7) $f(x)=\sin x+x$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\sin x+x)=\cos x+1$$

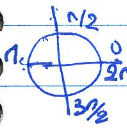
Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,2\pi)$

Έχουμε ότι

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=(2\kappa+1)\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\pi \quad [0<x<2\pi]$

Άρα, η $f(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=\pi$



Προφανώς

$f'(x)=\cos x+1>0$

για $x\in(0,\pi)$ και $x\in(\pi,2\pi)$

x	0	π	2π
Πρόσημο $f'(x)$	$+$		$+$
Μονοτονία $f(x)$	Αύξ.		Αύξ.
	τ.ε.		τ.μ.

(α) Η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $[0,2\pi]$

(β) Η $f(x)$ έχει τ.ε. για $x=0$ και τ.μ. για $x=2\pi$

(γ) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Άρα, η $f(x)$ έχει ο.μ. και ο.ε. για $x\in[0,2\pi]$

Εφόσον η $f(x)$ έχει ένα τ.ε. και ένα τ.μ. τότε η $f(x)$ έχει ο.ε. $f(0)$ για $x=0$ και ο.μ. $f(2\pi)$ για $x=2\pi$

8) $g(\theta)=\cos^2\theta$

Η $g(\theta)$ είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$

Έχουμε ότι

$$g'(\theta)=\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta)=2\cos\theta(-\sin\theta)=-\sin 2\theta$$

Η $g(\theta)$ ορίζεται για όλα τα θ στο $(0,2\pi)$

Έχουμε ότι

$g'(\theta)=0 \Leftrightarrow -\sin 2\theta=0 \Leftrightarrow \sin(2\theta)=0 \Leftrightarrow 2\theta=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

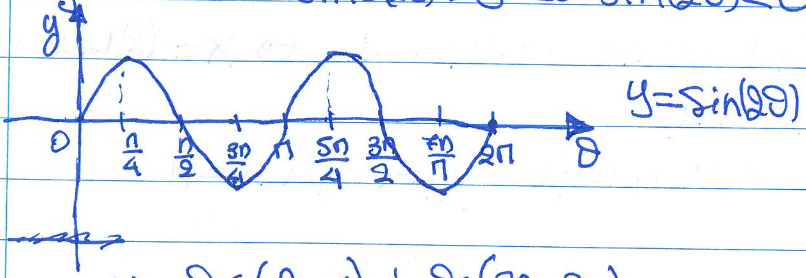
$\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ή $\theta = \pi$ ή $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $\quad [0 < \theta < 2\pi]$

Άρα, η $g(\theta)$ έχει κρίσιμα σημεία για $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Έχουμε δει

$g'(\theta) > 0 \Leftrightarrow -\sin(2\theta) > 0 \Leftrightarrow \sin(2\theta) < 0$



$\Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
πρόσημο $g'(\theta)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
Μονοτονία $g(\theta)$		Φθιν		Αυξ.		Φθιν		Αυξ.	
	τ.μ.		τ.ε.		τ.μ.		τ.ε.		τ.μ.

Άρα η $g(\theta)$ είναι φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$ και στο $[\pi, 3\pi/2]$ και αύξουσα στο $[\pi/2, \pi]$ και $[3\pi/2, 2\pi]$

(β) Η $g(\theta)$ έχει τ.μ. για $\theta = 0$, για $\theta = \pi$ και για $\theta = 2\pi$ και έχει τ.ε. για $\theta = \frac{\pi}{2}$, για $\theta = 3\pi/2$

H/W (γ) $g(0) = \cos^2(0) = 1$

$g(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0$

$g(\pi) = \cos^2\pi = 1$

$g(3\pi/2) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$g(2\pi) = \cos^2(2\pi) = 1$

Επομένως η $g(\theta)$ έχει Ο.Ε. 0 για $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$ και ο.μ. 1 για $\theta = 0$, $\theta = \pi$ και $\theta = 2\pi$.

9) $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$

Έχουμε ότι $D_f=\mathbb{R}$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}=\frac{10}{9}x^{-1/3},\ \text{για } x\neq 0$$

Η $f''(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$

Προφανώς $f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\neq 0$

Επομένως η $f(x)$ έχει πιθανό σημείο καμπής για $x=0$

Έχουμε ότι

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}}>0 \Leftrightarrow x>0$$

x	$-\infty$	0	∞
Πρόσημο $f''(x)$	$-$		$+$
Κοιλότητα $f(x)$	κοίλα κάτω		κοίλα πάνω
		σ.κ.	

(α) Η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[0,\infty)$

(β) Η $f(x)$ έχει σ.κ. για $x=0$

$g(x)=x^{\frac{5}{3}}-x$

Έχουμε ότι $D_g=\mathbb{R}$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}-x\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-1$$

Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$

Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$g''(x)=\frac{10}{9}x^{-4/3}$, για $x\neq 0$

Άρα, η $g''(x)$ δεν ορίζεται για $x=0$
Εφόσον $D_g=D_f$, $D_{g'}=D_{f'}$, $D_{g''}=D_{f''}$ και $g''(x)=f''(x)$,
η $g(x)$ και η $f(x)$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο ως προς την κοιλότητα και τα σ.κ.

(γ) Η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[0,\infty)$
δ) Η $g(x)$ έχει σ.κ. για $x=0$

<u>Ερώτ.</u>: Γενικότερα, τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

19/11/2018

11) Εφόσον η $h(x)$ είναι πολυωνυμική $D_h=\mathbb{R}$
και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h'(x)=\frac{d}{dx}(ax^3+bx^2+cx+d)=3ax^2+2bx+c.$

Η $h'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Η $h'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h''(x)=\frac{d}{dx}(3ax^2+2bx+c)=6ax+2b.$

Η $h''(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$h''(x)=0 \Leftrightarrow 6ax+2b=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b}{3a}.$

Άρα, η $h(x)$ έχει ένα πιθανό σημείο καμπής για $x=\frac{-b}{3a}$

Έχουμε ότι

τ.α. μόνο σε κρίσιμα σημεία

$h''(x) > 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b > 0 \Leftrightarrow 6ax > -2b \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{-b}{3a}, & a > 0 \\ x < \frac{-b}{3a}, & a < 0 \end{cases}$

(α) Αν $a > 0$, τότε η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, -\frac{b}{3a}]$ και στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[\frac{-b}{3a}, \infty)$.

Αν $a < 0$, τότε η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(-\infty, -\frac{b}{3a}]$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\frac{-b}{3a}, \infty)$

(β) Η $h(x)$ έχει σ.κ. για $x = \frac{-b}{3a}$.

13) Εφόσον $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$,
έχουμε ότι
$D_h = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

Εφόσον η $h(x)$ είναι ρητή, η $h(x)$ είναι συνεχής στο $D_h = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
Έχουμε ότι

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+2}{x+1}\right) = \frac{3(x+1) - (3x+2) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

Η $h'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
Προφανώς

$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \neq 0$ για όλα τα $x \neq -1$

Επομένως η $h(x)$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.
Προφανώς

$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, για $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

(α) Η $h(x)$ είναι αύξουσα στο $(-\infty, -1)$ και στο $(-1, \infty)$
(β) Η $h(x)$ δεν έχει τ.α.
Έχουμε ότι

$h''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left((x+1)^{-2}\right) = -2(x+1)^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(x+1) = -\frac{2}{(x+1)^3}$

Η $h''(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.
Προφανώς
$$h''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}\neq 0,\ \text{για } x \text{ στο } (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$$
Άρα η $h(x)$ δεν έχει πιθανά σ.κ.
Έχουμε ότι
$$h''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x+1)^3}>0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3}<0 \Leftrightarrow$$
$$(x+1)^3<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$$

(γ) Η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(-\infty,-1)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-1,\infty)$.

(δ) Η $h(x)$ δεν έχει σ.κ.

14) (α) Εφόσον η $g(x)$ είναι πολυωνυμική
Έχουμε ότι $D_g=\mathbb{R}$
Η $g(x)=ax^2+bx+c$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$$g'(x)=\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=2ax+b.$$
Η $g'(x)$ ορίζεται ~~σε όλο το $\mathbb{R}$~~ για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2ax+b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$
Έχουμε ότι
$$g''(x)=\frac{d}{dx}(2ax+b)=2a$$

Άρα,
$$g''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a>0,\ \text{αν } a>0$$
και
$$g''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a<0,\ \text{αν } a<0$$

Άρα, από το κριτήριο 2ης παραγώγου,
η $g(x)$ έχει τ.ε. $g(-\frac{b}{2a})$ για $x=-\frac{b}{2a}$, αν $a>0$

και η $g(x)$ έχει τ.μ. $g(-\frac{b}{2a})$ για $x=\frac{-b}{2a}$, αν $a<0$

(β) Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει ένα μοναδικό τ.α..
Άρα αυτό είναι ο.α..
Επομένως, αν $a>0$, η $g(x)$ έχει ο.ε. $g(-\frac{b}{2a})$
και αν $a<0$, η $g(x)$ έχει ο.μ. $g(-\frac{b}{2a})$.

13ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

2) Το Συνολικό κέρδος είναι
$$P=(x-k)\cdot m.$$
Προφανώς
$$P=m\cdot(x-k)$$
$$=\left(\frac{a}{x-k}+b(100-x)\right)(x-k)$$
$$=a+b(100-x)(x-k)$$
$$=-bx^2+(100b+k\cdot b)x+(a-100bk)$$

Μαθηματικό Μοντέλο: Θέλω να βρω το x για το οποίο η $P(x)=-bx^2+(100b+kb)x+(a-100bk)$ έχει ο.μ. στο $(0,\infty)$.

Έχουμε ότι
$$P'(x)=\frac{d}{dx}\left(-bx^2+(100b+kb)x+(a-100bk)\right)=$$
$$=-2bx+(100b+kb)$$
Η $P'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $(0,\infty)$.
Έχουμε ότι
$$P'(x)=0 \Leftrightarrow -2bx+(100b+kb)=0 \Leftrightarrow x=\frac{100+k}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=50+\frac{k}{2}$$
Άρα, η $P(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=50+\frac{k}{2}$.

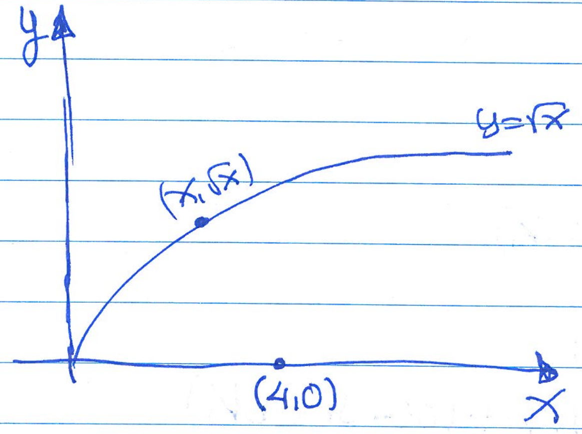
Έχουμε ότι
$$P'(x)>0 \Leftrightarrow -2bx+(100b+kb)>0 \Leftrightarrow$$
$$-2bx>-(100b+kb) \Leftrightarrow x<50+\frac{k}{2}$$
$[-2b<0]$

Άρα, η $P(x)$ είναι αύξουσα στο $(0, 50+\frac{k}{2}]$ και
είναι φθίνουσα στο $[50+\frac{k}{2}, \infty)$

Επομένως, η $P(x)$ έχει τ.μ. για $x=50+\frac{k}{2}$.
Εφόσον η $P(x)$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$ και έχει ένα τ.α. αυτό είναι ο.α..
Άρα, η $P(x)$ έχει ο.μ. για $x=50+\frac{k}{2}$.

Επομένως, η τιμή πώλησης του παιχνιδιού για την οποία η εταιρία έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος είναι
$x=50+\frac{k}{2}$ €.

3)



Έστω $(x,\sqrt{x})$ με $x\geq 0$ ένα σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{x}$
Η απόσταση του σημείου $(x,\sqrt{x})$ από το σημείο $(4,0)$ είναι

$$d=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-8x+16+x}$$
$$=\sqrt{x^2-7x+16}$$

Η απόσταση του σημείου $(4,0)$ από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ είναι η ελάχιστη τιμή του d για $x\geq 0$.
Άρα, θέλω να βρώ το ο.ε. της $d(x)=\sqrt{x^2-7x+16}$ στο $[0,\infty)$
Για να βρώ το ο.ε. της $d(x)$ αρκεί να βρώ το ο.ε. της $g(x)=x^2-7x+16$ στο $[0,\infty)$.
Έχουμε ότι

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(x^2-7x+16)=2x-7$$

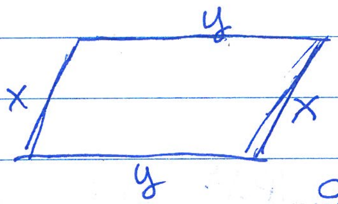
Η $g'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $[0,\infty)$
Έχουμε ότι
$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

Άρα, η $g(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $x=\frac{7}{2}$.
Έχουμε ότι
$g'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$

Επομένως η $g(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0, 7/2]$ και είναι αύξουσα στο $[7/2, \infty)$.
Άρα, η $g(x)$ έχει τ.μ. για $x=0$ και τ.ε. για $x=7/2$
Έχουμε ότι
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2-7x+16) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Άρα, η $g(x)$ δεν έχει ο.μ. και έχει ο.ε. $g(7/2) = \frac{15}{4}$.

Επομένως, το ο.ε. της $d(x)$ είναι $\sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ άρα η απόσταση του $(4,0)$ από την $y=\sqrt{x}$ είναι $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

5) 

Εφόσον η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι P, θα ισχύει ότι
$2x+2y=P$. (*)
Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ίσο με
$A=x\cdot y$

Από την (*) παίρνουμε ότι
$x=\frac{P}{2}-y$ (**)

Από την (**) παίρνουμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι $A=\left(\frac{P}{2}-y\right)\cdot y = -y^2+\frac{P}{2}\cdot y$.

Πρέπει $x,y \geq 0$

Εφόσον $x \geq 0$ και $x = \frac{P}{2} - y$, $y \leq \frac{P}{2}$.

Μαθηματικό Μοντέλο
Θέλω να βρω το y για το οποίο η
$$A(y) = -y^2 + \frac{P}{2} \cdot y$$
Έχει ο.μ. στο $[0, P/2]$.

Η $A(y)$ είναι συνεχής στο $[0, P/2]$.
Επομένως η $A(y)$ έχει ο.α. στο $[0, P/2]$.

$$A'(y) = \frac{d}{dx}\left(-y^2 + \frac{P}{2} \cdot y\right) = -2y + \frac{P}{2}.$$

Η $A'(y)$ ορίζεται για όλα τα y στο $(0, P/2)$.
Επομένως
$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow -2y + \frac{P}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{P}{4}$$

Άρα, η $A(y)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $y = \frac{P}{4}$

Επομένως η $A(y)$ μπορεί να εμφανίζει ο.α. είτε στο κρίσιμο σημείο $y = \frac{P}{4}$ είτε στα άκρα $y = 0$ και $y = \frac{P}{2}$.

Έχουμε ότι
$$A(P/4) = -\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P^2}{16},$$

$$A(0) = -0^2 + \frac{P}{2} \cdot 0 = 0, \quad A(P/2) = -\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{2} = 0$$

Επομένως η $A(y)$ έχει ο.μ. για $y = \frac{P}{4}$

Για $y = \frac{P}{4}$ από την $(**)$,

$$x = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

Άρα, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για το οποίο το εμβαδόν είναι το μέγιστο είναι το τετράγωνο.

7) Θέλω να βρω το ο.μ. της $h(t)=-33t^2+198t+140$ στο $[0,\infty)$ και το t για το οποίο εμφανίζεται το ο.μ. } Μαθημ-ατειό Μαντέλλ

Έχουμε ότι

$$h'(t)=\frac{d}{dt}(-33t^2+198t+140)=-66t+198$$

Η $h'(t)$ ορίζεται για όλα τα t στο $(0,\infty)$

Έχουμε ότι

$h'(t)=0 \Leftrightarrow -66t+198=0 \Leftrightarrow t=3.$

Άρα, η $h'(t)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο για $t=3$

Έχουμε ότι

$h'(t)>0 \Leftrightarrow -66t+198>0 \Leftrightarrow -66t>-198 \Leftrightarrow t<3$

Επομένως η $h(t)$ είναι αύξουσα στο $[0,3]$ και φθίνουσα στο $[3,\infty)$

Η $h(t)$ έχει τ.ε. για $t=0$ και ε.μ. για $t=3$

Έχουμε ότι

$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{t\to\infty}(-33t^2+198t+140)=-\infty.$ όχι ο.ε.

Άρα η $h(t)$ έχει ο.μ. $h(3)$ για $t=3$.

Επομένως το μέγιστο ύψος του σώματος είναι $h(3)=437m$ την χρονική στιγμή $t=3\,sec$.

20/11/2018

14ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

Σημ.: Εναλλακτικά θα μπορούσα να πω ότι το όριο $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x+1)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{2x} = \frac{2\cdot 1-2}{2\cdot 1} = 0$$

3) Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(3x))'}{(\tan(5x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{5\sec^2(5x)}$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)}{\sec^2(5x)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\cos(0)}{\sec^2(0)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5}.$$

4) Το όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x+3}{x^4+x^2+4} = \lim_{x\to \infty} \frac{(2x+3)'}{(x^4+x^2+4)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{2}{4x^3+2x} = \lim_{x\to \infty} \frac{2}{4x^3} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

5) Το όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+x-7}{-3x^3+2x^2-9} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(2x^3+x-7)'}{(-3x^3+2x^2-9)'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{6x^2+1}{-9x^2+4x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{-\infty}$.
Χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{6x^2+1}{-9x^2+4x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(6x^2+1)'}{(-9x^2+4x)'} = \boxed{\lim_{x\to -\infty} \frac{12x}{-18x+4}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

ή

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{\infty}$.
Θα χρησιμ. πάλι τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{12x}{-18x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(12x)'}{(-18x+4)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{12}{-18}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

Άρα, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x-7}{-3x^3+2x^2-9}=-\frac{2}{3}$

6) (α) Το όριο είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot 1=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\csc x=1$$

(συντέμνουσα)

Επομένως,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan x=1.$$

<u>2ος τρόπος</u>: Το όριο είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cot x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'}{(\cot x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\csc^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin^2 x=\sin^2(\pi/2)=1$$

Επομένως, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=1$

7) Το όριο είναι της μορφής $\infty - \infty$.
Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1/2}-x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1/2}-x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^{1/2}-x)'}{(x^{\frac{3}{2}})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}-1}{\frac{3}{2}x^{+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2\sqrt{x}}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0^+}(1-2\sqrt{x})\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\infty=\infty$$

Άρα, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\infty$

Σημ.: θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

Ασκ.: Υπολογίστε το όριο χωρίς κανόνα l'Hopital.

8) (α) Το όριο είναι της μορφής $\infty - \infty$.
Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

Το τελευταίο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{-\sin x}=-\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cot x=-\cot\frac{\pi}{2}=-0=0$$

Άρα, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x-\sec x)=0$.

9 (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 - 6x + b\sin(2x)}{cx^2}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Χρησιμ. τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2-6x+b\cdot\sin(2x)}{cx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(ax^2-6x+b\sin(2x))'}{(cx^2)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax - 6 + 2b\cos(2x)}{2cx}$$

Έστω ότι $b \neq 3$.

τότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax + 2b\cos(2x) - 6}{2cx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (2ax - 6 + 2b\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2c} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$$

$$= (2\cdot a\cdot 0 - 6 + 2b\cdot\cos 0) \frac{1}{2c} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(2b-6)}{2c} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{2b-6}{2c} \cdot \begin{cases} \infty, \text{ όταν } x\to 0^+ \\ -\infty, \text{ όταν } x\to 0^- \end{cases}$$

Εφόσον $b \neq 3$, $\frac{2b-6}{2c} \neq 0$.

Άρα, για $b \neq 3$ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

Τότε για $b=3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax - 6 + 2b\cdot\cos(2x)}{2cx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2ax - 6 + 6\cos(2x)}{2cx}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax - 6 + 6\cos 2x}{2cx} = \lim_{x\to 0} \frac{(2ax-6+6\cos(2x))'}{(2cx)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2a - 12\sin(2x)}{2c} = \frac{2a - 12\cdot\sin 0}{2c} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}.$$

Άρα, για $b=3$
$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a}{c}$

(β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και ~~ισχύει~~ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Από τα (α), το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $b=3$.

Για $b=3$,
$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a}{c}$.

Έχουμε ότι
$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = d \Leftrightarrow a = c\cdot d$.

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 για $b=3$ και $a,c,d \in \mathbb{R}$ με $a,c,d \neq 0$ ε.ω. $a = c\cdot d$.

Σπίτι: 12ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

10) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$
Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Έχουμε ότι
$f'(x) = \frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax+b$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\mathbb{R}$
Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Έχουμε ότι
$f''(x) = \frac{d}{dx}(2ax+b) = 2a$

Εφόσον $a \neq 0$
$f''(x) \neq 0$ Άρα, η $f(x)$ δεν εμφανίζει σ.κ.
$f''(x) = \begin{cases} 2a > 0, & \text{αν } a>0 \\ 2a<0, & \text{αν } a<0 \end{cases}$

(α) Αν $a>0$, η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο $\mathbb{R}$