

Παρ. 8: Βρείτε τα ο.α της $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6$ στο $[-2, 3]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-2, 3]$ (ως πολυωνυμική)

Επομένως η $f(x)$ έχει ο.μ και ο.ε στο $[-2, 3]$

Βρούσαμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$

$$\text{Έχουμε ότι } \frac{d}{dx} \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6 \right) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $[-2, 3]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x = 0 \quad \text{ή} \quad x-1 = 0$$

$$\boxed{x=0} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=1}$$

Επομένως η $f(x)$ έχει δύο κρίσιμα σημεία, για $x=0$ και για $x=1$.

Τα τ.α (και άρα τα ο.α) της $f(x)$ μπορεί να εμφανίζονται είτε στα κρίσιμα σημεία $x=0$ ή $x=1$ είτε στα άκρα $x=-2$ και $x=3$

$$f(-2) = -8 - \frac{3}{2} \cdot 4 - 6 = -8 - 6 - 6 = -20$$

$$f(0) = -6$$

$$f(1) = -\frac{13}{2} = -6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{15}{2}$$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.μ. $\frac{15}{2}$ για $x=3$ και ο.ε -20 για $x=-2$.

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \cos y \cdot \infty = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \infty = \infty$$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$

H/w. Άρα: Υπάρχει το όριο χωρίς l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = \infty \cdot 1 = \infty$$

[όχι $y = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0^+$]

H/w. • κεφ 706, σελ 559-563

• Ερωτ. 60. κεφ 7. 12

• 14^ο ΦΑΑΔιο Ασκήσεων

• Ασκ. κεφ. 7.6: 1-8, 11, 16-17, 20, 23-24, 39, 48

13/11/2018

10^ο ΦΑΑΔιο Ασκήσεων

1) Η f(x) είναι συνεχής στο [-3, 2]

Άρα, η f(x) έχει ο.ε. και ο.κ. στο [-3, 2]

Βρίσκουμε τα κριτικά σημεία της f(x) στο (-3, 2)

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(5x^{2/5} - \frac{2}{3}x^3 \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5 \frac{d}{dx} (x^{2/5}) - \frac{2}{3} \frac{d}{dx} (x^3)$$

$$= 5 \cdot \frac{2}{5} x^{-3/5} - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 = 2x^{-3/5} - 2x^2, \text{ για } x \neq 0$$

Η f(x) θεωρείται για x=0

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^{-3/5} (1 - x^{13/5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{-3/5} = 0 \text{ ή } 1 - x^{13/5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^{13/5} = 0 \Leftrightarrow x^{13/5} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Ενδεώς,

Η $f(x)$ έχει δύο κριτικές σημεία για $x=0$ και για $x=1$.
Άρα, η $f(x)$ μπορεί να λαμβανάρθει ο.β. είτε στα κριτικά σημεία $x=0$ και $x=1$ ή στα άκρα του D_f για $x=-3$ και $x=2$.

Έχουμε ότι

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 5 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{13}{3},$$

$$f(-3) = 5 \cdot (-3)^{2/5} - \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 = 5 \cdot \sqrt[5]{(-3)^2} - \frac{2}{3} \cdot (-27) \\ = 5 \cdot \sqrt[5]{9} + 18,$$

$$f(2) = 5 \cdot 2^{2/5} - \frac{2}{3} \cdot 2^3 = 5 \cdot \sqrt[5]{4} - \frac{16}{3}$$

Προφανώς

$$f(-3) > f(0), f(1), f(2)$$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.β. $5 \cdot \sqrt[5]{9} + 18$ στο $x=-3$

Προφανώς,

$$f(0) = 0 < \frac{13}{3} = f(1)$$

Έχουμε ότι

$$f(0) < f(2) \Leftrightarrow 0 < 5 \sqrt[5]{4} - \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{16}{3} < 5 \sqrt[5]{4} \Leftrightarrow$$

$$16 < 15 \sqrt[5]{4} \Leftrightarrow 16^5 < (15 \sqrt[5]{4})^5 \Leftrightarrow$$

$$16^5 < 15^5 (\sqrt[5]{4})^5 \Leftrightarrow 1048576 < 759375 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$1048576 < 3037500$$

Άρα, $f(0) < f(2), f(1)$

Ενδεώς, η $f(x)$ έχει ο.β. 0 για $x=0$

2) Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$
 Άρα, η $h(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-1, 0]$
 Βρίσκουμε τα κριτικά σημεία της $h(x)$

Εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{5}{3}} - \frac{10}{7} x^{\frac{7}{3}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (x^{5/3}) - \frac{10}{7} \frac{d}{dx} x^{7/3} = \\ &= \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{3} x^{4/3} \\ &= \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{10}{3} x^{4/3} \end{aligned}$$

Η $h'(x)$ ισούται για όλα τα x στο $(-1, 0)$

Εξάγουμε ότι

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{10}{3} x^{4/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{3} x^{2/3} (1 - 2x^{2/3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} x^{2/3} = 0 \text{ ή } 1 - 2x^{2/3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 1 - 2x^{2/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^{2/3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ή } x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Επομένως, $h'(x) = 0$ στο $(-1, 0)$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Άρα, η $h(x)$ έχει κριτικό σημείο για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Επιλέγουμε η $h(x)$ μπορεί να ελεγχθεί για 0.α. είτε στο κρίσιμο σημείο $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ είτε στα άκρα του D_h $x = -1$ και $x = 0$.

Έχουμε ότι

$$h(-1/2\sqrt{2}) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot \left(-1/2\sqrt{2}\right)^{7/3}$$

$$= (-2^{-3/2})^{5/3} - \frac{10}{7} (-2^{-3/2})^{7/3}$$

$$= -(2^{-3/2})^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot (-(2^{-3/2})^{7/3})$$

$$= -2^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3}} = -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}}$$

$$h(-1) = (-1)^{5/3} - \frac{10}{7} (-1)^{7/3} = -1 - \frac{10}{7} \cdot (-1) = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7}$$

$$h(0) = 0^{5/3} - \frac{10}{7} \cdot 0^{7/3} = 0$$

Παρατηρούμε $h(-1) = \frac{3}{7} > 0 = h(0)$.

Έχουμε ότι

$$h(0) < h(-1/2\sqrt{2}) \Leftrightarrow 0 < -2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-5/2} < \frac{10}{7} 2^{-7/2} \Leftrightarrow \frac{2^{-5/2}}{2^{-7/2}} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow [2^{-7/2} > 0]$$

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{5}{2} - (-\frac{7}{2})} < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 2 < \frac{10}{7} \Leftrightarrow 14 < 10$$

Άρα, $h(-1/2\sqrt{2}) < h(0)$

Επιλέγουμε,

$$h(-1/2\sqrt{2}) < h(0) < h(-1)$$

Άρα, $h(x)$ έχει 0.ε. $-2^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{7} 2^{-\frac{7}{2}}$ για $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

και 0.κ. $\frac{3}{7}$ για $x = -1$

3) Η $g(\theta)$ είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ ενώ επίσης η $g(\theta)$

έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$
Βρίσκουμε τα κριτικά σημεία της $g(\theta)$.

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\sin 2\theta) = 2 \cos 2\theta$$

Η $g'(\theta)$ μηδενίζεται για όλα τα θ στο $(-\pi/2, \pi)$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$\theta \in (-\pi/2, \pi)$

$$\left[\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{\pi}{4} \quad (\Rightarrow) \\ -\frac{3\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} &\Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \frac{k}{2} < \frac{3}{4} \quad (\Rightarrow) \\ -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} &\Leftrightarrow k = -1 \text{ ή } k = 0 \text{ ή } k = 1 \end{aligned} \right]$$

$$\Leftrightarrow \theta = (-1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει κριτικά σημεία για $\theta = -\pi/4, \theta = \pi/4, \theta = 3\pi/4$

Ενώ επίσης η $g(\theta)$ μπορεί να ελεγχθεί ο.α. είτε στα κριτικά σημεία $\theta = -\pi/4, \theta = \pi/4, \theta = 3\pi/4$ είτε στα άκρα του $D_g, \theta = -\pi/2$ και $\theta = \pi$

Έχουμε ότι

$$g(-\pi/4) = \sin(2 \cdot (-\pi/4)) = \sin(-\pi/2) = -1,$$

$$g(\pi/4) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$g(3\pi/4) = \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$g(-\pi/2) = \sin(2(-\pi/2)) = \sin(-\pi) = 0,$$

$$g(\pi) = \sin(2\pi) = 0$$

Παραγωγός (αξιόθετα)

$$g(-\pi/4) = g(3\pi/4) < g(-\pi/2) = g(\pi) < g(\pi/4)$$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει ο.ε. -1 για $\theta = -\frac{\pi}{4}$ και για $\theta = \frac{3\pi}{4}$ και ο.μ. 1 για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$

Επομένως η $f(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. στο $[-\pi, \pi]$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) = \frac{d}{dx} (\cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{dx} (x)$$

$$= -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η $f(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\pi, \pi)$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ ή } x = 2k\pi + \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet -\pi < 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < 2k\pi < \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} < k\pi < \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{5}{8} \Leftrightarrow k=0$$

$$\bullet -\pi < (2k+1)\pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) < \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4} < (2k+1)\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{4} < 2k+1 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < 2k < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{8} < k < -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

$\sin x = a$
 $x = 2k\pi + \theta$
 $x = 2k\pi + \pi - \theta$

$\cos x = 0$
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ ή } x = (2 \cdot (-1) + 1)\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ ή } x = -\frac{3\pi}{4}$$

Άρα, η $f(x)$ έχει κριτικές σημεία για $x = -\frac{\pi}{4}$ και για $x = -\frac{3\pi}{4}$

Επομένως, η $f(x)$ είναι πιθανό να παρουσιάζει α.α. είτε σε κριτικές σημεία $x = -\frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{3\pi}{4}$ είτε σε άκρα του D_f $x = -\pi$ ή $x = \pi$

Εφαρμόζω

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\pi) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi$$

$$f(\pi) = \cos \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi$$

Προσέχω,

$$f(\pi) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi < -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = f(-\pi)$$

Εφαρμόζω

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) < f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-1 + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \frac{\pi}{4}}{4} < \frac{-1 + \frac{3\pi}{4}}{4} \Leftrightarrow 2 < \frac{\pi}{2}, \text{ δεν λύνει}$$

Επομένως $2 > \frac{\pi}{2}$,

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Εξάφιστες

$$f(\pi) < f(-3\pi/4) \Leftrightarrow -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-3\pi}{4}$$

$$-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \Leftrightarrow$$

$$-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\left(-1 + \frac{3\pi}{4} + \pi\right)}_{\text{θετικό}}$$

Επειδή $\frac{3\pi}{4} > 1$, $-1 + \frac{3\pi}{4} > 0$

και άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-1 + \frac{3\pi}{4}\right) > 0 > -1$$

Επομένως, $f(\pi) < f(-3\pi/4)$

Εξάφιστες

$$f(-\pi) < f(-\pi/4) \Leftrightarrow -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} < 1 - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < 1 - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-1 - \sqrt{2} < -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < 1 + \sqrt{2}$$

HW

→ Άρα;

11^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έστω $f(x) = 3x^3 + 8x + 7$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$.

Έχουμε ότι

$$f(-3) = -98 < 0$$

και ότι $f(0) = 7 > 0$

Άρα, από το ΘΕΤ, υπάρχει τουλάχιστον ένα c στο $[-3, 0]$

τ.ω. $f(c) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον
μια ρίζα στο $[-3, 0]$

Θ.δ.ο. αν $c_1, c_2 \in [-3, 0]$ με $c_1 \leq c_2$ είναι ρίζες της

$$3x^3 + 8x + 7 = 0, \text{ τότε } c_1 = c_2$$

Έστω $c_1 < c_2$

1^ο Τρόπος: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, 0]$

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[c_1, c_2]$.

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-3, 0]$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (c_1, c_2)

Εφόσον c_1, c_2 είναι ρίζες της $3x^3 + 8x + 7 = 0$,

ισχύει ότι $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

Επομένως, από το θεώρημα Rolle, παίρνουμε ότι
υπάρχει τουλάχιστον ένα $d \in (c_1, c_2)$ τ.ω. $f'(d) = 0$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = 9x^2 + 8$$

Προφανώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως αλληλόμορφο σε άπειρο

Άρα, $c_1 = c_2$

2^ο Τρόπος: Έχουμε ότι

$$f'(x) = 9x^2 + 8$$

Επομένως $f'(x) = 9x^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Από, $f(x)$ αύξουσα στο \mathbb{R}

Ενδείκνυται, $c_1 < c_2 \Leftrightarrow f(c_1) < f(c_2)$

'Αενο για ξ έχω υποθέσει ότι $f(c_1) = f(c_2) = 0$

Ενδείκνυται $c_1 = c_2$

Από, η εξίσωση $3x^3 + 8x + 7 = 0$ έχει ριζές για ξ στο $[-3, 0]$.

2) (β) Επέσταν $a < b, b - a > 0$.

Από,

$$\tan b - \tan a \geq b - a \Leftrightarrow \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \geq 1$$

Έστω $f(x) = \tan x$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Επέσταν $[a, b] \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Επέσταν $(a, b) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)

Ενδείκνυται, από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει ταίριασμα $\xi \in (a, b)$

$$\text{τ.ω. } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =$$

Εφαπτεται $f'(x) = \sec^2 x \geq 1$, για $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Από, $f'(\xi) \geq 1$

$$\text{Ενδείκνυται, } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 1$$

$$\text{και άρα } \tan b - \tan a \geq b - a$$

3) (β) Έστω $f(x)$ για συνάρτηση τ.ω. $f'(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$

Έστω $g(x) = -\cos x, x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -(-\sin x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$$

Από, $f'(x) = g'(x), x \in \mathbb{R}$

Επιπλέον υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$f(x) = g(x) + k, x \in \mathbb{R}$$

Άρα, οι συναρτήσεις $f(x)$ με $f'(x) = \sin x$ είναι

όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = -\cos x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$

4) Έστω $f(x)$ η συνάρτηση με $f'(x) = \frac{x^3 - x}{5}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{και } f(1) = 2$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{x^3 - x}{5}$$

Άρα, $f'(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Επιπλέον, υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = g(x) + k$, $x \in \mathbb{R}$

Αντίστροφα,

$$f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + k, x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον $f(1) = 2$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1^4}{20} - \frac{1^2}{2} + k = 2 \Rightarrow$$

Έχουμε ότι

$$-\frac{9}{20} + k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{49}{20}$$

$$\text{Άρα, } f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{2} + \frac{49}{20}$$

5) Τριγωνομετρική

α) Έχουμε ότι $v'(t) = \omega(t) = -8 \cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$

Έστω $f(t) = -4 \sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Τότε $f'(t) = -8 \cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$

Επιπλέον,

$$V'(t) = f'(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ c.w.

$$V(t) = f(t) + k, t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta \eta \lambda. V(t) = -4 \sin(2t) + k, \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Εξάφει δει

$$V(0) = 4 \Leftrightarrow -4 \sin 2 \cdot 0 + k = 4 \Leftrightarrow -4 \cdot \sin 0 + k = 4 \Leftrightarrow k = 4$$

$$\text{Άρα, } V(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

β) Εξάφει δει

$$X'(t) = V(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

Εστω

$$g(t) = 2 \cos(2t) + 4t, t \in \mathbb{R}$$

$$g'(t) = -4 \sin(2t) + 4, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα, } X'(t) = g'(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ c.w.

$$X(t) = g(t) + k, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα, } X(t) = 2 \cos(2t) + 4t + k, t \in \mathbb{R}.$$

Εξάφει δει

$$X(0) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) + 4 \cdot 0 + k = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \cos 0 + 0 + k = 2 \Leftrightarrow 2 + k = 2 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\text{Επιπλέον, } X(t) = 2 \cos 2t + 4t, t \in \mathbb{R}.$$