7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκ1 (α) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\alpha x + b) = \alpha\cdot 0 + b = b$

και ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\cancel{\alpha x+b}\ 2x^2 + \alpha) = 2\cdot 0^2 + \alpha = \alpha$

Επομένως τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για οποιαδήποτε

$\alpha, b \in \mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \Leftrightarrow b = \alpha$

Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha, b \in \mathbb{R}$ με $\alpha = b$

Αν $\alpha = b$ τότε

$\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha \ (= b)$

(β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και

$\lim_{x\to 0} \cancel{f(x)} = f(0)$

Από το (α), το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha, b \in \mathbb{R}$ με $\alpha = b$

Αν $\alpha = b$ τότε

$\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$

Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 2$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=0$ για $\alpha = b = 2$

Άσκ2: (α) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax^4}{3} + bx + \frac{\sin(\alpha x)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax^4}{3} + bx\right) + \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \frac{a\cdot 0^4}{3} + b\cdot 0 + a$$

$$= a$$

και δει

$$\lim_{x\to 0^+}\left(ax^2 + b\cos(bx) + 2b\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(ax^2 + 2b\right) + b\lim_{x\to 0^+}\cos(bx) =$$

$$= a\cdot 0^2 + 2b + b\cdot\lim_{x\to 0^+}\cos(bx)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = bx \\ x\to 0^+ \Rightarrow bx \to \begin{cases} 0^+, & b\geq 0 \\ 0^-, & b<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\to 0^+, & b\geq 0 \\ y\to 0^-, & b<0 \end{cases} \end{array}\right]$$

$$= 2b + b\cdot\begin{cases} \lim_{y\to 0^+}\cos y, & b\geq 0 \\ \lim_{y\to 0^-}\cos y, & b<0 \end{cases}$$

$$= 2b + b\cdot 1 = 3b$$

Επομένως τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για όλα

τα $a, b\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 3b$

Άρα, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha, b \in \mathbb{R}$ με $\alpha = 3b$

Αν $\alpha = 3b$, τότε
$\lim_{x\to 0} f(x) = 3b (=\alpha)$

(β) Η $f(x)$ είναι ~~συνεχ~~ συνεχής εάν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$
και $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

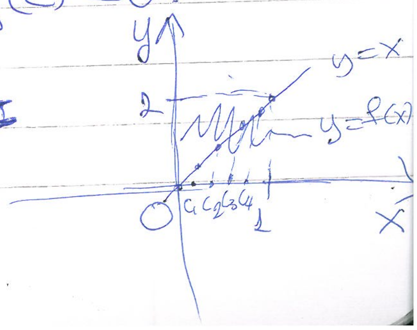
Από το (α), το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha, b \in \mathbb{R}$ με $\alpha = 3b$

Αν $\alpha = 3b$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 3b$ $(=\alpha)$

Επιπλέον,
$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 3b = 3 \Leftrightarrow b = 1$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=0$ για $\alpha = 3$ και $b = 1$

Ασκ3: Έστω $g(x) = f(x) - x$
Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και η $h(x) = x$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, η $g(x) = f(x) - h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Έχουμε ότι
$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$
και ότι
$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ $[f(1) \leq 1 \Rightarrow f(1) - 1 \leq 0]$
Εφόσον η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
$g(0) \geq 0$ και $g(1) \leq 0$ από το θεωρ. ενδ. τιμών,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in [0,1]$ τ.ω. $g(c) = 0$.



Όμως, $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$

Ασκ4: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to a+2k\pi} \sin x =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = x-2k\pi \\ x\to a+2k\pi \Rightarrow x-2k\pi \to a \Rightarrow y\to a \\ y = x-2k\pi \Rightarrow x = y+2k\pi \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y\to a} \sin(y+2k\pi) = \lim_{y\to a} \sin y$$

(γιατί $\sin\theta$ περιοδική με $T=2\pi \Rightarrow \sin(\theta+2k\pi) = \sin\theta$, $k\in\mathbb{Z}$)

Ασκ5: (α) $\lim_{x\to \pi/2} \sin x =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = x-\pi/2 \\ x\to \pi/2 \Rightarrow x-\pi/2 \to 0 \Rightarrow y\to 0 \\ y = x-\pi/2 \Rightarrow x = y+\pi/2 \end{array}\right]$$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B$

$$\lim_{y\to 0} \sin(y+\pi/2) = \lim_{y\to 0}\left(\sin y\cdot\cos(\pi/2) + \cos y\cdot\sin(\pi/2)\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\sin y\cdot 0 + \cos y\cdot 1\right) = \lim_{y\to 0}\cos y = 1$$

Ασκ6: (α) Έστω $f(x) = \sin x$

προφανώς $D_f = \mathbb{R}$

Για να δείξω ότι η $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής πρέπει να δείξω ότι είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

Άρα, πρέπει ν.δ.ο για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$

Έχουμε ότι $\lim_{x\to x_0} \sin x$

θέτω $y=x-x_0$

Αν $x\to x_0 \Rightarrow x-x_0\to 0 \Rightarrow y\to 0$

$y=x-x_0 \Rightarrow x=y+x_0$

$$\lim_{y\to 0}\sin(y+x_0)=\lim_{y\to 0}(\sin y\cos x_0+\sin x_0\cos y)=$$

$$=\cos x_0\cdot\lim_{y\to 0}\sin y+\sin x_0\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=$$

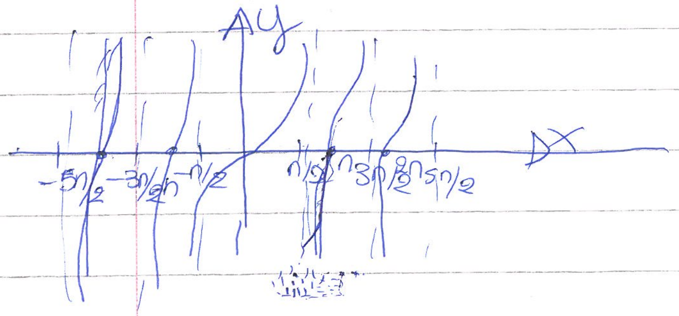
$$=\cos x_0\cdot 0+\sin x_0\cdot 1=\sin x_0$$

Άρα, η $f(x)=\sin x$ είναι συνεχής

Ασκ 7: (α) Έστω $f(x)=\tan x$,

Γνωρίζουμε ότι

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq k\pi+\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$



Από την Ασκ 6 (γ), η $f(x)$ είναι συνεχής στο D_f.

Άρα, οι πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y=\tan x$ είναι οι $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Έστω $k\in\mathbb{Z}$.

$$\lim_{x\to k\pi+\pi/2^-}\tan x$$

θέτω $y=x-k\pi$

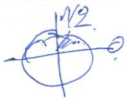
$x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^- \Rightarrow x-k\pi\to \pi/2^- \Rightarrow y\to \pi/2$

$y=x-k\pi \Rightarrow x=y+k\pi$

$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(y+k\pi)$$

$\tan\theta$ περιοδική με περίοδο π $\Rightarrow$ $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$, για $k\in\mathbb{Z}$

$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\tan y=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin y}{\cos y}$$



$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\Rightarrow |\cos^2 y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$

Για $0 < y < \pi/2$, $\cos y > 0$ και άρα $|\cos y| = \cos y$

Επομένως, για $0 < y < \pi/2$,
$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

$$= \lim_{y \to \pi/2^-} \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

[Θέτω $z = \sin y$
$y \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \sin y \to 1^- \Rightarrow z \to 1^-$]

$$\lim_{z\to 1^-} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \lim_{z\to 1^-} \frac{z}{\sqrt{1+z}} \cdot \lim_{z\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-z}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \infty = \infty$$ [Άσκηση: Κάντε το αναλυτικά]

Άρα, η $x = k\pi + \pi/2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = \tan x$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

Σημείωση: Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πάρουμε το
$\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

Ασκ: Υπολογίστε το

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 29/10/2018

Άσκ 1: (α) Για $x \neq 0$,

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$$

για $x \neq 0$

Άρα, $0 \cdot |x| \leq |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot 1$

Επομένως, για $x \neq 0$,

$$0 \leq \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|. \quad (*)$$

Έχουμε ότι

$\lim_{x \to 0} 0 = 0$ (**) και ότι $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ (***)

Από τις (*), (**) (***) και το θεώρημα Σάντουιτς παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0.$$

Επομένως, $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Άρα, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

Επομένως, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Άρα, το

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$ δεν υπάρχει.

Επομένως η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Σημ.: (α) Προφανώς εναλλακτικά θα μπορούσα να πάρω

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

(β) Εφόσον τα $\lim_{x\to 0^-} \sin(\frac{1}{x})$ και $\lim_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ δεν υπάρχουν η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο 0.

Άσκ2: Σημείωση: Από άσκηση 9/φυλ.2 $\lim_{x\to 0} x^2\sin(\frac{1}{x})=0$ Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(\frac{1}{h})-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cdot\sin(\frac{1}{h})=0$$ [από Άσκ 1(α)]

Επομένως, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=0$

Σημ.: Προφανώς θα μπορούσαμε να πάρουμε και το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Άσκ3: Σημ.: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 ως απολ + πολυων.

$$f(x)=\begin{cases} -x^3 & x<0 \\ x^3 & x\geq 0 \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(-x^2)=0$$

Σημ.: θα μπορούσα να πάρω $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

Άρα, $f'_-(0)=0$

Έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

Επομένως, $f'_+(0)=0$.

Εφόσον, οι $f'_-(0)$ και $f'_+(0)$ υπάρχουν και $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0. και $f'(0)=0$

Ασκ4: Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{\frac{3}{5}}-0}{x} = \lim_{x\to 0} -x^{-\frac{2}{5}}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Εφόσον, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Σημ.: Εφόσον $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ η $y=f(x)$ έχει

κατακόρυφη εφαπτομένη στο $(0,0)$ (σημείο)

Ασκ5: Σημ.: η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\frac{1}{4}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-3/4} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = -\infty$$

Εφόσον $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ δεν υπάρχει η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Σημ(α) Εναλλακτικά, θα μπορούσα να πάρω ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty.$$

(β) Εφόσον $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\infty$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \infty$

η $y=f(x)$ έχει σημείο ανάκαμψης στο $(0,0)$.

Ασκ6: Έχουμε ότι
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9$

και ότι $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x = 6$

Εφόσον $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9 \neq 6 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.

Άρα, το $\lim_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει.

Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο 3
Επομένως, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Ασκ7: Σημ. η $f(x)$ είναι συνεχής στο 2.
Έχουμε ότι
$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2^-} (x^2+2x+4) = 12$

Άρα, $f'_-(2) = 12$
Έχουμε ότι $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(2+h)-8}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{8+4h-8}{h} = \lim_{h\to 0^+} 4 = 4.$

Άρα, $f'_+(2) = 4$
Εφόσον, $f'_-(2) = 12 \neq 4 = f'_+(2)$, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

Σημείωση: Εφόσον οι $f'_-(2)$ και $f'_+(2)$ υπάρχουν και $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, η $y=f(x)$ σχηματίζει γωνία στο $(2,8)$.

Άσκ. 8: (α) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0 πρέπει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Εφόσον $|f(x)| \leq |x^3|$, για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$,

$$|f(0)| \leq |0^3|$$

και άρα $0 \leq |f(0)| \leq 0$

Επομένως $|f(0)| = 0$ και άρα $f(0) = 0$

Έχουμε ότι, για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$

$0 \leq |f(x)| \leq |x|^3$ (*)

Επίσης έχουμε ότι

(**) $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ και ότι $\lim_{x\to 0} |x|^3 = 0$ (***)

Από τις (*), (**), (***) και το θεώρημα Sandwich παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

Άρα, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(β) Έχουμε ότι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Γνωρίζουμε ότι για $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$,

$0 \leq |f(x)| \leq |x|^3$

Άρα $\frac{0}{|x|} \leq \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|^3}{|x|}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$

Επομένως,

$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq x^2$, για $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$ (+)

Έχουμε ότι

(++) $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ και ότι $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (+++)

Από (+), (++), (+++) και το θεώρημα Σάντουιτς παίρνουμε ότι $\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0$

Άρα, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$

Επομένως, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=0$

Άσκ 9: (α) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο 0 πρέπει να υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και να ισχύει ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(ax^2) = 0$ και ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(bx+c) = c$

Άρα, τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Επίσης, έχουμε ότι

$f(0)=0$.

Άρα, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 0 = c = 0$

Επομένως, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 για $a, b \in \mathbb{R}$ και $c=0$.

(β) Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει η $f(x)$ να είναι συνεχής στο 0

Άρα, από το (α) πρέπει το $c=0$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\leq 0 \\ bx, & x>0 \end{cases}$$

Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει να υπάρχουν οι $f'_-(0)$ και $f'_+(0)$ και να ισχύει ότι $f'_-(0)=f'_+(0)$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}ax=0$$

Άρα, $f'_-(0)$ υπάρχει για $a,b\in\mathbb{R}$ και $f'_-(0)=0$

και ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}b=b$$

Άρα, η $f'_+(0)$ υπάρχει για $a,b\in\mathbb{R}$ και $f'_+(0)=b$

Επομένως

$f'_-(0)=f'_+(0)\Leftrightarrow 0=b$

Άρα, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 για $a\in\mathbb{R}$ και $b=c=0$.

Άσκ. 10: Για νδο. η $f'(x)$ είναι άρτια πρέπει νδο.

$f'(-x)=f'(x)$, για $x\in D_{f'}=D_f$.

Έστω $x_0\in D_{f'}=D_f$.

Θ.δ.ο. $f'(-x_0)=f'(x_0)$.

Έχουμε ότι

$$f'(-x_0)=\lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)}$$

[Θέτω $u = -x \Rightarrow x \to -x_0 \Rightarrow -x \to x_0$]
$u \to x_0$

$$\lim_{u \to x_0} \frac{f(-u) - f(-x_0)}{-u-(-x_0)} =$$

[$f(x)$ περιττή $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$]

$$= \lim_{u \to x_0} \frac{-f(u) - (-f(x_0))}{-u-(-x_0)} =$$

$$= \lim_{u \to x_0} \frac{-(f(u) - f(x_0))}{-(u-x_0)} = \lim_{u \to x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} = f'(x_0)$$

Άρα, $f'(x)$ είναι άρτια.

Ασκ 12: Έστω ότι υπάρχει κάποια $f(x)$ με $D_f = [-3, 2]$ τ.ω.

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le -1 \\ x-4, & -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Τότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για παραγώγους η $f'(x)$ πρέπει να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f'(-3) = 9$ και $f'(2) = -2$.

$f'(-1) = 1$

Άτοπο, γιατί δεν παίρνει ~~ποτέ~~ την τιμή 0

Άρα, δεν υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ με $D_f = [-3, 2]$ τ.ω.

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le -1 \\ x-4, & -1 < x \le 2 \end{cases}$$

Συγγραφέας: Thomas παλαιότερη έκδοση (προτείνει)