Επομένως

$$\frac{4x^3 - x^2 + 16x}{x^2+4} = \frac{(x^2+4)(4x-1)+4}{x^2+4} = 4x - 1 + \frac{4}{x^2+4}$$

Άρα

$$\int \frac{4x^3 - x^2 + 16x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \int \left(4x - 1 + \frac{4}{x^2+4}\right) dx$$

$$= 4\int x\,dx - \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= 4\,\frac{x^2}{2} - x + 4\int \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= 2x^2 - x + 4\,\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= 2x^2 - x + 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

27ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(\alpha x)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} x^n \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right)' dx$$

$$= \left[x^n \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (x^n)' \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,dx$$

$$= \left((2\pi)^n \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot 2\pi)}{\alpha} - 0^n \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot 0)}{\alpha}\right) - \int_0^{2\pi} (x^n)' \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,dx$$

$$= \left((2\pi)^n \cdot \frac{0}{\alpha} - 0\right) - \int_0^{2\pi} n x^{n-1} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,dx$$

$$= -\frac{n}{\alpha}\int_0^{2\pi} x^{n-1}\left(-\frac{\cos(\alpha x)'}{\alpha}\right) dx$$

$$= -\frac{n}{\alpha}\left(\left[x^{n-1}\left(-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x^{n-1})'\left(-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right)dx\right)$$

$$= -\frac{n}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\left((2\pi)^{n-1}\cdot\cos(\alpha\cdot 2\pi) - 0^{n-1}\cos\alpha\cdot 0\right) -\right.$$

$$\left.- \int_0^{2\pi}(n-1)x^{n-2}\cdot\left(-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right)dx\right)$$

$$= -\frac{n}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot\left((2\pi)^{n-1}1 - 0\right) - \left(-\frac{n-1}{\alpha}\right)\int_0^{2\pi} x^{n-2}\cos(\alpha x)\,dx\right.$$

$$= \frac{n}{\alpha}(2\pi)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{\alpha^2}\int_0^{2\pi} x^{n-2}\cos(\alpha x)\,dx$$

$$= \frac{n}{\alpha^2}(2\pi)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I_{n-2}$$

2) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int \sin^{-1}x\,dx =$$

$$= \int (x)'\sin^{-1}x\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x - \int x(\sin^{-1}x)'\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Έχουμε ότι

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } u = 1-x^2 \\ u = 1-x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = x\,dx \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= -\sqrt{u} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

Άρα

$$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - (-\sqrt{1-x^2} + c$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$$

3) Έχουμε ότι

$$\int \ln(1+x^2)\,dx =$$

$$= \int (x)'\ln(1+x^2)\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int x(\ln(1+x^2))'\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,2x\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Έχουμε ότι

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^2 & -1 & 1 \\ \cline{1-2} & -1 & \end{array}$$

Άρα $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$

Επομένως

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \tan^{-1}x + c$$

Άρα

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\cdot\ln(1+x^2) - 2(x - \tan^{-1}x) + c$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x + c$$

4) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int x\tan^{-1}x\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \tan^{-1}x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\cdot(\tan^{-1}x)'\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + c \qquad \text{(Άσκ. 3)}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

5) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int x\sec x\tan x\,dx =$$

$$= \int x(\sec x)'\,dx$$
$$= x\sec x - \int (x)'\sec x\,dx$$
$$= x\sec x - \int \sec x\,dx$$
$$= x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + c$$

6) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int (x)'\cos(\ln x)\,dx$$

$$= x\cos(\ln x) - \int x(\cos(\ln x))'\,dx$$

$$= x\cos(\ln x) - \int x\left(-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$
$$= x\cos(\ln x) + \int (x)'\sin(\ln x)\,dx$$
$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x(\sin(\ln x))'\,dx$$
$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

Άρα

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

Επομένως

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + c$$

Άρα

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\right) + c$$

7) Έχουμε ότι

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int x\left(\frac{(x+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)'dx$$

$$= x\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - \int (x)'\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{(x+1)^{5/2}}{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + c$$

8) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση και ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int x^3 e^{-x^2}dx =$$

$$= \int x^2 \cdot x e^{-x^2}dx$$

[Θέτω $u = -x^2$

$u = -x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = x\,dx$]

$$= -\frac{1}{2}\int (-u)e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u (e^{u})'\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left((u \cdot e^{u}) - \int (u)' e^{u}\, du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u e^{u} - \int e^{u} du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u e^{u} - e^{u}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left((-x^2)e^{-x^2} - e^{-x^2}\right) + c$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

<u>2ος τρόπος</u>

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$= \int x^2 \cdot x \cdot e^{-x^2} dx$$

$$= \int x^2 \left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)' dx$$

$$= x^2\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right) - \int (x^2)'\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int 2x e^{-x^2} dx$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση παίρνουμε ότι

$$\int 2x e^{-x^2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u=-x^2 \\ u=-x^2 \Rightarrow du=-2x\,dx \Rightarrow -du = 2x\,dx \end{array}\right]$$

$$= -\int e^{u}\,du$$

$$= -e^{u} + c$$

$$= -e^{-x^2} + c$$

Άρα

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2}\right) + c$$

$$= -\frac{x^2}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

9) Χρησιμοποιούμε πινακοειδή ολοκλήρωση

x^5 και παράγωγοί της $\qquad$ e^{2x} και ολοκληρώματά της

x^5	+	e^{2x}
$5x^4$	−	$\frac{e^{2x}}{2}$
$20x^3$	+	$e^{2x}/4$
$60x^2$	−	$e^{2x}/8$
$120x$	+	$e^{2x}/16$
120	−	$e^{2x}/32$
0		$e^{2x}/64$

Άρα

$$\int x^5 e^{2x}\,dx$$

$$= x^5\frac{e^{2x}}{2} - 5x^4\frac{e^{2x}}{4} + 20x^3\frac{e^{2x}}{8} - 60x^2\frac{e^{2x}}{16} + 120x\frac{e^{2x}}{32} - 120\frac{e^{2x}}{64} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^5e^{2x} - \frac{5}{4}x^4e^{2x} + \frac{5}{2}x^3e^{2x} - \frac{15}{4}x^2e^{2x} + \frac{15}{4}xe^{2x} - \frac{15}{8}e^{2x} + c$$

2ος τρόπος

Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες πολλές φορές

28ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Διαιρώ τον αριθμητή με τον παρονομαστή

$$\begin{array}{rr|l} x^4 & +1 & x^3-x \\ \cline{3-3} -x^4 \quad +x^2 & & x \\ \hline & x^2+1 & \end{array}$$

Άρα

$$\frac{x^4+1}{x^3-x}=\frac{x(x^3-x)+(x^2+1)}{x^3-x}=x+\frac{x^2+1}{x^3-x}$$

Επομένως

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x}dx=\int\left(x+\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)dx$$

$$=\int x\,dx+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$$

Υπολογίζω το

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$$

Χρησιμοποιώ την μέθοδο των μερικών κλασμάτων

Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

Αναλύσαμε το

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Προσδιορίζουμε τα A, B, C

Έχουμε ότι

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x + (-A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=2 \\ B-C=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=2 \\ B=C \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B=2 \\ B=C \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=-1, B=1, C=1$$

Άρα

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

(Σημ: Εναλλακτικά, θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω Heaviside)

Επομένως

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$$

$$= \ln\left(\frac{|x-1||x+1|}{|x|}\right) + c$$

$$= \ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + c$$

Άρα

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + c$$

2) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2) = x(x+1)(x+2)$$

Έχουμε ότι

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

Προσδιορίζω τα A, B, C
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Heaviside παίρνουμε ότι

$$A = \frac{2\,0+1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2},$$

$$B = \frac{2(-1)+1}{(-1)((-1)+2)} = 1$$

$$C = \frac{2(-2)+1}{(-2)((-2)+1)} = -\frac{3}{2}$$

(Σημ: Εναλλακτικά θα μπορούσα να δουλέψω όπως Άσκ. 1)

Άρα

$$\frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+2}$$

Επομένως

$$\int \frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + c$$

$$= \ln\left(\frac{|x|^{1/2}\cdot|x+1|}{|x+2|^{3/2}} \right) + c$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{|x|}\,|x+1|}{\sqrt{|x+2|^3}} \right) + c$$

3) Έχουμε ότι

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6}\, dy$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u = \sin y \\ u = \sin y \Rightarrow du = \cos y\, dy \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + u - 6}\, du$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \frac{du}{u^2+u-6}$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο των μερικών κλασμάτων
Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$u^2 + u - 6 = (u-2)(u+3)$$

Έχουμε ότι

$$\frac{1}{(u-2)(u+3)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+3}$$

Προσδιορίζουμε τα A, B χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Heaviside

$$A = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

$$B = \frac{1}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Άρα

$$\frac{1}{u^2+u-6} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{u-2} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{u+3}$$

Επομένως

$$\int \frac{du}{u^2+u-6} = \int \left(\frac{1}{5}\,\frac{1}{u-2} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{u+3}\right) du$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u-2} - \frac{1}{5}\int \frac{du}{u+3}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|u-2| - \frac{1}{5}\ln|u+3| + c$$

$$= \ln\left(\left|\sqrt[5]{\frac{u-2}{u+3}}\right|\right) + c$$

Άρα

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6}\,dy = \ln\left|\sqrt[5]{\frac{\sin y - 2}{\sin y + 3}}\right| + c$$

4) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων

Έχουμε ότι

$$\frac{2x}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

Προσδιορίζω τα A, B, C

Έχω ότι

$$\frac{2x}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

$$\Leftrightarrow 2x = A(x^2+4x+4) + B(x+2) + C$$

$$\Leftrightarrow 2x = Ax^2 + (4A+B)x + (4A+2B+C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 4A + B = 2 \\ 4A + 2B + C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = 0,\ B = 2,\ C = -4$$

Σημ: Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω παραγώγιση

Έχουμε ότι

$$2x = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

Για $x = -2$ παίρνω ότι

$$2(-2) = A((-2)+2)^2 + B((-2)+2) + C$$

και άρα

$$C = -4$$

Έχω ότι
$$2x = A(x+2)^2 + B(x+2) + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}\left(A(x+2)^2) + B(x+2) + C\right)$$
$$\Rightarrow 2 = 2A(x+2) + B$$

Για $x=-2$ παίρνω ότι
$$2 = 2A((-2)+2) + B$$
και άρα
$$B = 2$$

Έχω ότι
$$2 = 2A(x+2) + B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(2) = \frac{d}{dx}\left(2A(x+2) + B\right)$$
$$\Rightarrow 0 = 2A$$
$$\Rightarrow A = 0$$

Επομένως
$$\frac{2x}{(x+2)^3} = \frac{0}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3} = \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3}$$

Άρα
$$\int \frac{2x}{(x+2)^3}\,dx = \int\left(\frac{2}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3}\right)dx$$
$$= 2\int \frac{dx}{(x+2)^2} - 4\int \frac{dx}{(x+2)^3}$$
$$= 2\left(-\frac{1}{x+2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2(x+2)^2}\right) + C$$
$$= -\frac{2}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + C$$

5) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων

παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$x^3-x^2+2x-2 = x^2(x-1)+2(x-1) = (x-1)(x^2+2)$$

Έχουμε ότι

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Προσδιορίζουμε τα A, B, C

Έχουμε ότι

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+1 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2+1 = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (2A-C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -B+C=0 \\ 2A-C=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ B=C \\ 2A-C=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ B=C \\ 2(3-B)-B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ C=B \\ B=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{4}{3},\ B=\frac{5}{3},\ C=\frac{5}{3}$$

Επομένως

$$\frac{3x^2+1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{4}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}}{x^2+2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{3}\frac{x}{x^2+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{x^2+2}$$

Άρα

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3-x^2+2x-2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{4}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{3}\cdot\frac{x}{x^2+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{x^2+2} \right) dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx =$$

Θέτουμε $u = x^2+2$

$u = x^2+2 \Rightarrow du = 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + c$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{5}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \ln\left(\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[6]{(x^2+2)^5}\right) + \frac{5}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

6) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων

Έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{2x-1}$$

Προσδιορίζουμε τα A, B, C

Έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (Ax+B)(2x-1) + C(x^2+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (2Ax^2 + 2Bx - Ax - B) + C(x^2+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (2A+C)x^2 + (2B-A)x + (-B+3C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + C = 1 \\ -A + 2B = 0 \\ -B + 3C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + C = 1 \\ A = 2B \\ C = \frac{1}{3}B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2B + \frac{1}{3}B = 1 \\ A = 2B \\ C = \frac{1}{3}B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{6}{13},\ B = \frac{3}{13},\ C = \frac{1}{13}$$

Άρα

$$\frac{x^2}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{\frac{6}{13}x + \frac{3}{13}}{x^2+3} + \frac{1}{13}\frac{1}{2x-1}$$

$$= \frac{6}{13}\frac{x}{x^2+3} + \frac{3}{13}\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{13}\frac{1}{2x-1}$$

Επομένως

$$\int \frac{x^2}{(x^2+3)(2x-1)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{6}{13}\frac{x}{x^2+3} + \frac{3}{13}\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{13}\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= \frac{6}{13}\int \frac{x}{x^2+3}\,dx + \frac{3}{13}\int \frac{dx}{x^2+3} + \frac{1}{13}\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{6}{13}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \frac{3}{13}\int \frac{dx}{x^2+3} + \frac{1}{13}\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{13}\ln(x^2+3) + \frac{3}{13}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{13}\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{13}\ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{13}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{13}\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{13}\ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{13}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$$

$$= \ln\left((x^2+3)^{3/13}\cdot|2x-1|^{1/26}\right) + \frac{\sqrt{3}}{13}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

7) Έχουμε ότι

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(e^x)^3}{(e^x)^3-(e^x)^2-e^x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(e^x)^2\, e^x}{(e^x)^3-(e^x)^2-e^x+1}\,dx$$

Θέτω $u = e^x$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$$= \int \frac{u^2}{u^3-u^2-u+1}\,du$$

Υπολογίζουμε το

$$\int \frac{u^2}{u^3-u^2-u+1}\,du$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$u^3-u^2-u+1 = u^2(u-1)-(u-1) = (u-1)(u^2-1)$$
$$=(u-1)^2(u+1)$$

Έχουμε ότι
$$\frac{u^2}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{u+1}$$

Προσδιορίζουμε τα A, B, C

Έχουμε ότι
$$\frac{u^2}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{u+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = A(u-1)(u+1) + B(u+1) + C(u-1)^2$$
$$\Leftrightarrow u^2 = A(u^2-1) + B(u+1) + C(u^2-2u+1)$$
$$\Leftrightarrow u^2 = (A+C)u^2 + (B-2C)u + (-A+B+C)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B-2C=0 \\ -A+B+C=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B=2C \\ -A+2C+C=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B=2C \\ A=3C \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3C+C=1 \\ B=2C \\ A=3C \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{3}{4},\ B=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{4}$$

Άρα
$$\frac{u^2}{u^3-u^2-u+1} = \frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{u+1}$$

Επομένως

$$\int \frac{u^2}{u^3-u^2-u+1}\,du =$$

$$= \int \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u+1}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\int\frac{du}{u-1} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{du}{u+1}$$

$$= \frac{3}{4}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u-1}\right) + \frac{1}{4}\ln|u+1| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u-1} + \ln\left(\sqrt[4]{|u-1|^3}\cdot\sqrt[4]{|u+1|}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u-1} + \ln\left(\sqrt[4]{|u-1|^3|u+1|}\right) + c$$

Άρα

$$\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^x-1} + \ln\left(\sqrt[4]{|e^x-1|^3|e^x+1|}\right) + c$$