2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 Έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ για } x \in (-1,1).$$

Επομένως,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{3}.$$

Για $x = -\frac{1}{2}$,

$$y = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Άρα η εφαπτομένη έχει κλίση $m = \sqrt{3}$ και διέρχεται από το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

ή $y = \sqrt{3}x + \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$

Άσκηση 2: Έχουμε ότι $D_f = \mathbb{R}$

Εφόσον $f_1(x) = \tan^{-1}(3x)$ και η $f_2(x) = 2x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(3x) - 2x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(3x)\right) - 2\frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 - 2 = \frac{3}{1+9x^2} - 2$$

$$= \frac{3-2-18x^2}{1+9x^2} = \frac{1-18x^2}{1+9x^2}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-18x^2}{1+9x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-18x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{18}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Άρα η $f(x)$ έχει κρίσιμα σημεία για $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ και για $x = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Έχουμε ότι

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-18x^2}{1+9x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-18x^2 > 0 \qquad (1+9x^2 > 0, \text{ για } x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{3\sqrt{2}} < x < \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

(α) Η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -1/3\sqrt{2}]$ και στο $[1/3\sqrt{2}, \infty)$ και είναι αύξουσα στο $\left[-1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}\right]$

(β) Η $f(x)$ έχει τ.ε. για $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ και τ.μ. για $x = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Άσκηση 3: Έχουμε ότι

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{(\sec^{-1}x)^3 \cdot x\sqrt{x^2-1}} =$$

Θέτω $u = \sec^{-1}x$

$u = \sec^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx \xrightarrow[|x|=x]{x\in[2/\sqrt{3},\,2]\Rightarrow}$

$du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$u(2/\sqrt{3}) = \sec^{-1}(2/\sqrt{3}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$u(2) = \sec^{-1}(2) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{u^3} = \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^2}\right) = \frac{27}{2\pi^2}$$

Άσκηση 5: Έχουμε ότι

$$\int \frac{(\tan^{-1}(3x))^2}{1+9x^2}\,dx =$$

Θέτω $u = \tan^{-1}(3x)$

$u = \tan^{-1}(3x) \Rightarrow du = \frac{3}{1+9x^2}\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}du = \frac{1}{1+9x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int u^2\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{9}(\tan^{-1}(3x))^3 + C$$

Άσκηση 6: Έχουμε ότι

$$\int \frac{2}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u=\ln x \\ u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx \end{array}\right]$$

$$= 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\cdot\tan^{-1}u + C = 2\cdot\tan^{-1}(\ln x) + C$$

Άσκηση 7: Έχουμε ότι

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx \,, =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u=\sin x \\ u=\sin x \Rightarrow du=\cos x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \sin^{-1}u + C = \sin^{-1}(\sin x) + C$$

Για $-\pi/2 < x < \frac{\pi}{2}$,

$\sin^{-1}(\sin x) = x.$

Άρα, $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx = x + C$, για ~~$\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$~~ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

2ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{|\cos x|}\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Για } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ \cos x>0 \\ \text{Άρα, για } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ |\cos x|=\cos x \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos x}\,dx = \int dx = x + C$$

Επομένως $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx = x + C$, για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 8: Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$$

[Θέτω $u=2x$

$u=2x \Rightarrow du=2dx \Rightarrow \frac{1}{2}du=dx$]

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \sec^{-1}|u| + C = \sec^{-1}|2x| + C$$

2ος τρόπος: Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{4(x^2-\frac{1}{4})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1/4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-(\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\sec^{-1}\left|\frac{x}{\frac{1}{2}}\right|\right) + C$$

$$= \sec^{-1}|2x| + C$$

Άσκηση 9: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 3-2t-t^2 &= 3-(t^2+2t) \\ &= 3-(t^2+2\cdot1\cdot t+1^2-1^2) \\ &= 3-((t+1)^2-1) \\ &= 4-(t+1)^2 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int \frac{6}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,dt = \int \frac{6}{\sqrt{4-(t+1)^2}}\,dt$$

$$= 6\int \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} =$$

[Θέτω $u = t+1$
$u = t+1 \Rightarrow du = dt$]

$$= 6\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = 6\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} =$$

$$= 6\cdot \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = 6\cdot \sin^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) + C$$

Άσκηση 10 : Έχουμε ότι

$$9x^2+3x+4 = 9\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\right)$$

$$= 9\left(x^2+2\cdot\frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$= 9\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{15}{36}\right)$$

Άρα $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{9\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{15}{36}\right)} =$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{15}{36}}$$

[Θέτω $u = x+\frac{1}{6}$
$u = x+\frac{1}{6} \Rightarrow du = dx$] $\displaystyle = \frac{1}{9}\int \frac{d\cancel{x}u}{u^2+\frac{15}{36}} =$

$$= \frac{1}{9}\cdot\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{6}}\cdot \tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{15}}{6}}\right)\right) + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{15}}\cdot \tan^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{15}}\cdot u\right) + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{15}}\cdot \tan^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{6}\right)\right) + C = \frac{2}{3\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{15}}x+\frac{1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Άσκηση 11:

Έχουμε ότι

$$x^2-4x+3 = x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2+3$$
$$= (x-2)^2-1$$

Άρα,

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}} =$$

[θέτω $u=x-2$
$u=x-2 \Rightarrow du=dx$]

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u|+C$$
$$= \sec^{-1}|x-2|+C.$$

Λύση: Άσκηση 1 | 24ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

$$\tan(\sec^{-1}(-\sqrt{2})) = \tan(\sec^{-1}(\sec(-\tfrac{\pi}{4}))) =$$
$$= \tan(-\pi/4) = -1$$

Άσκηση 4 | 25ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

$$\int \frac{dx}{\sin^{-1}x \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

[θέτω $u=\sin^{-1}x$
$u=\sin^{-1}x \Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$]

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C =$$
$$= \ln|\sin^{-1}x|+C$$

25º Φυλ. Ασκ.

4) Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } \omega=\sin^{-1}x \\ \omega=\sin^{-1}x \Rightarrow d\omega=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{\omega} d\omega$$

$$= \ln|\omega| + c$$

$$= \ln|\sin^{-1}x| + c$$

26º Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Έχουμε ότι

$$\int \frac{\ln^3 x}{x+2x\ln^4 x} dx =$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x(1+2\ln^4 x)} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } u=\ln x \\ u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{u^3}{1+2u^4} du$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } \omega=1+2u^4 \\ \omega=1+2u^4 \Rightarrow d\omega=8u^3\,du \rightarrow \frac{1}{8}d\omega=u^3\,du \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d\omega}{\omega}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|\omega| + c$$

$$= \frac{1}{8}\ln|1+2u^4| + c = \frac{1}{8}\ln(1+2u^4) + c = \frac{1}{8}\ln(1+2\ln^4 x) + c$$

2ος τρόπος

Θέτω $u = 1 + 2\ln^2 x$

(Άσκ.)

2) Έχουμε ότι

$$\int \frac{d\theta}{\sec\theta + \tan\theta} =$$

$$= \int \frac{d\theta}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}\, d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } w = 1 + \sin\theta \\ w = 1 + \sin\theta \Rightarrow dw = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dw}{w}$$

$$= \ln|w| + c$$

$$= \ln|1 + \sin\theta| + c$$

$$= \ln(1 + \sin\theta) + c$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι

$$\int \frac{d\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \int \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} \cdot \frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \int \frac{\sec\theta - \tan\theta}{1}\, d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta - \int \tan\theta\, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \ln|\sec\theta| + c$$

$= \ln \frac{|\sec\theta + \tan\theta|}{|\sec\theta|} + c$

$= \ln \left| \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta} \right| + c$

$= \ln|1 + \sin\theta| + c$

$= \ln(1 + \sin\theta) + c$

3) Έχουμε ότι

$\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx =$

Γνωρίζουμε ότι

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

Άρα

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

Επομένως

$\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$

$= \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| dx$

Θέτω $y = \frac{x}{2}$

$y = \frac{x}{2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}dx \Rightarrow 2dy = dx$

$y(0) = \frac{0}{2} = 0$

$y(2\pi) = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$= 2\int_0^{\pi} |\sin y|\, dy$

$= 2\int_0^{\pi} \sin y\, dy$ $\quad (0 \le y \le \pi \Rightarrow \sin y \ge 0 \Rightarrow |\sin y| = \sin y)$

$= 2\left[-\cos y\right]_0^{\pi}$

$= -2(\cos\pi - \cos 0)$

$= -2(-1-1)$

$= -2(-2)$

$= 4$

4) Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{1-\sec x} = \int \frac{dx}{1-\frac{1}{\cos x}}$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos x - 1}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos^2 x - 1}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \cos x}{-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{\cos^2 x}{-\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \int(-\cot^2 x - \cot x\cdot\csc x)\,dx$$

$$= -\int \cot^2 x\,dx - \int \cot x\csc x\,dx$$

$$= -\int \cot^2 x\,dx - (-\csc x)$$

$$= -\int(\csc^2 x - 1)\,dx + \csc x$$

$$= -\int \csc^2 x\,dx + \int dx + \csc x$$

$$= -(-\cot x) + x + \csc x + c$$

$$= \cot x + x + \csc x + c$$

5) Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} =$$

$$= \int \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \tan x \sec x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

6) Έχουμε ότι

$$\int \frac{3+5x}{2+9x^2}\, dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{2+9x^2} + 5\int \frac{x}{2+9x^2}\, dx$$

Έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{2+9x^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{2}{9}+x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \right) + c$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

Έχουμε ότι

$$\int \frac{x}{2+9x^2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 2+9x^2 \\ u = 2+9x^2 \Rightarrow du = 18x\,dx \Rightarrow \frac{1}{18}du = x\,dx \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{18}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{18}\ln|2+9x^2| + c$$

$$= \frac{1}{18}\cdot\ln(2+9x^2) + c$$

Επομένως

$$\int \frac{3+5x}{2+9x^2}\,dx = 3\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right) + 5\frac{1}{18}\ln(2+9x^2) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{18}\ln(2+9x^2) + c$$

7) Διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - x^2 + 16x & x^2+4 \\ \cline{2-2} -4x^3 \qquad\quad - 16x & 4x-1 \\ \hline -x^2 \qquad\quad & \\ x^2 \quad + \quad 4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Άρα

$$4x^3 - x^2 + 16x = (x^2+4)(4x-1) + 4$$

Επομένως

$$\frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4}=\frac{(x^2+4)(4x-1)+4}{x^2+4}=4x-1+\frac{4}{x^2+4}$$

Άρα

$$\int\frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4}dx=$$

$$=\int\left(4x-1+\frac{4}{x^2+4}\right)dx$$

$$=4\int x\,dx-\int dx+4\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=4\frac{x^2}{2}-x+4\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$=2x^2-x+4\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

$$=2x^2-x+2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

27º Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε ότι

$$I_n=\int_0^{2\pi}x^n\cos(kx)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}x^n\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)'dx$$

$$=\left[x^n\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(x^n)'\frac{\sin(kx)}{k}dx$$

$$=\left((2\pi)^n\cdot\frac{\sin(k\cdot 2\pi)}{k}-0^n\cdot\frac{\sin(k\cdot 0)}{k}\right)-\int_0^{2\pi}(x^n)'\frac{\sin(kx)}{k}dx$$

$$=\left((2\pi)^n\cdot\frac{0}{k}-0\right)-\int_0^{2\pi}nx^{n-1}\cdot\frac{\sin(kx)}{k}dx$$

$$=-\frac{n}{k}\int_0^{2\pi}x^{n-1}\left(-\frac{\cos(kx)}{k}\right)'dx$$