Η $f(x)$ παρουσιάζει τ.α. για $x=-1$ και $x=3$

$f(-1)=-1+2+4=5$, $f(1)=-1-2+4=1$

$f(3)=-9+18-4=5$

Επομένως, η $f(x)$ παρουσιάζει τ.ελ. για $x=1$ και ο.μ. 5 για $x=-1$ και $x=3$

12ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Εφόσον $x^2+3\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $D_g=\mathbb{R}$

Η $g(x)$ είναι ρητή και επομένως η $g(x)$ είναι συνεχής στο $D_g=\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2+3}\right)=\frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}$$

Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}=0 \Leftrightarrow -3x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Επομένως η $g(x)$ έχει κρίσιμα σημεία για $x=-\sqrt{3}$ και $x=\sqrt{3}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}>0 \Leftrightarrow -3x^2+9>0 \Leftrightarrow 3x^2<9 \Leftrightarrow$$

$$x^2<3 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	∞
Πρόσημο $g'(x)$	$-$		$+$		$-$
Μονοτονία $g(x)$	φθιν.	τ.ε.	Αυξ.	τ.μ.	φθιν

(α) Η $g(x)$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty,-\sqrt{3}]$ και στο $[\sqrt{3},\infty)$ και αύξουσα στο $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(β) Η $g(x)$ έχει τ.ε. $g(-\sqrt{3})$ για $x=-\sqrt{3}$ και τ.μ. $g(\sqrt{3})$ για $x=\sqrt{3}$

(γ) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=3\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

Επίσης έχουμε ότι

$g(-\sqrt{3}) = \frac{3(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ και ότι $g(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα, η $g(x)$ έχει Ο.Ε. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=-\sqrt{3}$ και Ο.Μ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=\sqrt{3}$.

2) Προφανώς $D_f=[0,\infty)$

Η $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$

Έχουμε ότι

$f'(t)=\frac{d}{dt}(\sqrt{t}-2t)=\frac{1}{2}t^{-1/2}-2 = \frac{1}{2\sqrt{t}}-2$ για $t\neq 0$

Η $f'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0,\infty)$

Έχουμε ότι

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{t}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow t=\frac{1}{16}$

Άρα, η $f(t)$ έχει κρίσιμο σημείο για $t=\frac{1}{16}$

Έχουμε ότι

$f'(t)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}-2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}>2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>2\sqrt{t} \Leftrightarrow \frac{1}{4}>\sqrt{t} \Leftrightarrow$

$t<\frac{1}{16}$

t	0	$1/16$	∞
πρόσημο $f'(t)$	$+$		$-$
Μονοτονία $f(t)$	Αυξ.		φθιν
	τ.Ε.	ε.μ.	

(α) Η $f(t)$ είναι αύξουσα στο $[0,1/16]$ και φθίνουσα στο $[1/16,\infty)$

(β) Η $f(t)$ έχει τ.Ε. για $t=0$ και τ.μ. για $t=\frac{1}{16}$

(γ) Έχουμε ότι

$\lim_{x\to\infty} f(t) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{t}-2t) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{t}\cdot\lim_{x\to\infty}(1-2\sqrt{t}) = \infty(-\infty) = -\infty$

Άρα, η $f(t)$ έχει ο.μ. $f(1/16)=\frac{1}{8}$ για $t=1/16$

και δεν έχει Ο.Ε.

3) $f(x)=x^{\frac{6}{5}}-x^{\frac{3}{5}}$

Έχουμε ότι $D_f=\mathbb{R}$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{6}{5}}-x^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{6}{5}x^{1/5}-\frac{3}{5}x^{-2/5}\quad, \text{για } x\neq 0$$

Η $f'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x^{1/5}-\frac{3}{5}x^{-2/5}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^{-2/5}\left(2\cdot x^{3/5}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x^{-2/5}=0 \text{ ή } 2x^{3/5}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{3/5}-1=0 \Leftrightarrow x^{3/5}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^3=\frac{1}{2^5} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2^{5/3}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

Άρα, η $f(x)$ έχει κρίσιμα σημεία για $x=0$ και για $x=\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^{3/5}>\frac{1}{2} \qquad \left[\frac{3}{5}x^{-2/5}>0, \text{ για } x\neq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$	∞
Πρόσημο $f'(x)$	$-$	$-$	$+$	
Μονοτονία $f(x)$	Φθιν	Φθιν	ε.ε. Αυξ	

(α) Η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right]$ και αύξουσα στο $\left[1/\sqrt[3]{32}, \infty\right)$

(β) Η $f(x)$ έχει ε.ε. για $x=\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$ και δεν έχει ε.μ.

(γ) Εφόσον η $f(x)$ έχει ένα μόνο ε.α. αυτό είναι και ο.α.

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.ε. $f(2^{-5/3})=\left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}-\left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$

$$=2^{-\frac{6}{3}}-2^{-1}=2^{-2}-2^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

για $x=2^{-5/3}$ και δεν έχει ο.μ.

4) $h(x) = 9x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^2 \quad , D_h = [-1,1]$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Έχουμε ότι

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^2\right) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x \cdot 2 = 3x^{-2/3} - 3x$, για $x \neq 0$

Η $h'(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Έχουμε ότι

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^{-\frac{2}{3}} - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x^{-2/3}(1 - x^{5/3}) = 0 \Leftrightarrow$

$1 - x^{5/3} = 0 \Leftrightarrow x^{5/3} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα, η $h'(x) \neq 0$ για $x \in (-1,1)$

Επομένως, η $h(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=0$

Έχουμε ότι

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^{-2/3}(1 - x^{5/3}) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^{5/3} > 0 \Leftrightarrow$

$1 > x^{5/3} \Leftrightarrow x < 1$

x	-1	0	1
Πρόσημο $f'(x)$	$+$	$+$	
Μονοτονία $f(x)$	Αύξ.	Αύξ.	
	τ.ε.		τ.μ.

(α) Η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $[-1,1]$

(β) Η $h(x)$ έχει τ.ε. για $x=-1$ και τ.μ. για $x=1$

(γ) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Άρα, η $h(x)$ έχει ο.ε. και ο.μ. στο $[-1,1]$

Επομένως η $h(x)$ έχει ο.ε. $h(-1) = 9(-1) - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{21}{2}$ για $x=-1$ και

ο.μ.

$h(1) = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$ για $x=1$.

5) $g(t) = 2t\sqrt{t^2 - 9}$

Έχουμε ότι

$t^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow |t| \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 3$ ή $t \leq -3$

Άρα, $D_g = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο D_g

Έχουμε ότι

$g'(t)=\frac{d}{dt}\left(2t\sqrt{t^2-9}\right) = 2t\cdot\cancel{2}t\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t^2-9}} + 2\sqrt{t^2-9} = \frac{2t^2}{\sqrt{t^2-9}} + 2\sqrt{t^2-9}$

για $t\neq\pm3$

Η $g'(t)$ ορίζεται από τα t στο $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Έχουμε ότι

$g'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{2t^2}{\sqrt{t^2-9}} + 2\sqrt{t^2-9} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{t^2-9}\cdot\sqrt{t^2-9}+2t^2}{\sqrt{t^2-9}} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{2(t^2-9)+2t^2}{\sqrt{t^2-9}} = 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2-18}{\sqrt{t^2-9}} = 0 \Leftrightarrow t^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow$

$t=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ και $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Άρα, $g'(t)\neq 0$, για $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Επομένως, η $g(t)$ δεν έχει κρίσιμο σημείο

Έχουμε ότι

$g'(t)>0 \Leftrightarrow \frac{4t^2-18}{\sqrt{t^2-9}} > 0$

$\Leftrightarrow 4t^2-18>0$ και $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

$t^2>\frac{9}{2}$ και $t\in$ ....

$t<-\frac{3}{\sqrt{2}}$ ή $t>\frac{3}{\sqrt{2}}$ και $t\in$ ...

$\Leftrightarrow t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

t	$-\infty$	-3	3	∞
Πρόσημο $g'(t)$	+			+
Μονοτονία $g(t)$	Αυξ.			Αυξ.
		τ.μ.	τ.ε.	

(α) Η $g(t)$ είναι αυξ. στο $(-\infty,-3]$ και στο $[3,\infty)$

(β) Η $g(t)$ έχει τ.μ. για $t=-3$ και τ.ε. για $t=3$

(γ) Έχουμε ότι

$\lim_{x\to-\infty} g(t) = \lim_{x\to-\infty} 2t\sqrt{t^2-9} = \lim_{x\to-\infty} 2t\cdot\lim_{x\to-\infty}\sqrt{t^2-9} = (-\infty)\infty = -\infty$

Άρα, η $g(t)$ δεν έχει ο.ε.

Επομένως $\lim_{x\to\infty} g(t)=\infty$. Άρα, η $g(t)$ δεν έχει ο.μ.

β) $h(t)=\sin(t+\pi)$

Η $h(t)$ είναι συνεχής $[0,2\pi]$

*Έχουμε ότι

$h'(t)=\frac{d}{dt}(\sin(t+\pi))=\cos(t+\pi)$

Η $h'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0,2\pi)$

Έχουμε ότι

$h'(t)=0 \Leftrightarrow \cos(t+\pi)=0 \Leftrightarrow t+\pi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

$t=(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$

[$0<(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<(k-1)\pi<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$

$k=1$ ή $k=2$]

$\Leftrightarrow t=(1-1)\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $t=(2-1)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$ ή $t=\frac{3\pi}{2}$

Επομένως η $h(t)$ έχει κρίσιμα σημεία για $t=\frac{\pi}{2}, t=\frac{3\pi}{2}$

t	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
Πρόσημο $g'(t)$	$-$	$+$	$-$	
Μονοτονία $g(t)$	φθίν.	Αύξ.	φθίν.	
	ε.μ.	ε.ε.	ε.μ.	ε.ε.

$h'(\pi/4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$ Άρα, $h'(t)<0$ για $t\in(0,\pi/2)$

Έχουμε ότι

$h'(\pi)=\cos 2\pi=1>0$

Άρα, $h'(t)>0$ για $t\in(\pi/2,3\pi/2)$.

Έχουμε ότι

$h'(7\pi/4)=\cos(\frac{7\pi}{4}+\pi)=\cos(\frac{3\pi}{4}+2\pi)=\cos(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

Άρα, $h'(t)<0$ για $t\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

7) $f(x)=\sin x+x$

Η f(x) είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\sin x+x)=\cos x+1$$

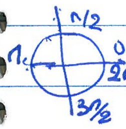
Η f'(x) ορίζεται για όλα τα x στο $(0,2\pi)$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi \quad [0<x<2\pi]$$

Άρα, η f(x) έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=\pi$



Προφανώς

$$f'(x)=\cos x+1>0$$

για $x\in(0,\pi)$ και $x\in(\pi,2\pi)$

x	0		π		2π
Πρόσημο f'(x)		+		+	
Μονοτονία f(x)		Αύξ.		Αύξ.	
	τ.ε.				τ.μ.

(α) Η f(x) είναι αύξουσα στο $[0,2\pi]$

(β) Η f(x) έχει τ.ε. για $x=0$ και τ.μ. για $x=2\pi$

(γ) Η f(x) είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Άρα, η f(x) έχει ο.μ. και ο.ε. για $x\in[0,2\pi]$

Εφόσον η f(x) έχει ένα τ.ε. και ένα τ.μ. τότε η f(x) έχει

ο.ε. f(0) για $x=0$ και ο.μ. f(2π) για $x=2\pi$

8) $g(\theta)=\cos^2\theta$

Η g(θ) είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta)=\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta)=2\cos\theta(-\sin\theta)=-\sin 2\theta$$

Η g(θ) ορίζεται για όλα τα θ στο $(0,2\pi)$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta)=0 \Leftrightarrow -\sin 2\theta=0 \Leftrightarrow \sin(2\theta)=0 \Leftrightarrow 2\theta=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

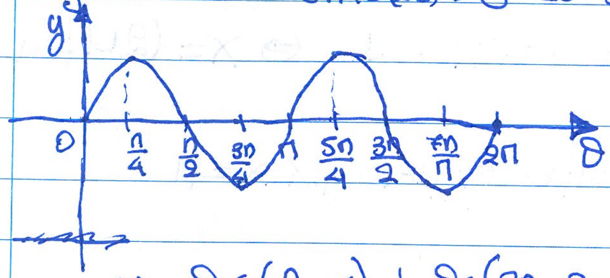
$\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ή $\theta = \pi$ ή $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $\quad [0 < \theta < 2\pi]$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει κρίσιμα σημεία για $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi, \theta = \frac{3\pi}{2}$

Επομένως

$g'(\theta) > 0 \Leftrightarrow -\sin(2\theta) > 0 \Leftrightarrow \sin(2\theta) < 0$



$y = \sin(2\theta)$

$\Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
πρόσημο $g'(\theta)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
Μονοτονία $g(\theta)$	φθιν	Αυξ.	φθιν	Αυξ.	
	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε	τ.μ.

(α) Η $g(\theta)$ είναι φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$ και στο $[\pi, 3\pi/2]$ και αύξουσα στο $[\pi/2, \pi]$ και $[3\pi/2, 2\pi]$

(β) Η $g(\theta)$ έχει τ.μ. για $\theta = 0$, για $\theta = \pi$ και για $\theta = 2\pi$ και έχει τ.ε. για $\theta = \frac{\pi}{2}$, για $\theta = 3\pi/2$

H/W (γ) $g(0) = \cos^2(0) = 1$

$g(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0$

$g(\pi) = \cos^2\pi = 1$

$g(3\pi/2) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$g(2\pi) = \cos^2(2\pi) = 1$

Επομένως η $g(\theta)$ έχει ΟΕΟ για $\theta = \pi/2, \theta = 3\pi/2$ και ΟΜ 1 για $\theta = 0, \theta = \pi$ και $\theta = 2\pi$.

9) $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$

Έχουμε ότι $D_f=\mathbb{R}$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}=\frac{10}{9}\cdot x^{-1/3}$, για $x\neq 0$

Η $f''(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Προφανώς $f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\neq 0$

Επομένως η $f(x)$ έχει πιθανό σημείο καμπής για $x=0$

Έχουμε ότι

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}}>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0 ∞
Πρόσημο $f''(x)$	$-$ $+$
Κοιλότητα $f(x)$	κοίλα κάτω κοίλα πάνω

σ.κ.

(α) Η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[0,\infty)$

(β) Η $f(x)$ έχει σ.κ. για $x=0$

$g(x)=x^{\frac{5}{3}}-x$

Έχουμε ότι $D_g=\mathbb{R}$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}-x\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-1$

Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$

Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$g''(x) = \frac{10}{9} x^{-4/3}$, για $x \neq 0$

Άρα, η $g''(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$
Εφόσον $D_g = D_f$, $D_{g'} = D_{f'}$, $D_{g''} = D_{f''}$ και $g''(x) = f''(x)$, η $g(x)$ και η $f(x)$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο ως προς την κοιλότητα και τα σ.κ.

(γ) Η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[0, \infty)$
δ) Η $g(x)$ έχει σ.κ. για $x=0$

Ερώτ.: Γενικότερα, τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

19/11/2018

11) Εφόσον η $h(x)$ είναι πολυωνυμική $D_h = \mathbb{R}$
και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h'(x) = \frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Η $h'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Η $h'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h''(x) = \frac{d}{dx}(3ax^2 + 2bx + c) = 6ax + 2b.$

Η $h''(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}.$

Άρα, η $h(x)$ έχει ένα πιθανό σημείο καμπής για $x = \frac{-b}{3a}$

Έχουμε ότι

τ.α. μόνο σε κρίσιμα σημεία

$h''(x)>0 \Leftrightarrow 6ax+2b>0 \Leftrightarrow 6ax>-2b \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{-b}{3a}, & a>0 \\ x<\frac{-b}{3a}, & a<0 \end{cases}$

(α) Αν $a>0$, τότε η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $\left[\frac{-b}{3a}, \infty\right)$.

Αν $a<0$, τότε η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right]$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left[\frac{-b}{3a}, \infty\right)$

(β) Η $h(x)$ έχει σ.κ. για $x=\frac{-b}{3a}$.

13) Εφόσον $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$,
έχουμε ότι
$D_h=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

Εφόσον η $h(x)$ είναι ρητή, η $h(x)$ είναι συνεχής στο $D_h=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$
Έχουμε ότι

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)=\frac{3(x+1)-(3x+2)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Η $h'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$
Προφανώς

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\neq 0 \text{ για όλα τα } x\neq -1$$

Επομένως η $h(x)$ __δεν__ έχει κρίσιμα σημεία.
Προφανώς

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0, \text{ για } x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$$

(α) Η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $(-\infty,-1)$ και στο $(-1,\infty)$
(β) Η $h(x)$ δεν έχει τ.ε.
Έχουμε ότι

$$h''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left((x+1)^{-2}\right)=-2(x+1)^{-3}\cdot\frac{d(x+1)}{dx}=-\frac{2}{(x+1)^3}$$

Η $h''(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.
Προφανώς

$$h''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \neq 0, \text{ για } x \text{ στο } (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$$

Άρα η $h(x)$ δεν έχει πιθανά σ.κ.
Έχουμε ότι

$$h''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x+1)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^3<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$$

(γ) Η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(-\infty,-1)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-1,\infty)$.

(δ) Η $h(x)$ δεν έχει σ.κ.

14) (α) Εφόσον η $g(x)$ είναι πολυωνυμική
Έχουμε ότι $D_g=\mathbb{R}$
Η $g(x)=ax^2+bx+c$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=2ax+b.$$

Η $g'(x)$ ορίζεται ~~σε όλο το~~ για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2ax+b \Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}$$

Έχουμε ότι

$$g''(x)=\frac{d}{dx}(2ax+b)=2a$$

Άρα,

$$g''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a>0, \text{ αν } a>0$$

και

$$g''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a<0, \text{ αν } a<0$$

Άρα, από το κριτήριο 2ης παραγώγου,
η $g(x)$ έχει τ.ε. $g\left(-\frac{b}{2a}\right)$ για $x=-\frac{b}{2a}$, αν $a>0$

Και η $g(x)$ έχει τ.μ. $g\left(-\frac{b}{2a}\right)$ για $x=-\frac{b}{2a}$, αν $a<0$

(b) Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει ένα μοναδικό τ.α...
Άρα αυτό είναι ο.α..
Επομένως, αν $a>0$, η $g(x)$ έχει ο.ε. $g\left(-\frac{b}{2a}\right)$
και αν $a<0$, η $g(x)$ έχει ο.μ. $g\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

13ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

2) Το Συνολικό κέρδος είναι
$$P=(x-k)\cdot m.$$
Προφανώς
$$P=m\cdot(x-k)$$
$$=\left(\frac{a}{x-k}+b(100-x)\right)(x-k)$$
$$=a+b(100-x)(x-k)$$
$$=-bx^2+(100b+k\cdot b)x+(a-100bk)$$

Μαθηματικό Μοντέλο: Θέλω να βρώ το x για το οποίο η $P(x)=-bx^2+(100b+kb)x+(a-100bk)$ έχει ο.μ. στο $(0,\infty)$.

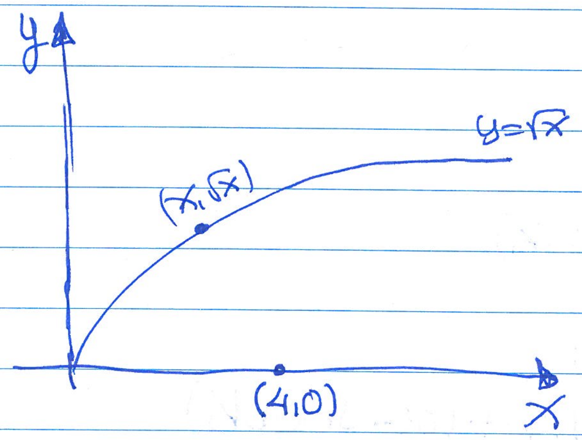
Έχουμε ότι
$$P'(x)=\frac{d}{dx}\left(-bx^2+(100b+kb)x+(a-100bk)\right)=$$
$$=-2bx+(100b+kb)$$
Η $P'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,\infty)$.
Έχουμε ότι
$$P'(x)=0 \Leftrightarrow -2bx+(100b+kb)=0 \Leftrightarrow x=\frac{100+k}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=50+\frac{k}{2}$$
Άρα, η $P(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=50+\frac{k}{2}$.

Έχουμε ότι
$$P'(x)>0 \Leftrightarrow -2bx+(100b+kb)>0 \Leftrightarrow$$
$$-2bx>-(100b+kb) \Leftrightarrow x<50+\frac{k}{2}$$
$$[-2b<0]$$

Άρα, η $P(x)$ είναι αύξουσα στο $\left(0, 50+\frac{k}{2}\right]$ και είναι φθίνουσα στο $\left[50+\frac{k}{2}, \infty\right)$

Επομένως, η $P(x)$ έχει τ.μ. για $x=50+\frac{k}{2}$.
Εφόσον η $P(x)$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$ και έχει ένα τ.α. αυτό είναι ο.α..
Άρα, η $P(x)$ έχει ο.μ. για $x=50+\frac{k}{2}$.

Επομένως, η τιμή πώλησης του παιχνιδιού για την οποία η εταιρία έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος είναι $x=50+\frac{k}{2}$ €.

3) 

Έστω $(x,\sqrt{x})$ με $x\geq 0$ ένα σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{x}$
Η απόσταση του σημείου $(x,\sqrt{x})$ από το σημείο $(4,0)$ είναι
$$d=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-8x+16+x}$$
$$=\sqrt{x^2-7x+16}$$

Η απόσταση του σημείου $(4,0)$ από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ είναι η ελάχιστη τιμή του d για $x\geq 0$.
Άρα, θέλω να βρώ το ο.ε. της $d(x)=\sqrt{x^2-7x+16}$ στο $[0,\infty)$
Για να βρώ το ο.ε. της $d(x)$ αρκεί να βρώ το ο.ε. της $g(x)=x^2-7x+16$ στο $[0,\infty)$.
Έχουμε ότι
$$g'(x)=\frac{d}{dx}(x^2-7x+16)=2x-7$$

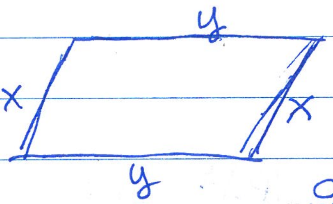
Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $[0,\infty)$
Έχουμε ότι
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$

Άρα, η $g(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=\frac{7}{2}$.
Έχουμε ότι
$$g'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$$

Επομένως η $g(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0, 7/2]$ και είναι αύξουσα στο $[7/2, \infty)$.
Άρα, η $g(x)$ έχει τ.μ. για $x=0$ και τ.ε. για $x=7/2$
Έχουμε ότι
$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+16)=\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

Άρα, η $g(x)$ δεν έχει ο.μ. και έχει ο.ε. $g(7/2)=\frac{15}{4}$.

Επομένως, το ο.ε. της $d(x)$ είναι $\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ άρα η απόσταση του $(4,0)$ από την $y=\sqrt{x}$ είναι $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

5) 

Εφόσον η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι P, θα ισχύει ότι
$$2x+2y=P. \quad (*)$$
Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ίσο με
$$A=x\cdot y$$

Από την $(*)$ παίρνουμε ότι
$$x=\frac{P}{2}-y \quad (**)$$

Από την $(**)$ παίρνουμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι $A=\left(\frac{P}{2}-y\right)\cdot y=-y^2+\frac{P}{2}\cdot y$.

Πρέπει $x, y \geq 0$

Εφόσον $x \geq 0$ και $x = \frac{P}{2} - y$, $y \leq \frac{P}{2}$.

Μαθηματικό Μοντέλο
Θέλω να βρω το y για το οποίο η
$$A(y) = -y^2 + \frac{P}{2} \cdot y$$
Έχει ο.μ. στο $[0, P/2]$.

Η $A(y)$ είναι συνεχής στο $[0, P/2]$.
Επομένως η $A(y)$ έχει ο.α. στο $[0, P/2]$.

$$A'(y) = \frac{d}{dx}\left(-y^2 + \frac{P}{2} \cdot y\right) = -2y + \frac{P}{2}.$$

Η $A'(y)$ ορίζεται για όλα τα y στο $(0, P/2)$.
Επομένως
$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow -2y + \frac{P}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{P}{4}$$

Άρα, η $A(y)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $y = \frac{P}{4}$

Επομένως η $A(y)$ μπορεί να εμφανίζει ο.α. είτε στο κρίσιμο σημείο $y = \frac{P}{4}$ είτε στα άκρα $y = 0$ και $y = \frac{P}{2}$.

Έχουμε ότι
$$A(P/4) = -\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P^2}{16},$$

$$A(0) = -0^2 + \frac{P}{2} \cdot 0 = 0, \quad A(P/2) = -\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{2} = 0$$

Επομένως η $A(y)$ έχει ο.μ. για $y = \frac{P}{4}$

Για $y = \frac{P}{4}$ από την (**),

$$x = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

Άρα, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για το οποίο το εμβαδόν είναι το μέγιστο είναι το τετράγωνο.

7) Θέλω να βρω το ο.μ. της $h(t) = -33t^2 + 198t + 140$ στο $[0,\infty)$ και το t για το οποίο εμφανίζεται το ο.μ. } Μαθηματειό Μανεσάλ

Έχουμε ότι
$$h'(t) = \frac{d}{dt}(-33t^2 + 198t + 140) = -66t + 198$$

Η $h'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0,\infty)$
Έχουμε ότι
$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -66t + 198 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.
Άρα η $h'(t)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $t=3$
Έχουμε ότι
$h'(t) > 0 \Leftrightarrow -66t + 198 > 0 \Leftrightarrow -66t > -198 \Leftrightarrow t < 3$
Επομένως η $h(t)$ είναι αύξουσα στο $[0,3]$ και φθίνουσα στο $[3,\infty)$
Η $h(t)$ έχει τ.ε. για $t=0$ και τ.μ. για $t=3$
Έχουμε ότι
$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}(-33t^2 + 198t + 140) = -\infty$. όχι ο.ε.

Άρα η $h(t)$ έχει ο.μ. $h(3)$ για $t=3$.

Επομένως το μέγιστο ύψος του σώματος είναι $h(3) = 437m$ την χρονική στιγμή $t = 3\,sec$.

20/11/2018

14ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Σημ.: Εναλλακτικά θα μπορούσα να πω ότι το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$