot 2 + f(2) \cdot 2 + f(4) \cdot 2 + f(6) \cdot 2 \leq A \leq f(2) \cdot 2 + f(4) \cdot 2 + f(6) \cdot 2 + f(8) \cdot 2$$

Α/ω: η άσκηση

δ) Η $f(x) = x^3$ είναι αύξουσα στο $[0, 8]$ και επομένως είναι αύξουσα σε κάθε υποδιαστήμα $[(k-1) \cdot \frac{8}{n}, k \cdot \frac{8}{n}]$, $k=1, 2, \dots, n$.



Άρα το ο.ε. της $f(x)$ στο $[(k-1) \frac{8}{n}, k \frac{8}{n}]$
 είναι $f((k-1) \frac{8}{n}) = (k-1)^3 \frac{8^3}{n^3}$ και το ο.μ. είναι
 $f(k \frac{8}{n}) = k^3 \frac{8^3}{n^3}$.

Επομένως

$$\sum_{k=1}^n f((k-1) \frac{8}{n}) \cdot \frac{8}{n} \leq A \leq \sum_{k=1}^n f(k \frac{8}{n}) \cdot \frac{8}{n}$$

ήτοι άρα

Άρα άρα

Εξάγετε δε

$$\sum_{k=1}^n f\left((k-1) \cdot \frac{8}{n}\right) \cdot \frac{8}{n} = \sum_{k=1}^n (k-1)^3 \cdot \frac{8^3}{n^3} \cdot \frac{8}{n} = \sum_{k=1}^n (k-1)^3 \cdot \frac{8^4}{n^4} =$$

$$= \frac{8^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \frac{8^4}{n^4} \sum_{l=0}^{n-1} l^3 \quad [l=k-1]$$

$$= \frac{8^4}{n^4} \cdot \sum_{l=1}^{n-1} l^3 = \frac{8^4 (n-1)^2 ((n-1)+1)^2}{n^4 \cdot 4}$$

$$= \frac{2 \cdot 8^3 \cdot (n-1)^2 \cdot n^2}{n^4} = 2 \cdot 8^3 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

Εντός εξαγετε δε

$$\sum_{k=1}^n f\left(k \cdot \frac{8}{n}\right) \cdot \frac{8}{n} = \sum_{k=1}^n k^3 \left(\frac{8}{n}\right)^3 \cdot \frac{8}{n} = \sum_{k=1}^n k^3 \cdot \frac{8^4}{n^4}$$

$$= \frac{8^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{8^4}{n^4} \cdot \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = 2 \cdot 8^3 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Επομένως

$$2 \cdot 8^3 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \leq A \leq 2 \cdot 8^3 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad \text{ή} \quad 2 \cdot 8^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq A \leq 2 \cdot 8^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Για παράδειγμα, για $n = 10^6$ παίρνουμε

$$2 \cdot 8^3 \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^2 \leq A \leq 2 \cdot 8^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^2$$

(ε) 'Όταν $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και άρα

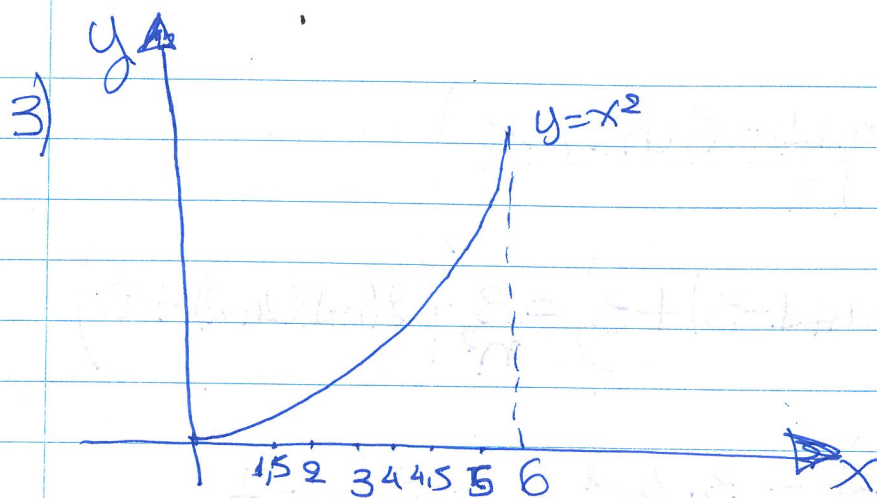
$$1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

Επομένως $2 \cdot 8^3 \leq A \leq 2 \cdot 8^3$

$$\text{Άρα, } A = 2 \cdot 8^3$$

Διόρθωση: Εφόσον $x^3 \geq 0$ στο $[0, 8]$,

$$A = \int_0^8 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^8 = 2 \cdot 8^3$$



(a) Έναρξη στο
 $av(f) \approx f(3) = 3^2 = 9$

(b) Έναρξη στο
 $av(f) \approx \frac{1}{2} (f(1,5) + f(4,5)) \approx \frac{1}{2} ((1,5)^2 + 4,5^2) \approx 11,25$

(γ) Έναρξη στο
 $av(f) \approx \frac{1}{3} (f(1) + f(3) + f(5)) = \frac{35}{3}$

(δ) Το μέσο του υποδιαστήματος

$$\left[(k-1) \frac{6}{n}, k \cdot \frac{6}{n} \right]$$

είναι $\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{6}{n}$

Άρα,

$$\begin{aligned} av(f) &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{6}{n} \right) \\ &\approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{6}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{6^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{6^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{6^2}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n \left(k^2 - k + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{6^2}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n 1 \right) = \\ &= \frac{6^2}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{n}{4} \right) = \frac{6^2}{n^3} n \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6^2}{n^2} \left(\frac{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3}{12} \right) = \\
 &= \frac{3}{n^2} \left(2(n+1)(2n+1-3) + 3 \right) = \frac{3}{n^2} \left(2(n+1)(2n-2) + 3 \right) \\
 &= \frac{3}{n^2} \left(4(n^2-1) + 3 \right) = 3 \cdot \frac{4n^2-1}{n^2} = 3 \left(4 - \frac{1}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Ενδεχώς

$$av(f) \approx 3 \left(4 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Για παράδειγμα, για $n = 10^6$,

$$av(f) \approx 3 \cdot \left(4 - \frac{1}{(10^6)^2} \right) = 3 \cdot \left(4 - \frac{1}{10^{12}} \right)$$

(ε) Αν $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και ενδεχώς

$$4 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 4$$

Άρα

$$av(f) = 3 \cdot 4 = 12.$$

απαδείκνυνται: Εξάμπεδοι

$$av(f) = \frac{1}{6-0} \int_0^6 x^2 dx = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^3}{3} = 12.$$