10/10/2018

3° Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκ 1: Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(3x-2) = 3\cdot 4-2=10$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} x^2 = 4^2=16$$

Εφόσον $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 10 \neq 16 = \lim_{x\to 4^+} f(x)$,

τότε $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν υπάρχει

Ασκ 2: (α) το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν

τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και είναι ίσα

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$$= \lim_{x\to 0^-}(2x^2+3x-a) = +2\cdot 0^2+3\cdot 0-a = -a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(bx^2+2b) = b\cdot 0^2+2b=2b$$

Επομένως, τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για

οποιαδήποτε $a,b\in\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ αν και μόνο αν

$-a=2b$

Επομένως, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $a,b\in\mathbb{R}$ με $-a=2b$

(β) Το $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα.

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(bx^2+2b) = b\cdot 1+2b = 3b$

και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx^3 = b\cdot 1^3 = b$

Επομένως, τα $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ υπάρχουν για όλα τα

$a, b \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 3b = b \Leftrightarrow$
$2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Άρα, το $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει για $a\in\mathbb{R}$ και $b=0$

(γ) Από το (α) ερώτημα το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $a, b\in\mathbb{R}$ με $-a=2b$

Από το (β) το $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει για $a\in\mathbb{R}$ και $b=0$

Επομένως, για να υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και το $\lim_{x\to 1} f(x)$

Πρέπει $-a=2b$ και $b=0$
Άρα, πρέπει $a=b=0$

Ασκ 3: (α) Για $x<5$, $x-5<0$ και άρα $|x-5| = -(x-5)$
Άρα, $\lim_{x\to 5^-} \frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|} = \lim_{x\to 5^-} \frac{3x^3-15x^2+x-5}{-(x-5)} =$

$= \lim_{x\to 5^-} \frac{3x^2(x-5)+(x-5)}{-(x-5)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{(x-5)(3x^2+1)}{-(x-5)} =$

$= \lim_{x\to 5^-}\left[-(3x^2+1)\right] = -(3\cdot 5^2+1) = -(3\cdot 25+1) = -76$

(β) Για $x>5$, $x-5>0$ και άρα $|x-5|=x-5$

Άρα,

$$\lim_{x\to5^+}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|}=\lim_{x\to5^+}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5^+}\frac{3x^2(x-5)+(x-5)}{(x-5)}=\lim_{x\to5^+}\frac{(x-5)(3x^2+1)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5^+}(3x^2+1)=76$$

(γ) Εφόσον από τα (α), και (β) έχω ότι

$$\lim_{x\to5^-}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|}=-76\neq76=\lim_{x\to5^+}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|}$$

Το $\lim_{x\to5}\frac{3x^3-15x^2+x-5}{|x-5|}$ δεν υπάρχει.

Άσκ4: $$\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+x-12}}=\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{(x+3)(x-3)}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{(x-3)(x+4)}}$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x-3}(\sqrt{x+3}-1)}{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+4}}=$$

είναι συνεχής

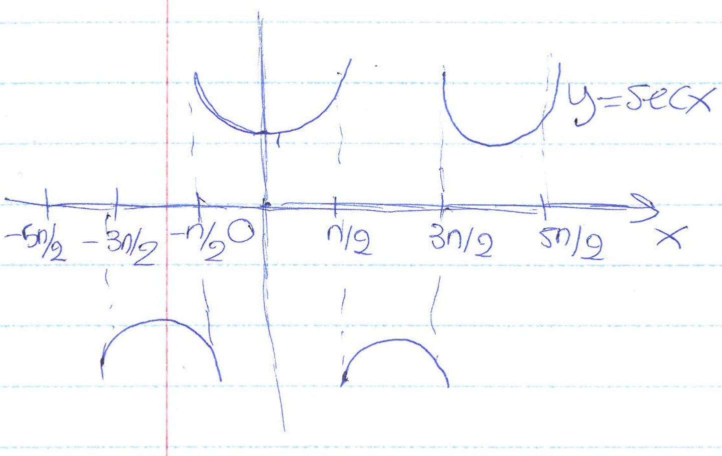
$$=\lim_{x\to3^+}\frac{(\sqrt{x+3}-1)}{\sqrt{x+4}}=\frac{\lim_{x\to3^+}(\sqrt{x+3}-1)}{\lim_{x\to3^+}\sqrt{x+4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to3^+}(x+3)}-\lim_{x\to3^+}1}{\sqrt{\lim_{x\to3^+}(x+4)}}=\frac{\sqrt{3+3}-1}{\sqrt{3+4}}=\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{7}}$$

Άσκ 5. secx τέμνουσα του x

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad D_{\sec x} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

$|\sec x| \geq 1$ δηλ. $\sec x \geq 1$ ή $\sec x \leq -1$



Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sec x =$$

$\left[\text{το } \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} \ \nexists\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0^+} \sec x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Άρα, για $x > 0$,

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sqrt{x} \quad (*)$$

Επίσης, $\lim_{x\to 0^+} (-\sqrt{x}) = -\sqrt{\lim_{x\to 0^+} x} = 0 \quad (**)$

και $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} x} = 0 \quad (***)$

Από τις (*) (**) (***) και το Θεώρημα Σάντουιτς, παίρνουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sec x = 0$$

Ασκ 6. Δείτε ασκ 11 στο 2ο φυλ. Ασκ.

2ος τρόπος

Όπως στην ασκ 11 του 2ου Φ.Α. παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to \pi} (x-\pi)^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = \lim_{y\to 0} y^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

Θα υπολογίσουμε τα

$$\lim_{y\to 0^-} y^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right) \text{ και } \lim_{y\to 0^+} y^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

Υπολογίζουμε το

$$\lim_{y\to 0^-} y^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

Για $(y<0)$, $y\neq 0$

$$-1 \leq \cos(1/y) \leq 1$$

Άρα, για $y<0$

$$y^3 \leq y^3 \cos(1/y) \leq -y^3 \quad (*)$$

(Εφόσον $y<0 \Rightarrow y^3<0$)

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} y^3 = 0 \ (**) \text{ και } \lim_{x\to 0^-} (-y^3) = -0^3 = 0 \quad (***)$$

Από $(*)$, $(**)$, $(***)$ και το θεώρημα Σύνθλιψης

$$\lim_{y\to 0^-} y^3 \cdot \cos(1/y) = 0$$

Άσκηση: Αποδείξτε ότι $\lim_{y\to 0^+} y^3 \cos(1/y) = 0$

Εφόσον $\lim_{y\to 0^-} y^3 \cos(1/y) = \lim_{y\to 0^+} y^3 \cdot \cos(1/y) = 0$, τότε

$\lim_{y\to 0} y^3 \cos(1/y) = 0$ Άρα, $\lim_{x\to \pi} (x-\pi)^3 \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0$

Ασκ 7: Παρατήρηση: Αν η $f(x)$ είναι περιττή ή άρτια τότε το D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0.
Δηλ αν $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

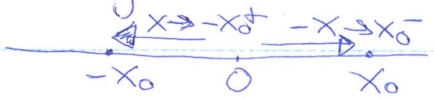
Παρατ: Παραδείγματα περιττών συναρτήσεων: $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan x$

(α) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ δ.δ.ο

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -L$

Έχουμε ότι $\lim_{x \to -x_0^+} f(x) =$

[Θέτω $y = -x$ $\quad x \to -x_0^+ \Rightarrow -x \to x_0^- \Rightarrow y \to x_0^-$]



$= \lim_{y \to x_0^-} f(-y) = \lim_{y \to x_0^-} (-f(y))$ [f περιττή]

$= -\lim_{y \to x_0^-} f(y) = -L$.

(γ) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ δ.δ.ο $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Από το (α), παίρνουμε ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -0^+} f(x) = -0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Εφόσον $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Το $\lim_{x \to 0} f(x)$ $\exists$ και είναι 0

(α) Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

Θ.δ.ο

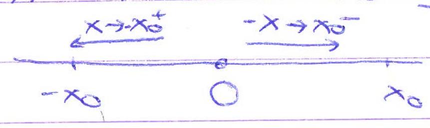
$$\lim_{x\to -x_0^+} f(x) = -L$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -x_0^+} f(x) = \lim_{y\to x_0^-} f(-y) =$$

Θέτω $y=-x$

$x\to -x_0^+ \Rightarrow -x\to x_0^- \Rightarrow y\to x_0^-$



$$= \lim_{y\to x_0^-} (-f(y)) \quad [f \text{ περιττή}]$$

$$= -\lim_{y\to x_0^-} f(y) = -L$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Θ.δ.ο $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Από το (α), παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to -0^+} f(x) = -0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

4ο φυλλάδιο ασκ.

1) Έστω $a\neq 0$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} a\,\frac{\sin ax}{ax} = a\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax}$$

[Θέτω $y = ax$

$x \to 0 \Rightarrow ax \to 0 \Rightarrow y = 0$]

$$= a \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = a \cdot 1 = a$$

Επομένως, για $a \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

Έστω $a = 0$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(0 \cdot x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 0 = 0 = a$$

Άρα για $a \in \mathbb{R}$ το $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

2) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2+x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin((x-1)(x+2))}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+2) \frac{\sin((x-1)(x+2))}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+2) \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\sin((x+2)(x-1))}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= (1+2) \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\sin((x+2)(x-1))}{(x+2)(x-1)}$$

Θέτω $y = (x+2)(x-1)$

$x \to 1 \Rightarrow (x+2)(x-1) \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$= 3 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3$$

3) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2(-2x)}{6x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2(-2x)}{x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(-2x)}{x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\tan(-2x)}{x} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(-2x)}{\cos(-2x)}}{x} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(-2x)}{x \cos(-2x)} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(-2x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(-2x)} \right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \left((-2) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(-2x)} \right)^2 \text{ [από άσκ. 1]}$$

$$= \frac{1}{6}\left((-2)\frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos(-2x)}\right)^2$$ Θέτω $y=-2x$
$x\to 0 \Rightarrow -2x\to 0 \Rightarrow y\to 0$

$$= \frac{1}{6}\left((-2)\frac{1}{\lim_{y\to 0}\cos y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left((-2)\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{1}{6}(-2)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)\sin(x-2)-\sin(x-2)}{(x-2)^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)\sin(x-2)-\sin(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2+1}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)\sin(x-2)-\sin(x-2)}{(x-2)^2}$$, Θέτω $y=x-2$
$x\to 2 \Rightarrow x-2\to 0 \Rightarrow y\to 0$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y\cdot\sin y-\sin y}{y^2}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y(\cos y-1)}{y^2} = \frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

5) (α) Για $-\pi<x<0$, $\sin x<0$
Άρα, για $-\pi<x<0$, $|\sin x| = -\sin x$

Επομένως $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = -1$

(β) Για $0<x<\pi$, $\sin x>0$
Άρα, για $0<x<\pi$, $|\sin x| = \sin x$
Επομένως $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$

(γ) Εφόσον $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}$, το
[από (α), (β)]
$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$ δεν υπάρχει

7) Για $-\pi/2 < x < \pi/2$, $\cos x > 0$

Άρα, για $-\pi/2 < x < \pi/2$, $|\cos x| = \cos x$

Επομένως $\lim_{x \to 0} \frac{|\cos x| - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

3ο φυλλάδιο ασκήσεων

7) (α) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Θ.δ.ο $\lim_{x \to -x_0^-} f(x) = -L$

Έχουμε ότι $\lim_{x \to -x_0^-} f(x) = \lim_{y \to x_0^+} f(-y) =$ Θέτω $y = -x$

$x \to -x_0^- \Rightarrow -x \to x_0^+ \Rightarrow y \to x_0^+$

$= \lim_{y \to x_0^+} (-f(y)) = -\lim_{y \to x_0^+} f(y) = -L$ [f περιττή]

(β) Γνωρίζουμε ότι

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Θ.δ.ο

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Από (α) παίρνουμε ότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -0^-} f(x) = -0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Επομένως $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

το $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

8) (α) Γνωρίζουμε ότι

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Θ.δ.ο $\lim_{x \to -x_0^+} f(x) = L$

Έχουμε ότι $\lim_{x \to -x_0^+} f(x) = \lim_{y \to x_0^+} f(-y) =$ Θέτω $y = -x$

$x \to -x_0^+ \to -x \to x_0^+ \to y \to x_0^+$

$= \lim_{y \to x_0^+} f(y) = L$