9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 30/10/2018

Ασκ 1: (α) Έχουμε ότι

$$\frac{d^2}{dx^2}(u\cdot v)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(u\cdot v)\right)\Big|_{x=x_0}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\cdot v\right)\Big|_{x=x_0}$$ [κανόνας γινομένου]

$$= \left(\frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\cdot v\right)\right)\Big|_{x=x_0}$$ [κανόνας αθροίσματος]

$$= \left(u\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)\cdot v\right)\Big|_{x=x_0}$$

$$= \left(u\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\cdot v\right)\Big|_{x=x_0}$$

Ασκ 2: (α) $f(x) = \frac{\sec x}{1+\sec x}$

Έχουμε ότι

$$D_f = D_{\sec x} \setminus \{x\in\mathbb{R} : 1+\sec x = 0\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x\neq k\pi+\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\} \setminus \{x\in\mathbb{R} : \sec x = -1\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x\neq k\pi+\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\} \setminus \{x\in\mathbb{R} : \cos x = -1\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x\neq k\pi+\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\} \setminus \{(2k+1)\pi : k\in\mathbb{Z}\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x\neq k\pi+\tfrac{\pi}{2} \text{ και } x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{1+\sec x}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{d}{dx}}\ \frac{\frac{d}{dx}(\sec x)(1+\sec x) - \sec x\,\frac{d}{dx}(1+\sec x)}{(1+\sec x)^2} =$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(\sec x)(1+\sec x)-\sec x\cdot\left(\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}(\sec x)\right)}{(1+\sec x)^2}$$

$$=\frac{\sec x\cdot\tan x(1+\sec x)-\sec x(0+\sec x\cdot\tan x)}{(1+\sec x)^2}=$$

$$=\frac{\sec x\cdot\tan x+\sec^2 x\tan x-\sec^2 x\tan x}{(1+\sec x)^2}=$$

$$=\frac{\sec x\cdot\tan x}{(1+\sec x)^2}$$

Προφανώς $D_{f'}=D_f$

(β) $g(t)=\dfrac{t^2+3}{\sin(t^2+1)}$

Έχουμε ότι

$$D_g=\{t\in\mathbb{R}:\sin(t^2+1)\neq 0\}$$
$$=\{t\in\mathbb{R}: t^2+1\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{t\in\mathbb{R}: t^2\neq k\pi-1, k\in\mathbb{Z}\}$$
φυσικός $\Rightarrow k\geq 1$
$$=\{t\in\mathbb{R}: t^2\neq k\pi-1, k\in\mathbb{N}\}$$
$$=\{t\in\mathbb{R}: t\neq\pm\sqrt{k\pi-1}, k\in\mathbb{N}\}$$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+3}{\sin(t^2+1)}\right)$$
$$=\frac{\frac{d}{dt}(t^2+3)\cdot\sin(t^2+1)-(t^2+3)\cdot\frac{d}{dt}(\sin(t^2+1))}{\sin^2(t^2+1)}=$$

$$=\frac{2t\cdot\sin(t^2+1)-(t^2+3)\cdot\frac{d}{dt}(\sin(t^2+1))}{\sin^2(t^2+1)}$$

$$= \frac{2t\sin(t^2+1) - (t^2+3)\cos(t^2+1)\cdot \frac{d}{dt}(t^2+1)}{\sin^2(t^2+1)}$$

$$= \frac{2t\sin(t^2+1) - (t^2+3)\cdot\cos(t^2+1)\cdot 2t}{\sin^2(t^2+1)}$$

$$= \frac{2t\sin(t^2+1) - (2t^3+6t)\cdot\cos(t^2+1)}{\sin^2(t^2+1)}$$

Προφανώς $D_{g'} = D_g$

(γ) <u>Άσκ</u>: Βρείτε το D_h

Έχουμε ότι

$$h'(v) = \frac{d}{dv}\left(v\cdot\tan(4v^2-9)\right) =$$

$$= \frac{d(v)}{dv}\cdot\tan(4v^2-9) + v\cdot\frac{d}{dv}\left(\tan(4v^2-9)\right)$$

$$= 1\cdot\tan(4v^2-9) + v\cdot\frac{d}{dv}\left(\tan(4v^2-9)\right)$$

$$= \tan(4v^2-9) + v\cdot\sec^2(4v^2-9)\cdot\frac{d}{dv}(4v^2-9)$$

$$= \tan(4v^2-9) + v\cdot\sec^2(4v^2-9)\cdot 8v$$

$$= \tan(4v^2-9) + 8v^2\sec^2(4v^2-9).$$

<u>Άσκ</u>: Βρείτε το $D_{h'}$

$\mathbb{N}: 1, 2, 3 \dots$

(δ) $\alpha(x) = \cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}) \cdot x$

$D_\alpha = [-1, \infty)$

Εχουμε δει

$\alpha'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}) \cdot x\right) =$

$= \frac{d}{dx}\left(\cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1})\right) \cdot x + \cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{d}{dx}(x)$

$= \frac{d}{dx}\left(\cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1})\right) \cdot x + \cos^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}) \cdot 1$

$= \frac{1}{3} \cos^{-2/3}(\sqrt{x+1}) \frac{d}{dx}\left(\cos(\sqrt{x+1})\right) \cdot x + \cos^{1/3}(\sqrt{x+1}) =$

$= \frac{1}{3} \cos^{-2/3}(\sqrt{x+1}) \cdot (-\sin(\sqrt{x+1})) \frac{d}{dx}(\sqrt{x+1}) \cdot x + \cos^{1/3}(\sqrt{x+1}) =$

$= -\frac{1}{3} \cos^{-2/3}(\sqrt{x+1}) \cdot \sin(\sqrt{x+1}) \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \frac{d}{dx}(x+1) \cdot x + \cos^{1/3}(\sqrt{x+1})$

$= -\frac{1}{6} \cos^{-2/3}(\sqrt{x+1}) \cdot \sin(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}} + \cos^{1/3}(\sqrt{x+1})$

Εχουμε δει

$D_{\alpha'} = (-1, \infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(\sqrt{x+1}) = 0\}$

$= (-1, \infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+1} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$

$= (-1, \infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : x+1 = (k\pi + \frac{\pi}{2})^2, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$

$= (-1, \infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = (k\pi + \frac{\pi}{2})^2 - 1, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$

(ε) $h(t) = \sqrt[3]{\tan t}$

$D_h = \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$h'(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt[3]{\tan t}) = \frac{d}{dt}\left((\tan t)^{1/3}\right) =$

$= \frac{1}{3}(\tan t)^{-2/3} \cdot \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{3}(\tan t)^{-2/3} \cdot \sec^2 t$

Έχουμε ότι

$$D_{h'} = \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{t \in \mathbb{R} : \tan t = 0\}$$

$$= \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ και } t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

στ) $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\cos^3 x)}}$

$D_v = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Έχουμε ότι

$$v'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{(\cos^3 x)}}\right) = \frac{d}{dx}\left((\cos x)^{-3/5}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}(\cos x)^{-8/5} \cdot \frac{d}{dx}\cos x = -\frac{3}{5}(\cos x)^{-8/5} \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot (\cos x)^{-8/5} \cdot \sin x$$

Προφανώς, $D_{v'} = D_v$.

<u>Άσκ3:</u> $f(x) = \sin(-2x)$

Έχουμε ότι

$$f^{0}(x) = f(x) = \sin(-2x) = (-2)^0 \sin(-2x)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin(-2x)) = \cos(-2x) \cdot \frac{d}{dx}(-2x) = -2\cos(-2x)$$

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d}{dx}(-2\cos(-2x)) = -2\frac{d}{dx}(\cos(-2x))$$

$$= -2(-\sin(-2x)) \cdot \frac{d}{dx}(-2x) = (-2)^2(-\sin(-2x))$$

$$f'''(x)=\frac{df''}{dx}=\frac{d}{dx}\left((-2)^2(-\sin(-2x))\right)=$$

$$=-(-2)^2\frac{d}{dx}(\sin(-2x))=-(-2)^2\cos(-2x)\cdot\frac{d}{dx}(-2x)$$

$$=(-2)^3\cdot(-\cos(-2x)),$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{df'''}{dx}=\frac{d}{dx}\left((-2)^3(-\cos(-2x))\right)=-(-2)^3\frac{d}{dx}(\cos(-2x))$$

$$=-(-2)^3(-\sin(-2x))\frac{d}{dx}(-2x)=(-2)^4\sin(-2x)$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-2)^n\cdot\sin(-2x) & ,n=4k\\ (-2)^n\cos(-2x) & ,n=4k+1\\ (-2)^n\cdot(-\sin(-2x)) & ,n=4k+2\\ (-2)^n\cdot(-\cos(-2x)) & ,n=4k+3\end{cases}$$

Άσκ4: Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=\tan(\alpha x)$ για $x=0$ είναι $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan(\alpha x))=\sec^2(\alpha x)\cdot\frac{d}{dx}(\alpha x)=\alpha\sec^2(\alpha x)$$

Επομένως,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\alpha\cdot\sec^2(\alpha\cdot 0)=\alpha\cdot 1=\alpha$$

Άρα, η εφαπτομένη της καμπύλης $y=\tan(\alpha x)$ για $x=0$ έχει κλίση $m_1=\alpha$

Η ευθεία $y=-4x$ έχει κλίση $m_2=\alpha$

Επομένως, για να είναι η εφαπτομένη της $y=\tan(\alpha x)$ για $x=0$ η $y=-4x$ πρέπει $\alpha=-4$.

Για $\alpha=-4$ η εφαπτομένη της $y=\tan(-4x)$ για $x=0$

έχει κλίση $m=-4$ και διέρχεται από το
$(0, \tan(-4\cdot 0)) = (0,0)$
Άρα, η εξίσωση της είναι $y-0=-4(x-0) \Leftrightarrow y=-4x$

<u>Άσκ5.</u> Η κάθετη σε μία καμπύλη σε ένα σημείο της (x_0,y_0) είναι η ευθεία η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης στο (x_0,y_0) και διέρχεται από το (x_0,y_0).

Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x+1}\right)=3\frac{d}{dx}(x+1)^{-1}$$

$$=3\cdot(-1)(x+1)^{-2}\frac{d}{dx}(x+1)=-\frac{3}{(x+1)^2}$$

Επομένως

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{3}{(0+1)^2}=-3.$$

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της $y=\frac{3}{x+1}$ για $x=0$ είναι $m_1=-3$.
Έστω m_2 η κλίση της κάθετης στην $y=\frac{3}{x+1}$ για $x=0$.

Εφόσον η εφαπτομένη και η κάθετη είναι κάθετες, θα ισχύει ότι $m_1\cdot m_2=-1$
Έχουμε ότι

$$m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow (-3)\cdot m_2=-1 \Leftrightarrow m_2=\frac{1}{3}$$

Κάθετη $\neq$ κατακόρυφης
$\downarrow$ $\perp$ εφαπτ $\qquad$ $\downarrow$ $\perp$ $x'x$

Για $x=0$, $y=\frac{3}{0+1}=3$.

Άρα, η κάθετη έχει κλίση $m_2=\frac{1}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $(0,3)$.
Επομένως, η εξίσωση της είναι
$y-3=\frac{1}{3}(x-0) \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+3$.

Άσκ 6: Έχουμε ότι
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1+\cos x)=\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$
Επομένως, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/2}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.
Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της $y=1+\cos x$ για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $m_1=-1$
Έστω m_2 η κλίση της καθέτης στην $y=1+\cos x$ για $x=\frac{\pi}{2}$.

Εφόσον, η εφαπτομένη και η κάθετη είναι κάθετες θα ισχύει ότι $m_1 \cdot m_2=-1$
Έχουμε ότι $m_1 \cdot m_2=-1 \Leftrightarrow (-1)m_2=-1 \Rightarrow m_2=1$

Για $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1+\cos(\frac{\pi}{2})=1$.

Άρα, η εφαπτομένη έχει κλίση $m_1=-1$ και διέρχεται από το σημείο $(\pi/2,1)$.
Άρα η εξίσωση της είναι
$y-1=-1(x-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow y=-x+(\frac{\pi}{2}+1)$

Η κάθετη έχει κλίση $m_2=1$ και διέρχεται από το σημείο $(\pi/2,1)$
Επομένως, η εξίσωση της είναι $y=x+(1-\frac{\pi}{2})$

'Ασκ 7: 'Εχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(-3x)) = \cos(-3x)\cdot\frac{d}{dx}(-3x) = -3\cdot\cos(-3x)$$

Επομένως $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/6} = -3\cos\left(-3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = -3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

'Αρα, η κλίση της εφαπτομένης της $y=\sin(-3x)$ για $x=\frac{\pi}{6}$ είναι $m=0$

Εφόσον $m=0$, η εφαπτομένη είναι οριζόντια ευθεία. Εφόσον η κάθετη είναι κάθετη στην εφαπτομένη και η εφαπτομένη είναι οριζόντια ευθεία, η κάθετη θα είναι κατακόρυφη ευθεία.

Για $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\sin\left(-3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Η εφαπτομένη είναι η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(\pi/6, -1)$.
'Αρα, η εξίσωση της είναι $y=-1$.

Η κάθετη είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(\pi/6, -1)$.
'Αρα, η εξίσωση της είναι $x=\frac{\pi}{6}$

'Ασκ 8: Από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης παίρνουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=6\sin x+2x}\cdot\frac{du}{dx}$$

'Εχουμε ότι

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(3u^2+7) = 6u$$

Άρα,

$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=6\sin x+2x} = 6(6\sin x+2x) = 36\sin x+12x$$

Έχουμε ότι

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(6\sin x+2x) = 6\cos x+2$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = (36\sin x+12x)(6\cos x+2)$$

$$= 216\sin x\cos x + 72x\cdot\cos x + 72\sin x + 24x$$

Άσκ 9: Από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης παίρνουμε ότι

$$\frac{ds}{dt} = \left.\frac{ds}{dx}\right|_{x=\cot(3t^2-1)} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Έχουμε ότι

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{5/2}\right) = \frac{5}{2}(x^2+1)^{3/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1) =$$

$$= \frac{5}{2}(x^2+1)^{3/2}\cdot 2x = 5(x^2+1)^{3/2}\cdot x$$

Άρα,

$$\left.\frac{ds}{dx}\right|_{x=\cot(3t^2-1)} = 5\left(\cot^2(3t^2-1)+1\right)^{3/2}\cdot\cot(3t^2-1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \\ 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta \end{array}\right]$$

$$= 5\left(\csc^2(3t^2-1)\right)^{3/2}\cdot\cot(3t^2-1) = \qquad (\alpha^2)^{3/2} = \left(\sqrt{\alpha^2}\right)^3 = |\alpha|^3$$

$$= 5\left|\csc(3t^2-1)\right|^3\cot(3t^2-1).$$

Έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\cot(3t^2-1))$$

$$= -\csc^2(3t^2-1)\cdot\frac{d}{dt}(3t^2-1) =$$

$$= 6\csc^2(3t^2-1)\cdot t$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\frac{ds}{dt} = 5|\csc(3t^2-1)|^3\cdot\cot(3t^2-1)\left(-6\csc^2(3t^2-1)\cdot t\right)$$

$$= -30|\csc(3t^2-1)|^5\cdot\cot(3t^2-1)\cdot t.$$

Ασκ10: Από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης παίρνουμε ότι

$$\frac{dy}{d\theta} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sin(-9\theta)}\cdot\frac{dx}{d\theta}$$

Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan(\sec x))$$

$$= \sec^2(\sec x)\cdot\frac{d}{dx}(\sec x) =$$

$$= \sec^2(\sec x)\cdot\sec x\cdot\tan x$$

Άρα, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sin(-9\theta)} = \sec^2\left(\sec(\sin(-9\theta))\right)\cdot\sec(\sin(-9\theta))\cdot\tan(\sin(-9\theta)).$

Έχουμε ότι

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\sin(-9\theta)) = \cos(-9\theta)\cdot\frac{d}{d\theta}(-9\theta)$$

$$= -9\cdot\cos(-9\theta).$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\frac{du}{d\theta} = \sec^2(\sec(\sin(-9\theta)))\cdot\sec(\sin(-9\theta))\tan(\sin(-9\theta))\cdot(-9\cos(-9\theta))$$

$$= -9\sec^2(\sec(\sin(-9\theta)))\cdot\sec(\sin(-9\theta))\cdot\tan(\sin(-9\theta))\cdot\cos(-9\theta).$$

Σπίτι: 2η Εργ. Εξ. 6/11/17

1) $f(x)=x^{\frac{5}{9}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac{5}{9}}}{x^{\frac{9}{9}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{4/5}}=\infty$$

Δεν είναι παρ στο 0

2) $g(x)=|2x-4|=2|x-2|$

(α) $\lim_{x\to2^-}\frac{2|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}=-2$

Άρα, $g'_-(2)=-2$

ομοίως $g'_+(2)=2$

β) Όχι γιατί $g'_-(2)\neq g'_+(2)$

3) $y=\frac{\cos(2x)-3x^2}{\sin^2x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-2\sin(2x)-6x)\cdot\sin^2x-2\sin x\cos x(\cos(2x)-3x^2)}{\sin^4x}$$

$$=\frac{\sin x(-2\sin x(\sin(2x)-3x)-2\cos x(\cos(2x)-3x^2)}{\sin^4x}$$

$$=\frac{-2(\sin x(\sin(2x)-3x)+\cos x(\cos(2x)-3x^2)}{\sin^3x}$$

Για $x=\frac{\pi}{2}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/2}=\frac{-2\left(-\frac{3\pi}{2}+0\right)}{1}=3\pi$

και $y=\frac{\cos\pi-3\pi^2/4}{\sin^2(\pi/2)}=\frac{-1-3\pi^2/4}{1}=-(1+3\pi^2/4)$

Άρα, η εφαπτομένη της $y=\frac{\cos(2x)-3x^2}{\sin^2x}$ έχει κλίση $m=3\pi$ και διέρχεται

από το σημείο $(\pi/2,-(1+3\pi^2/4))$. Η εξίσωση της είναι