9/10/2018

# 1º Φυλλάδιο Ασκήσεων

**Ασκ 1:**

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Έχουμε ότι $|f(x)-4| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$|3x+1-4| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow |3x-3| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow |3(x-1)| < \frac{1}{10} \Rightarrow |3||x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3|x-1| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{30}$$

Έστω $\delta = \frac{1}{30}$ τότε

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{30} \Rightarrow 3|x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3||x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow |3(x-1)| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3x-3| < \frac{1}{10} \Rightarrow |(3x+1)-4| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon$$

Επομένως, για $\delta = \frac{1}{30}$ ισχύει ότι

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \frac{1}{10}$$

**Ασκ 2:** Πρέπει ν.δ.ο. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-4)-2| < \varepsilon$$

Έστω $\varepsilon > 0$

Έχουμε ότι $|(3x-4)-2| < \varepsilon \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$|3(x-2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |3||x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

Έστω $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Έχουμε ότι

$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Rightarrow$

$|3(x-2)| < \varepsilon \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \Rightarrow$

$|(3x-4)-2| < \varepsilon$

Παρατήρηση: Θα μπορούσα να πάρω οποιοδήποτε $\delta > 0$ με $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-4)-2| < \varepsilon$

Άρα, από τον αυστηρό ορισμό του ορίου

$\lim_{x \to 2} (3x-4) = 2$

Ασκ 3: Έστω $f(x) = k$

Για ν.δ.ο. $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$,

Πρέπει ν.δ.ο για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-k| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$

Έστω $\delta > 0$ τότε $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-k| = k-k = 0 < \varepsilon$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-k| < \varepsilon$

Επομένως, από τον αυστηρό ορισμό του ορίου

$\lim_{x \to x_0} k = k$

Ασκ 4): Πρέπει ν.δ.ο. για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.
$0<|x-4|<\delta \Rightarrow |g(x)-3|<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$. για $x\neq4$
Έχουμε $|g(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow |(3x-9)-3|<\varepsilon \Rightarrow$
$|3x-12| \Leftrightarrow \Rightarrow 3|x-4|<\varepsilon \Rightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{3}$

Έστω $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

Έχουμε ότι $0<|x-4|<\delta \Rightarrow 0<|x-4|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{3}$ και $x\neq4$

$\Rightarrow 3|x-4|<\varepsilon$ και $x\neq4$
$\Rightarrow |3(x-4)|<\varepsilon$ και $x\neq4$
$\Rightarrow |3x-12|<\varepsilon$ κ' $x\neq4$
$\Rightarrow |(3x-9)-3|<\varepsilon$ κ' $x\neq4$
$\Rightarrow |g(x)-3|<\varepsilon$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.
$0<|x-4|<\delta \Rightarrow |g(x)-3|<\varepsilon$

Άρα, από τον αυστηρό ορισμό του ορίου, το
$\lim_{x\to4} g(x)=3$

Ασκ 5): Πρέπει ν.δ.ο για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.
$0<|x-0|<\delta \Rightarrow |x^2-0|<\varepsilon$
Έστω $\varepsilon>0$.
Έχουμε ότι $|x^2|<\varepsilon \Rightarrow |x|^2<\varepsilon \Rightarrow$
$|x|<\sqrt{\varepsilon}$

Έστω $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Έχουμε ότι $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$

$|x|^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 \Rightarrow |x|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$

Άρα από τον αυστηρό ορισμό του ορίου το

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

<u>Ασκ. 6</u>: Έστω ότι υπάρχει κάποιο $L \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\lim_{x \to 0} h(x) = L$

τότε από τον αυστηρό ορισμό του ορίου,

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$

Έχουμε ότι

$|h(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow$

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ (I)

Για $x > 0$, έχουμε ότι

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < x < \delta$

$\Rightarrow 2 < x+2 < \delta + 2$

$\Rightarrow 2 < h(x) < \delta + 2$

Για $x < 0$, έχουμε ότι

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < -x < \delta$

$\Rightarrow -\delta < x < 0$

$\Rightarrow -\delta - 1 < x - 1 < -1$

$-\delta - 1 < h(x) < -1$

Επομένως, για $x > 0$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow 2 < h(x) < \delta + 2$ (II)

για $x < 0$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow -\delta - 1 < h(x) < -1$ (III)

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$0 < |x| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \frac{1}{2}$

Από την (I) παίρνουμε ότι

$0 < |x| < \delta \Rightarrow L - \frac{1}{2} < h(x) < L + \frac{1}{2}$ (*)

Από την (II) παίρνουμε ότι

για $x > 0$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 2 < h(x) < \delta + 2$ (**)

Από την (III) παίρνουμε ότι, για $x < 0$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow -1 - \delta < h(x) < -1$ (***)

Για $x > 0$, από τις (*), και (**) παίρνουμε ότι

$0 < |x| < \delta \xRightarrow{\text{αν}} L - \frac{1}{2} < h(x) < L + \frac{1}{2}$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 2 < h(x) < 2 + \delta$

Επομένως $2 < L + \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{κ}\alpha\iota \; \alpha\rho\alpha} L > \frac{3}{2}$ (+)

Για $x < 0$, από τις (**) και (***) παίρνουμε ότι

$0 < |x| < \delta \Rightarrow L - \frac{1}{2} < h(x) < L + \frac{1}{2}$

και

$0 < |x| < \delta \Rightarrow -1 - \delta < h(x) < -1$

Άρα, $L - \frac{1}{2} < -1$

Επομένως $L < -\frac{1}{2}$ (++)

Από τις (+) και (++) οδηγούμε σε άτοπο

Άρα, το $\lim_{x \to 0} h(x)$ δεν υπάρχει

Σημείωση: Πως βρήκα το $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

Για τυχαίο ε οδηγούμε στις σχέσεις

$2 < L + \varepsilon$

και $L - \varepsilon < -1$

ή ~~το~~ $L > 2 - \varepsilon$ και $L < -1 + \varepsilon$

Για να οδηγηθώ σε άτοπο πρέπει $2 - \varepsilon \leq -1 + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η ισοδύναμα $\frac{3}{2} \leq \varepsilon$

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκ 1: Επομένως $\lim\limits_{x \to -57} (g(x) \cdot h(x) + 7) =$

$\lim\limits_{x \to -57} g(x) \cdot h(x) + \lim\limits_{x \to -57} 7 = \lim\limits_{x \to -57} g(x) \cdot h(x) + 7$

$= \lim\limits_{x \to -57} g(x) \cdot \lim\limits_{x \to -57} h(x) + 7 = (2 \cdot (-3)) + 7 = 1$

Εφόσον $\lim\limits_{x \to -57} (g(x) \cdot h(x) + 7) \geq 0$,

Έχουμε ότι

$\lim\limits_{x \to -57} \sqrt[4]{g(x) \cdot h(x) + 7} = \sqrt[4]{\lim\limits_{x \to -57} (g(x) h(x) + 7)} = \sqrt[4]{1} = 1$

Εφόσον $\lim\limits_{x \to -57} \sqrt[4]{g(x) \cdot h(x) + 7} \neq 0$,

Παίρνουμε ότι,

$\lim\limits_{x \to -57} \frac{f(x) - 3g(x) \cdot h(x)}{\sqrt[4]{g(x) \cdot h(x) + 7}} = \frac{\lim_{x \to -57} (f(x) - 3g(x) \cdot h(x))}{\lim\limits_{x \to -57} \sqrt[4]{g(x) \cdot h(x) + 7}}$

Έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to -57} (f(x) - 3g(x) \cdot h(x)) = \lim\limits_{x \to -57} f(x) - \lim\limits_{x \to -57} 3g(x) \cdot h(x)$

$$= \lim_{x\to -57} f(x) - 3\lim_{x\to -57} g(x)\cdot h(x) =$$

$$= \lim_{x\to -57} f(x) - 3\lim_{x\to -57} g(x)\cdot \lim_{x\to -57} h(x)$$

$$= 3 - 3\cdot 2\cdot(-3) = 3+18 = 21$$

Από όσα είπαμε παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -57} \frac{f(x)-3g(x)\cdot h(x)}{\sqrt[4]{g(x)\cdot h(x)+7}} = \frac{21}{1} = 21$$

Άσκ 2: Για $x \neq 31$

$$\cancel{\lim} \frac{f(x)-4}{x-31}\cdot(x-31) + 4 = f(x)$$

Επομένως $\lim_{x\to 31} f(x) = \lim_{x\to 31}\left(\frac{f(x)-4}{x-31}\cdot(x-31)+4\right)$

$$= \lim_{x\to 31}\left(\frac{f(x)-4}{x-31}\cdot(x-31)\right) + \lim_{x\to 31} 4$$

$$= \lim_{x\to 31}\left(\frac{f(x)-4}{x-31}\cdot(x-31)\right) + 4 =$$

$$= \lim_{x\to 31}\frac{f(x)-4}{x-31}\cdot\lim_{x\to 31}(x-31) + 4 =$$

$$= -12\cdot 0 + 4 = 4$$

Άσκ 3: Παρατηρούμε ότι

$$2^2 - 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{(x+1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x+3)-4(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x^2-4)}{(x+1)(x-2)} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x+3)}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+1)} =$$

$$= \frac{(2+3)(2+2)}{2+1} = \frac{20}{3}$$

<u>Ασκ.4</u>: Παρατηρούμε ότι $1^4-1=0$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή.

$x^3+3x^2+9x+7$

Οι πιθανές ρίζες είναι $\pm 1, \pm 7$

Έχουμε ότι $1^3+3\cdot 1^2+9\cdot 1+7=20\neq 0$ το 1 δεν είναι ρίζα

Έχουμε ότι $(-1)^3+3(-1)^2+9(-1)+7=0$ Άρα, το $-1$ είναι μία ρίζα

Επομένως, το $x-(-1)=x+1$

Είναι ένας παράγοντας

Διαιρούμε το $x^3+3x^2+9x+7$ με $x+1$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+9x+7 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 & x^2+2x+7 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2+9x+7 & \\ \quad -2x^2-2x & \\ \cline{1-1} \qquad 7x+7 & \\ \qquad -7x-7 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Άρα, $x^3+3x^2+9x+7 = (x^2+2x+7)(x+1)$

Επομένως $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x^2+9x+7}{x^4-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+2x+7)}{x^4-1}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+2x+7)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2+2x+7)}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(-1)^2+2(-1)+7}{(-1-1)((-1)^2+1)} = \frac{1-2+7}{(-2)\cdot 2} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

Άσκ5: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^5+32}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^5-(-2)^5}{x^3-(-2)^3}$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^4+x^3(-2)+x^2(-2)^2+x\cdot(-2)^3+(-2)^4)}{(x-(-2))(x^2+x(-2)+(-2)^2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}{x^2-2x+4} = \frac{(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+}{(-2)^2-2(-2)+4}$$

$$= \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$$

Το i ξεκινάει από 0 μέχρι $n_1-1$

Άσκ6: Έχουμε δει

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^{n_1}-x_0^{n_1}}{x^{n_2}-x_0^{n_2}} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\sum_{i=0}^{n_1-1}\{x^{n_1-1-i}\cdot x_0^{i}\}}{(x-x_0)\cdot\sum_{j=0}^{n_2-1}\{x^{n_2-1-j}\cdot x_0^{j}\}}$$

πολυώνυμο

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\boxed{\sum_{i=0}^{n_1-1} x^{n_1-1-i}\cdot x_0^{i}}}{\sum_{j=0}^{n_2-1} x^{n_2-1-j}\cdot x_0^{j}} = \cancel{\lim}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n_1-1} x_0^{n_1-1-i}\cdot x_0^{i}}{\sum_{j=0}^{n_2-1} x_0^{n_2-1-j}\cdot x_0^{j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n_1-1} x_0^{n_1-1}}{\sum_{j=0}^{n_2-1} x_0^{n_2-1}} = \frac{n_1\cdot x_0^{n_1-1}}{n_2\cdot x_0^{n_2-1}}$$

$$= \frac{n_1}{n_2}\cdot x_0^{n_1-n_2}$$

Άσκ 7: Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-4\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} =$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} (\sqrt{x}-1) = \sqrt{9}-1 = 3-1 = 2$$

Άσκ 8: $\lim_{x\to -7} \tan(x+7) = \lim_{x\to -7} \frac{\sin(x+7)}{\cos(x+7)}$

$$= \frac{\lim_{x\to -7} \sin(x+7)}{\lim_{x\to -7} \cos(x+7)}$$

[Θέτω $u = x+7$ & $x \to -7 \Rightarrow x+7 \to 0 \Rightarrow u \to 0$]

$$= \frac{\lim_{u\to 0} \sin u}{\lim_{u\to 0} \cos u} = \frac{0}{1} = 0$$

Άσκ 9: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

Το όριο $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $x \neq 0$

Επομένως, $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, $x \neq 0$ (*)

Επίσης, έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ (**)

και ότι $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (***)

Από τα (*), (**), (***) και θεώρ. Σάντουιτς $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\exists$

Ασκ 10: Έχουμε $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, για $x \in D_f$ (*)

Επίσης έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}(-|f(x)|) = -\lim_{x\to x_0}|f(x)| = -0 = 0 \quad (**)$$

Και από την υπόθεση $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ (***)

Από τις (*), (**)(***) και θ. Σάντουιτς

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Ασκ 11) $\lim_{x\to \pi}(x-\pi)^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to \pi}(x-\pi)^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)$$

[Θέτω $y = x-\pi$, $x\to\pi \Rightarrow x-\pi \to 0 \Rightarrow y\to 0$]

$$\lim_{y\to 0} y^3 \cdot \cos\frac{1}{y}$$

Έχουμε ότι $0 \leq \left|\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq 1$, $y \neq 0$

Άρα $|y^3|\cdot 0 \leq |y^3|\cdot\left|\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |y^3|\cdot 1$, για $y\neq 0$

$$0 \leq \left|y^3\cdot\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |y^3| \quad (*)$$

Επίσης, έχουμε ότι

$\lim_{y\to 0} 0 = 0$ (**) και $\lim_{y\to 0}|y^3| \overset{\text{επειδή συνεχής } y=y^3}{=} \left|\lim_{y\to 0} y^3\right| = |0^3| = 0$ (***)

Από τις (*), (**), (***) και το θεώρημα Σάντουιτς

παίρνουμε ότι $\lim_{y\to 0}\left|y^3 \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right| = 0$.

Επομένως, από την άσκηση 10,

$$\lim_{y\to 0} y^3 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Άρα, $\lim_{x\to \pi} (x-\pi)^3 \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0$

Σπίτι: Άσκηση 9 | Φυλ. ασκ 5

(α) $\lim_{x\to \infty} x \sin\frac{1}{x}$

Θέτω $y=\frac{1}{x}$   $x\to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\cdot \sin y = 1$$

(β) $\lim_{x\to \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}$

$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \le 1$ για $x\neq 0$

$-\frac{1}{x^4} \le \frac{\cos(1/x^3)}{x^4} \le \frac{1}{x^4}$

Επομένως $\lim_{x\to \infty}\left(-\frac{1}{x^4}\right)=0$ και $\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^4}=0$

Από το θεώρημα Σάντουιτς το $\lim_{x\to \infty}\frac{\cos(1/x^3)}{x^4}=0$

Άσκηση 10

$D_f=(-1,0)$   $-\frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{1}{x}$, για $x\in\left(-\frac{5}{7},0\right)$

$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

Από το θ. Σάντουιτς $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$