15/10/2018

5° Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκ 1 (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^{r_n} + a_{n-1}x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n \cdot \frac{x^{r_n}}{x^{r_n}} + a_{n-1}\cdot\frac{x^{r_{n-1}}}{x^{r_n}} + \dots + a_2\cdot\frac{x^{r_2}}{x^{r_n}} + a_1\cdot\frac{x^{r_1}}{x^{r_n}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n + a_{n-1}\cdot x^{r_{n-1}-r_n} + \dots + a_2 x^{r_2-r_n} + a_1 x^{r_1-r_n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(\lim_{x\to\infty} a_n + a_{n-1}\lim_{x\to\infty} x^{r_{n-1}-r_n} + \dots + a_2 \lim_{x\to\infty} x^{r_2-r_n} + a_1\cdot \lim_{x\to\infty} x^{(r_1-r_2)}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n + a_{n-1}\cdot 0 + \dots + a_2\cdot 0 + a_1\cdot 0\right) = a_n \lim_{x\to\infty} x^{r_n}$$

$$\left[\begin{array}{l} r_n > r_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_i - r_n < 0, \text{ για } i = 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{r_i - r_n} = 0 \end{array}\right]$$

Ασκ 2) (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= a_n \lim_{x\to\infty} x^n \quad [\text{από } 1(α)]$$

$$= \infty \cdot a_n = a_n \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

(β) Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + a_1 x + a_0\right) = [\text{από Ασκ 1 (β)}]$$

$$= a_n \cdot \lim_{x\to-\infty} x^n = a_n \cdot \begin{cases} \infty, & \text{αν } n = 2m \text{ (άρτιος)} \\ -\infty, & \text{αν } n = 2m+1 \text{ (περιττός)} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \alpha\nu\ n=2m \text{ και } a_n>0 \\ -\infty, & \alpha\nu\ n=2m \text{ και } a_n<0 \\ -\infty, & \alpha\nu\ n=2m+1,\ a_n>0 \\ \infty & \alpha\nu\ n=2m+1,\ a_n<0 \end{cases}$$

Ασκ3: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}-3\sqrt[3]{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(4x^{\frac{1}{3}}+x^{-7/5}-3x^{\frac{2}{3}}\right)= \quad [\text{από Ασκ } 1(б)]$$

$$=-3\lim_{x\to-\infty}x^{\frac{2}{3}}=-3\cdot\infty=-\infty$$

2ος τρόπος: Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο

Ασκ: Κάντε το

б) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt[8]{x^9}+\frac{4}{x^{13}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x^1-x^{\frac{9}{8}}+4\cdot x^{-13}\right)= \quad [\text{Από } 1(\alpha)]$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x^{9/8}=-\infty$$

Ασκ4: (б) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^{r_n}+a_{n-1}x^{r_{n-1}}+\dots+a_2x^{r_2}+a_1x^{r_1}}{b_mx^{s_m}+b_{m-1}x^{s_{m-1}}+\dots+b_2x^{s_2}+b_1x^{s_1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{r_n}\left(a_n+a_{n-1}x^{r_{n-1}-r_n}+\dots+a_2x^{r_2-r_n}+a_1x^{r_1-r_n}\right)}{x^{s_m}\left(b_m+b_{m-1}x^{s_{m-1}-s_m}+\dots+b_2x^{s_2-s_m}+b_1x^{s_1-s_m}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{r_n}}{x^{s_m}}\cdot\frac{\lim_{x\to-\infty}(a_n)+\lim_{x\to-\infty}a_{n-1}x^{r_{n-1}-r_n}+\dots+a_2\lim_{x\to-\infty}x^{r_2-r_n}+a_1\lim_{x\to-\infty}x^{r_1-r_n}}{\lim_{x\to-\infty}b_m+b_{m-1}\lim_{x\to-\infty}x^{s_{m-1}-s_m}+\dots+b_2\lim_{x\to-\infty}x^{s_2-s_m}+b_1\lim_{x\to-\infty}x^{s_1-s_m}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{r_n}}{x^{s_m}} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + \dots + b_2 \cdot 0 + b_1 \cdot 0}$$

$r_n > r_i$, για $i = 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow r_i - r_n < 0$ για $i = \dots$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} x^{r_i - r_n} = 0$, για $i = \dots$

$s_m > s_j$ για $j = 1, 2, \dots, m-1 \Rightarrow s_j - s_m < 0$ για $j = \dots$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} x^{s_j - s_m} = 0$, για $j = \dots$

Τελικά, $= \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n \cdot x^{r_n}}{b_m x^{s_m}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to -\infty} x^{r_n - s_m}$

Ασκ5: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^1} + \sqrt[3]{x^2}}{x-9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^1 - 9 \cdot x^0} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{2/3}}{x^1} = \lim_{x \to -\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \quad \text{[Από Ασκ. 4(β)]}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

2ος τρόπος: διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρανομαστή.

Ασκ: Κάντε το και έτσι

β) $$\lim_{x \to \infty} \frac{-8\sqrt[6]{x^1} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}}{\frac{9}{x} - 2\sqrt[6]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-8x^{1/6} + 5x^{-3/4}}{9 \cdot x^{-1} - 2x^{1/6}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-8x^{1/6}}{-2x^{1/6}} = \lim_{x \to \infty} 4 \cdot x^{1/6 - 1/6} \quad \text{[από Ασκ 4(α)]}$$

$$= \lim_{x \to \infty} 4 = 4$$

2ος τρόπος διαιρώ αρ. + παρ. με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρανομαστή

$2-\frac{8}{6}=\frac{12-8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

γ) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[9]{x^2}-3x^2}{\frac{2}{x^2}+12\sqrt[6]{x^8}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^{\frac{5}{3}}-2\cdot x^{\frac{2}{9}}-3x^2}{2\cdot x^{-2}+12\cdot x^{\frac{8}{6}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{12x^{8/6}}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to-\infty}x^{\frac{2}{3}}$$ [από Ασκ 4(β)]

$$=-\frac{1}{4}\cdot\infty=-\infty$$

2ος τρόπος Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή.

Ασκ6: Έχουμε ότι

(α) $$\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+2x-3}{5x^3-7x}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+2x-3}{x(5x^2-7)}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+2x-3}{5x^2-7}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{3\cdot0^2+2\cdot0-3}{5\cdot0^2-7}=\frac{3}{7}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=\frac{3}{7}\cdot-\infty=-\infty$$

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^7}+8x^2}{-3x+8\sqrt[5]{x^{12}}-7\cdot\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\cdot x^{1/3}-3x^{7/3}+8x^2}{-3x+8x^{12/5}-7x^{1/3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/3}\left(2-3x^2+8x^{5/3}\right)}{x^{1/3}\left(-3x^{2/3}+8x^{31/15}-7\right)}=$$

$\frac{12}{5}-\frac{1}{3}=$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2-3x^2+8x^{5/3}}{-3x^{2/3}+8x^{31/15}-7}=\frac{\lim_{x\to0^+}\left(2-3x^2+8x^{5/3}\right)}{\lim_{x\to0^+}\left(-3x^{2/3}+8x^{31/15}-7\right)}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to0^+}2-3\lim_{x\to0^+}x^2+8\lim_{x\to0^+}x^{5/3}}{-3\lim_{x\to0^+}x^{2/3}+8\lim_{x\to0^+}x^{31/15}-\lim_{x\to0^+}7}=\frac{2-3\cdot0+8\cdot0}{-3\cdot0+8\cdot0-7}=-\frac{2}{7}$$

Παρατήρηση: Και στο (α) και στο (β) βγάλαμε από αριθμητή/παρονομαστή κοινό παράγοντα τον όρο μικρότερου βαθμού του αριθμητή και παρονομαστή.

! {Στα $x \to x_0$ παίρνουμε τον μικροβάθμιο
Στα $x \to \pm\infty$ παίρνουμε μεγιστοβάθμιο κοινό παράγοντα}

Άσκηση 7: (α) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x-2)^2+3(x-2)^7}{-6(x-2)^{7/3}+5(x-2)}$

[Θέτω $y = x-2$
$x \to 2^- \Rightarrow x-2 \to 0^- \Rightarrow y \to 0$]

$$\lim_{y \to 0^-} \frac{2y^2+3y^7}{-6y^{7/3}+5y} = \lim_{y \to 0^-} \frac{y^2(2+3y^5)}{y(-6y^{4/3}+5)} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} y \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{2+3y^5}{-6y^{4/3}+5} = 0 \cdot \frac{2+3 \cdot 0^5}{-6 \cdot 0^{4/3}+5} = 0 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

(β) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{5|x+3|^2+9|x+3|^{1/2}}{2|x+3|^7-11|x+3|^6}$

! [Θέτω $y = |x+3|$
$x \to -3^-$ $x+3 \to 0^- \Rightarrow |x+3| \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$]

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{5y^2+9y^{1/2}}{2y^7-11y^6} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{1/2}(5y^{3/2}+9)}{y^6(2y-11)} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y^{11/2}} \cdot \lim_{y \to 0^+} \frac{5y^{3/2}+9}{2y-11} = \infty \cdot \frac{5 \cdot 0^{3/2}+9}{2 \cdot 0-11} =$$

$$= \infty(-9/11) = -\infty$$

Άσκ 8: Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^5} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \cdot (-\infty) =$$

[Θέτω $y = x^4$ $x \to 0^- \Rightarrow x^4 \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$]

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} \cdot (-\infty) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

Άσκ 9: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} x \cdot \sin(1/x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}}.$$

[Θέτω $y = \frac{1}{x}$, $x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow y \to 0^-$]

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin y}{y} = \underline{1}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\cos(1/x^3)}{x^4} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^4} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^4 \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$$

[Θέτω $y = \frac{1}{x}$ $x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$]

$$\lim_{y\to 0^+} y^4 \cdot \cos(y^3) = \lim_{y\to 0^+} y^4 \cdot \lim_{y\to 0^+} \cos(y^3) = 0^4 \cdot \cos(0^3)$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

[$\cos(y^3)$ συνεχής]

Ασκ 10: Έχουμε ότι

$$-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \quad x \in (-517,0) \quad (*)$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}(-1/x^2) = -\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = -\infty \quad (**)$$

και ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \quad (***)$

Από (*), (**), (***) και το θεώρημα σύγκρισης παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Ασκ 11: (α) Για $x\in\mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1.$$

Για $x < -\frac{1}{4}$, $4x+1<0$

Άρα,

$$\frac{1}{4x+1} \leq \frac{\cos(3x)}{4x+1} \leq -\frac{1}{4x+1}, \quad \text{για } x<-\frac{1}{4} \quad (*)$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{4x+1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{4x} = 0 \quad (**)$$

και ότι

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{4x+1}\right) = -\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{4x} = -0 = 0 \quad (***)$$

Από τις (*), (**), (***) και το θεωρ. σύγκρισης παίρνουμε $\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos(3x)}{4x+1} = 0$

(β) Γνωρίζουμε ότι
$-1 \leq \sin(5x^2-12x+9) \leq 1$, για $x \in \mathbb{R}$.

Για $x>2$, $-x^4+16<0$
Άρα,

$(*)$ $$\frac{1}{-x^4+16} \leq \frac{\sin(5x^2-12x+9)}{-x^4+16} \leq -\frac{1}{-x^4+16}, \text{ για } x \geq 2$$

Έχουμε ότι
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4+16} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4} = \cancel{-\infty}\ 0 \quad (**)$$

και ότι
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{-x^4+16} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4} = -0 = 0 \quad (***)$$

Από $(*)$, $(**)$ και $(***)$ παίρνουμε
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(5x^2-12x+9)}{-x^4+16} = 0.$$

Πρόοδος: Τετάρτη

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 16/10/2018

Ασκ1: Έστω

$f(x)=\frac{x}{x+4}$

Προφανώς $D_f=(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to-\infty}1=1$

και ότι

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}1=1$

Άρα, η $y=\frac{x}{x+4}$ έχει μια οριζόντια ασύμπτωτη, την $y=1$

Ασκ2: Έστω

$f(x)=\frac{2x^3+7}{x^2-2}$

Έχουμε ότι $x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Και άρα $D_f=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7}{x^2-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=$

$=2\lim_{x\to-\infty}x=2\cdot(-\infty)=-\infty$

και ότι

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}2x=2\lim_{x\to\infty}x=2\cdot\infty=\infty$

Επομένως, η $y=\frac{2x^3+7}{x^2-2}$ δεν έχει καμία οριζόντια ασύμπτωτη.

Άσκ3:

Έστω $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$.

Έχουμε ότι $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Επομένως, $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

Η $f(x)$ είναι ρητή άρα η $f(x)$ είναι συνεχής σε όλα τα $x\in D_f$

Επομένως, πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$ είναι οι $x=-3$ και $x=3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{-3-3}=-\frac{1}{6}.$$

Άρα, η $x=-3$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=$$

[Θέτω $y=x-3$, $x\to 3^- \Rightarrow x-3\to 0^- \Rightarrow y\to 0^-$]

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{y}=-\infty$$

Άρα, η $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$.

Δεν χρειάζεται για $x=3^+$ ~~έν~~

Σημείωση: Εναλλακτικά θα μπορούσα να πάρω ότι $\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x^2-9}=\infty$.

Ασκ 4:

Έστω $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Έχουμε ότι

$x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$|x|>1 \Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1$

Επομένως, $D_f = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

• Οριζόντιες Ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-1/x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} =$$

$\left[\text{Για } x<0 \Rightarrow |x|=-x\right]$ $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-1/x^2}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1-0}} = -1$$

Και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1-1/x^2)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(1-1/x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-1/x^2}}$$ $\left[x>0 \Rightarrow |x|=x\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} 1/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

Άρα, η $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες τις

$y=-1$ και $y=1$

• Κατακόρυφες Ασύμπτωτες
Η f(x) είναι συνεχής στο D_f
Άσκηση: Αποδείξτε το αναλυτικά

Άρα, πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ είναι

η $x=-1$ και $x=1$

Έχουμε ότι (από δεξιά του -1 δεν ορίζεται)

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to -1^-}x\cdot\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=-1\cdot\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

[Θέτω $y=x^2-1$, $x\to -1^- \Rightarrow x^2-1\to 0^+$
$x^2\to 1^+ \Rightarrow x^2-1\to 0^+ \Rightarrow y\to 0^+$]

$$=-\cancel{\lim_{x\to -1}}=-\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{y}}=-\infty$$

Επομένως η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}x\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

[Θέτω $y=x^2-1$ $x\to 1^+\Rightarrow x^2\to 1^+\Rightarrow x^2-1\to 0^+\Rightarrow y\to 0^+$]

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{y}}=\infty$$

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

8:45 για την περίοδο

Άσκ5: Έστω $f(x)=x\cdot\sin(\frac{1}{x})$

Προφανώς $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

η $g(x)=x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι πολυωνυμική

η $h_1(x)=\sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι τριγωνομετρική

η $h_2(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*=D_{h_2}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ γιατί είναι ρητή

Άρα, η $h(x)=(h_1\circ h_2)(x)=\sin(1/x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Εφόσον η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επομένως, η $y=x\cdot\sin(1/x)$ έχει μια πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$

Γνωρίζουμε ότι

$$0\le\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1, \text{ για } x\neq 0$$

Άρα,

$$0\le\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|, \text{ για } x\neq 0. \quad (*)$$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to 0} 0=0$ (**) και ότι $\lim_{x\to 0}|x|=0$ (***)

Από τις (*), (**) και (***) και το θεώρημα Σάντουιτς το $\lim_{x\to 0}\left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=0$

Άρα, $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Επομένως, η $y=x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν έχει καμία κατακόρυφη ασύμπτωτη.