

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \cos y \cdot \infty = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \infty = \infty$$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$

Η/ω Άρα: Υπάρχει το όριο χωρίς l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \infty \cdot 1 = \infty$$

[όχι ω) $y = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$]

Η/ω: κεφ 7.6, σελ 559-563

• Ερωτ. 6. κεφ 7: 12

• 14: ΦΑΑΔιο Ασκήσεων

• Ασκ. κεφ. 7.6: 1-8, 11, 16-17, 20, 23-24, 39, 48

13/11/2018

10ο ΦΑΑΔιο Ασκήσεων

1) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 2]$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.ε και ο.κ. στο $[-3, 2]$

Βρίσκουμε τα κριτικά σημεία της $f(x)$ στο $(-3, 2)$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(5x^{2/5} - \frac{2}{3}x^3 \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5 \frac{d}{dx} (x^{2/5}) - \frac{2}{3} \frac{d}{dx} (x^3)$$

$$= 5 \cdot \frac{2}{5} x^{-3/5} - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 = 2x^{-3/5} - 2x^2, \text{ για } x \neq 0$$

Η $f'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5} (1 - x^{13/5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{-3/5} = 0 \text{ ή } 1 - x^{13/5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^{13/5} = 0 \Leftrightarrow x^{13/5} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Ενδεώς,

Η $f(x)$ έχει δύο κριτικές σημεία για $x=0$ και για $x=1$.
Άρα, η $f(x)$ μπορεί να λαμβανάρει ο.α. είτε στα κριτικά σημεία $x=0$ και $x=1$ ή στα άκρα του D_f για $x=-3$ και $x=2$.

Έχουμε ότι

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 5 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{13}{3},$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 5 \cdot (-3)^{2/5} - \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 = 5 \cdot \sqrt[5]{(-3)^2} - \frac{2}{3} \cdot (-27) \\ &= 5 \cdot \sqrt[5]{9} + 18, \end{aligned}$$

$$f(2) = 5 \cdot 2^{2/5} - \frac{2}{3} \cdot 2^3 = 5 \cdot \sqrt[5]{4} - \frac{16}{3}$$

Παρατηρώ

$$f(-3) > f(0), f(1), f(2)$$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.α. $5 \cdot \sqrt[5]{9} + 18$ στο $x=-3$

Παρατηρώ,

$$f(0) = 0 < \frac{13}{3} = f(1)$$

Έχουμε ότι

$$f(0) < f(2) \Leftrightarrow 0 < 5 \sqrt[5]{4} - \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{16}{3} < 5 \sqrt[5]{4} \Leftrightarrow$$

$$16 < 15 \sqrt[5]{4} \Leftrightarrow 16^5 < (15 \sqrt[5]{4})^5 \Leftrightarrow$$

$$16^5 < 15^5 (\sqrt[5]{4})^5 \Leftrightarrow 1048576 < 759375 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$1048576 < 3037500$$

Άρα, $f(0) < f(2), f(1)$

Ενδεώς, η $f(x)$ έχει ο.α. 0 για $x=0$

2) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$
 Άρα, η $h(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-1, 0]$
 Μπορούμε να βρούμε τα κριτικά σημεία της $h(x)$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{5}{3}} - \frac{10}{3} x^{\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (x^{5/3}) - \frac{10}{3} \frac{d}{dx} x^{4/3} = \\ &= \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{10}{3} \cdot \frac{4}{3} x^{1/3} \\ &= \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{40}{9} x^{1/3} \end{aligned}$$

Η $h'(x)$ ισούται για όλα τα x στο $(-1, 0)$

Έχουμε ότι

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{40}{9} x^{1/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{3} x^{2/3} (1 - 8x^{1/3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} x^{2/3} = 0 \text{ ή } 1 - 8x^{1/3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 1 - 8x^{1/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^{1/3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ή } x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Επομένως, $h'(x) = 0$ στο $(-1, 0)$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Άρα, η $h(x)$ έχει κριτικό σημείο για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ενδεώς, η $h(x)$ μπορεί να εφικνίσει 0.α. είτε στο κρίσιμο σημείο $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ είτε στα άκρα του D_h $x = -1$ και $x = 0$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h(-1/2\sqrt{2}) &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{7/3} \\ &= (-2^{-3/2})^{5/3} - \frac{10}{7} (-2^{-3/2})^{7/3} \\ &= -(2^{-3/2})^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot (-(2^{-3/2})^{7/3}) \\ &= -2^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3}} = -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$h(-1) = (-1)^{5/3} - \frac{10}{7} (-1)^{7/3} = -1 - \frac{10}{7} \cdot (-1) = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7},$$

$$h(0) = 0^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot 0^{7/3} = 0$$

Παρατηρούμε $h(-1) = \frac{3}{7} > 0 = h(0)$.

Έχουμε ότι

$$h(0) < h(-1/2\sqrt{2}) \Leftrightarrow 0 < -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-5/2} < \frac{10}{7} 2^{-7/2} \Leftrightarrow \frac{2^{-5/2}}{2^{-7/2}} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow [2^{-7/2} > 0]$$

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{5}{2} - (-\frac{7}{2})} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 2 < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 14 < 10$$

Άρα, $h(-1/2\sqrt{2}) < h(0)$

Ενδεώς,

$$h(-1/2\sqrt{2}) < h(0) < h(-1)$$

Άρα, $h(x)$ έχει 0.α. $-2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}}$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
και 0.α. $\frac{3}{7}$ για $x = -1$

3) Η $g(\theta)$ είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ ενώ εκτός η $g(\theta)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $g(\theta)$.

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\sin 2\theta) = 2\cos 2\theta$$

Η $g'(\theta)$ μηδενίζεται για όλα τα θ στο $(-\pi/2, \pi)$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$\theta \in (-\pi/2, \pi)$

$$\left[\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ -\frac{3\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} &\Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \frac{k}{2} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} &\Leftrightarrow k = -1 \text{ ή } k = 0 \text{ ή } k = 1 \end{aligned} \right]$$

$$\Leftrightarrow \theta = (-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει κρίσιμα σημεία για $\theta = -\pi/4, \theta = \pi/4, \theta = 3\pi/4$

Ενδεώς η $g(\theta)$ μπορεί να εμβαρύνει ο.α. είτε στα κρίσιμα σημεία $\theta = -\frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{3\pi}{4}$ είτε στα άκρα του $D_g, \theta = -\frac{\pi}{2}$ και $\theta = \pi$

Έχουμε ότι

$$g(-\pi/4) = \sin(2 \cdot (-\pi/4)) = \sin(-\pi/2) = -1,$$

$$g(\pi/4) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$g(3\pi/4) = \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$g(-\pi/2) = \sin(2(-\pi/2)) = \sin(-\pi) = 0,$$

$$g(\pi) = \sin(2\pi) = 0$$

Παραγωγίζοντας (ορίζεται)

$$g(-\pi/4) = g(3\pi/4) < g(-\pi/2) = g(\pi) < g(\pi/4)$$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει ο.ε. -1 για $\theta = -\frac{\pi}{4}$ και για $\theta = \frac{3\pi}{4}$ και ο.μ. 1 για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$

Επομένως η $f(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\pi, \pi]$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) = \frac{d}{dx} (\cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{dx} (x)$$

$$= -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η $f(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\pi, \pi)$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ ή } x = \frac{2}{2}(2k+1)\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\sin x = a$
 $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta$

$\cos x = 0$
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$$\bullet -\pi < 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < 2k\pi < \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} < k\pi < \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{5}{8} \Leftrightarrow k=0$$

$$\bullet -\pi < (2k+1)\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) < \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4} < (2k+1)\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{4} < 2k+1 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < 2k < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{8} < k < -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + (-\frac{\pi}{4}) \text{ ή } x = (2 \cdot (-1) + 1) \pi - (-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ ή } x = -\frac{3\pi}{4}$$

Άρα, η $f(x)$ έχει κριτικές σημεία για $x = -\frac{\pi}{4}$ και για $x = -\frac{3\pi}{4}$

Επομένως, η $f(x)$ είναι πιθανό να παρουσιάζει ο.α. είτε σε κριτικές σημεία $x = -\frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{3\pi}{4}$ είτε σε άκρα του D_f $x = -\pi$ ή $x = \pi$

Επαληθεύει

$$f(-\pi/4) = \cos(-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$f(-3\pi/4) = \cos(-\frac{3\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4},$$

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\pi) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi$$

$$f(\pi) = \cos \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi.$$

Προσέχουμε,

$$f(\pi) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi < -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = f(-\pi)$$

Επαληθεύει

$$f(-\pi/4) < f(-3\pi/4) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{\pi}{4} < -1 + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2 < \frac{\pi}{2}, \text{ δεν ισχύει}$$

Επομένως $2 > \frac{\pi}{2}$,

$$f(-3\pi/4) < f(-\pi/4)$$

Εξάγετε

$$f(\eta) < f(-3\eta/4) \Leftrightarrow -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \eta < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\eta}{4}$$

$$-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\eta}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta \Leftrightarrow$$

$$-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\left(-1 + \frac{7\eta}{4}\right)}_{\text{θετικό}}$$

Επειδή $\frac{7\eta}{4} > 1$, $-1 + \frac{7\eta}{4} > 0$

και άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-1 + \frac{7\eta}{4}\right) > 0 > -1$$

Επομένως, $f(\eta) < f(-3\eta/4)$

Εξάγετε

$$f(-\eta) < f(-\eta/4) \Leftrightarrow -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\eta}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\eta}{4} \Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{3\eta}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} < 1 - \frac{3\eta}{4} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < 1 - \frac{3\eta}{4} \Leftrightarrow$$

$$-1 - \sqrt{2} < -\frac{3\eta}{4} \Leftrightarrow \frac{3\eta}{4} < 1 + \sqrt{2}$$

HW

→ Απλ.

11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έστω $f(x) = 3x^3 + 8x + 7$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$.

Έχουμε ότι

$$f(-3) = -98 < 0$$

και ότι $f(0) = 7 > 0$

Άρα, από το ΘΕΤ, υπάρχει τουλάχιστον ένα c στο $[-3, 0]$

$$\text{τ.ω. } f(c) = 0.$$

Επομένως η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[-3, 0]$

Θ.δ.ο. αν $c_1, c_2 \in [-3, 0]$ με $c_1 \leq c_2$ είναι λύσεις της

$$3x^3 + 8x + 7 = 0, \text{ τότε } c_1 = c_2$$

Έστω $c_1 < c_2$

1ος Τρόπος: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[c_1, c_2]$.

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-3, 0]$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (c_1, c_2)

Εφόσον c_1, c_2 είναι λύσεις της $3x^3 + 8x + 7 = 0$,

$$\text{ισχύει ότι } f(c_1) = f(c_2) = 0.$$

Επομένως, από το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα $d \in (c_1, c_2)$ τ.ω. $f'(d) = 0$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 9x^2 + 8$$

Προφανώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως αλληλούχισσε σε άπειρο

Άρα, $c_1 = c_2$

2ος Τρόπος: Έχουμε ότι

$$f'(x) = 9x^2 + 8$$

Επομένως $f'(x) = 9x^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Από, $f(x)$ αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ενδεώς, $C_1 < C_2 \Rightarrow f(C_1) < f(C_2)$

Αενο για ϵ έχω υποθέσει ότι $f(C_1) = f(C_2) = 0$

Ενδεώς $C_1 = C_2$

Από, η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει ριζές για x στο $[-3, 0]$.

2)(b) Εσθουν $a < b, b - a > 0$.

Από,

$$\tan b - \tan a \geq b - a \Leftrightarrow \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \geq 1$$

Έστω $f(x) = \tan x$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Εσθουν $[a, b] \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Η $f(x)$ είναι παραγώγιμη στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Εσθουν $(a, b) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, η $f(x)$ είναι παραγώγιμη στο (a, b)

Ενδεώς, από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει ταίριασμα ένα $c \in (a, b)$

$$\text{τ.ω. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Εκαι εσθι $f'(x) = \sec^2 x \geq 1$, για $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Από, $f'(c) \geq 1$

$$\text{Ενδεώς, } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 1$$

$$\text{και άρα } \tan b - \tan a \geq b - a$$

3)(b) Έστω $f(x)$ για συνάρτηση τ.ω. $f'(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Έστω $g(x) = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -(-\sin x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$$

Από, $f'(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Ενδέχεται υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$f(x) = g(x) + k, x \in \mathbb{R}$$

Αρα, οι συναρτήσεις $f(x)$ με $f'(x) = \sin x$ είναι

όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = -\cos x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$

4) Έστω $f(x)$ η συνάρτηση με $f'(x) = \frac{x^3}{5} - x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{και } f(1) = 2$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$$

Εξάγετε ότι

$$g'(x) = \frac{x^3}{5} - x$$

Αρα, $f'(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Ενδέχεται, υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = g(x) + k$, $x \in \mathbb{R}$

Αντίστροφα,

$$f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + k, x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον $f(1) = 2$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1^4}{20} - \frac{1^2}{2} + k = 2 \Rightarrow$$

Εξάγετε ότι

$$-\frac{9}{20} + k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{49}{20}$$

$$\text{Αρα, } f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + \frac{49}{20}$$

5) Βελώνισμα

α) Εξάγετε ότι $v'(t) = \omega(t) = -8 \cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$

Έστω $f(t) = -4 \sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Τότε $f'(t) = -8 \cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$

Ενδέχεται,

$$V'(t) = f'(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, on a pour $k \in \mathbb{R}$ c.w.

$$V(t) = f(t) + k, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi, } V(t) = -4 \sin(2t) + k, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exemple de

$$V(0) = 4 \Leftrightarrow -4 \sin(2 \cdot 0) + k = 4 \Leftrightarrow -4 \cdot \sin 0 + k = 4 \Leftrightarrow k = 4$$

$$\text{Ainsi, } V(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

b) Exemple de

$$X'(t) = V(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

Et c.w.

$$g(t) = 2 \cos(2t) + 4t, t \in \mathbb{R}$$

$$g'(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } X'(t) = g'(t), t \in \mathbb{R}$$

Endévidemment, on a pour $k \in \mathbb{R}$ c.w.

$$X(t) = g(t) + k, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi, } X(t) = 2 \cos(2t) + 4t + k, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple de

$$X(0) = 2 \Leftrightarrow 2 \cos(2 \cdot 0) + 4 \cdot 0 + k = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos 0 + 0 + k = 2 \Leftrightarrow 2 + k = 2 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\text{Endévidemment, } X(t) = 2 \cos 2t + 4t, t \in \mathbb{R}.$$