15/10/2018

5º Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκ 1 (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^{r_n} + a_{n-1}x^{r_{n-1}} + \dots + a_2 x^{r_2} + a_1 x^{r_1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n \frac{x^{r_n}}{x^{r_n}} + a_{n-1}\frac{x^{r_{n-1}}}{x^{r_n}} + \dots + a_2\frac{x^{r_2}}{x^{r_n}} + a_1\frac{x^{r_1}}{x^{r_n}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n + a_{n-1}x^{r_{n-1}-r_n} + \dots + a_2 x^{r_2-r_n} + a_1 x^{r_1-r_n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(\lim_{x\to\infty} a_n + a_{n-1}\lim_{x\to\infty} x^{r_{n-1}-r_n} + \dots + a_2 \lim_{x\to\infty} x^{r_2-r_n} + a_1\lim_{x\to\infty} x^{(r_1-r_2)}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{r_n}\left(a_n + a_{n-1}\cdot 0 + \dots + a_2\cdot 0 + a_1\cdot 0\right) = a_n \lim_{x\to\infty} x^{r_n}$$

$$\left[\begin{array}{l} r_n > r_i, \text{ για } i=1,2,\dots,n-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_i - r_n < 0, \text{ για } i=1,2,\dots,n-1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{r_i-r_n} = 0 \end{array}\right]$$

Ασκ 2) (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= a_n \lim_{x\to\infty} x^n \quad [\text{από } 1(\alpha)]$$

$$= \infty \cdot a_n = a_n \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

(β) Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0\right) = [\text{από Ασκ } 1\,(\beta)]$$

$$= a_n \lim_{x\to-\infty} x^n = a_n \cdot \begin{cases} \infty, & \text{αν } n = 2m \text{ (άρτιος)} \\ -\infty, & \text{αν } n = 2m+1 \text{ (περιττός)} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{αν } n=2m \text{ και } a_n>0 \\ -\infty, & \text{αν } n=2m \text{ και } a_n<0 \\ -\infty, & \text{αν } n=2m+1,\ a_n>0 \\ \infty & \text{αν } n=2m+1,\ a_n<0 \end{cases}$$

Ασκ3: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}-3\sqrt[3]{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(4x^{\frac{1}{3}}+x^{-7/5}-3x^{\frac{2}{3}}\right)= \quad [\text{από Ασκ } 1(6)]$$

$$=-3\lim_{x\to-\infty}x^{\frac{2}{3}}=-3\cdot\infty=-\infty$$

2ος τρόπος: Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο

Ασκ: Κάντε το

(6) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt[8]{x^9}+\frac{4}{x^{13}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x^1-x^{\frac{9}{8}}+4\cdot x^{-13}\right)= \quad [\text{Από } 1(\alpha)]$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x^{9/8}=-\infty$$

Ασκ4: (6) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^{r_n}+a_{n-1}x^{r_{n-1}}+\dots+a_2x^{r_2}+a_1x^{r_1}}{b_mx^{s_m}+b_{m-1}x^{s_{m-1}}+\dots+b_2x^{s_2}+b_1x^{s_1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{r_n}\left(a_n+a_{n-1}x^{r_{n-1}-r_n}+\dots+a_2x^{r_2-r_n}+a_1x^{r_1-r_n}\right)}{x^{s_m}\left(b_m+b_{m-1}x^{s_{m-1}-s_m}+\dots+b_2x^{s_2-s_m}+b_1x^{s_1-s_m}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{r_n}}{x^{s_m}}\cdot\frac{\lim_{x\to-\infty}(a_n)+\lim_{x\to-\infty}a_{n-1}x^{r_{n-1}-r_n}+\dots+a_2\lim_{x\to-\infty}x^{r_2-r_n}+a_1\lim_{x\to-\infty}x^{r_1-r_n}}{\lim_{x\to-\infty}b_m+b_{m-1}\lim_{x\to\infty}x^{s_{m-1}-s_m}+\dots+b_2\lim_{x\to-\infty}x^{s_2-s_m}+b_1\lim_{x\to-\infty}x^{s_1-s_m}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{r_n}}{x^{s_m}} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\cdot 0 + \dots + a_2\cdot 0 + a_1\cdot 0}{b_m + b_{m-1}\cdot 0 + \dots + b_2\cdot 0 + b_1\cdot 0}$$

$r_n > r_i$, για $i = 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow r_i - r_n < 0$ για $i = \dots$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{r_i - r_n} = 0$, για $i = \dots$

$s_m > s_j$ για $j = 1, 2, \dots, m-1 \Rightarrow s_j - s_m < 0$ για $j = \dots$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{s_j - s_m} = 0$, για $j = \dots$

Τελικά, $= \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n \cdot x^{r_n}}{b_m x^{s_m}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x\to-\infty} x^{r_n - s_m}$

<u>Ασκ5</u>: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^1} + \sqrt[3]{x^2}}{x-9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^1 - 9\cdot x^0} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2/3}}{x^1} = \lim_{x\to-\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \quad [\text{Από Ασκ. 4(β)}]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

<u>2ος τρόπος</u>: διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρανομαστή.

<u>Ασκ</u>: Κάντε το και έτσι

β) $$\lim_{x\to\infty} \frac{-8\sqrt[6]{x^1} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}}{\frac{9}{x} - 2\sqrt[6]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^{1/6} + 5x^{-3/4}}{9\cdot x^{-1} - 2x^{1/6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^{1/6}}{-2x^{1/6}} = \lim_{x\to\infty} 4 \cdot x^{1/6 - 1/6} \quad [\text{από Ασκ 4(α)}]$$

$$= \lim_{x\to\infty} 4 = 4$$

2ος τρόπος διαιρώ αρ. + παρ. με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρανομαστή

$\frac{2-\frac{8}{6}}{} = \frac{12-8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

γ) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt[9]{x^2} - 3x^2}{\frac{2}{x^2} + 12\sqrt[6]{x^8}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^{\frac{5}{3}} - 2\cdot x^{\frac{2}{9}} - 3x^2}{2\cdot x^{-2} + 12\cdot x^{\frac{8}{6}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{12x^{8/6}} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{2}{3}}$$ [από Ασκ 4 (β)]

$$= -\frac{1}{4}\cdot\infty = -\infty$$

2ος τρόπος Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή.

Ασκ 6: Έχουμε ότι

(α) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+2x-3}{5x^3-7x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+2x-3}{x(5x^2-7)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+2x-3}{5x^2-7} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cdot \frac{3\cdot 0^2+2\cdot 0-3}{5\cdot 0^2-7} = \frac{3}{7}\cdot\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{3}{7}\cdot(-\infty) = -\infty$$

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^7} + 8x^2}{-3x + 8\sqrt[5]{x^{12}} - 7\cdot\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot x^{1/3} - 3x^{7/3} + 8x^2}{-3x + 8x^{12/5} - 7x^{1/3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/3}\left(2 - 3x^2 + 8x^{5/3}\right)}{x^{1/3}\left(-3x^{2/3} + 8x^{31/15} - 7\right)} =$$

$\frac{12}{5} - \frac{7}{3} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2-3x^2+8x^{5/3}}{-3x^{2/3}+8x^{31/15}-7} = \frac{\lim_{x\to 0^+}(2-3x^2+8x^{5/3})}{\lim_{x\to 0^+}(-3x^{2/3}+8x^{31/15}-7)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0^+} 2 - 3\lim_{x\to 0^+} x^2 + 8\lim_{x\to 0^+} x^{5/3}}{-3\lim_{x\to 0^+} x^{2/3} + 8\lim_{x\to 0^+} x^{31/15} - \lim_{x\to 0^+} 7} = \frac{2-3\cdot 0+8\cdot 0}{-3\cdot 0+8\cdot 0-7} = -\frac{2}{7}$$

Παρατήρηση: Και στο (α) και στο (β) βγάλαμε από αριθμητή/παρονομαστή κοινό παράγοντα τον όρο μικρότερου βαθμού του αριθμητή και παρονομαστή.

! $\left\{ \begin{array}{l} \text{Στα } x \to x_0 \text{ παίρνουμε τον μικροβάθμιο} \\ \text{Στα } x \to \pm\infty \text{ παίρνουμε μεγιστοβάθμιο κοινό παράγοντα} \end{array} \right\}$

Άσκηση 7: (α) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x-2)^2 + 3(x-2)^7}{-6(x-2)^{7/3} + 5(x-2)}$

$\left[ \begin{array}{l} \text{θέτω } y = x-2 \\ x \to 2^- \Rightarrow x-2 \to 0^- \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right]$

$$\lim_{y \to 0^-} \frac{2y^2 + 3y^7}{-6y^{7/3} + 5y} = \lim_{y \to 0^-} \frac{y^2(2+3y^5)}{y(-6y^{4/3}+5)} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} y \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{2+3y^5}{-6y^{4/3}+5} = 0 \cdot \frac{2+3\cdot 0^5}{-6\cdot 0^{4/3}+5} = 0 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

(β) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{5|x+3|^2 + 9|x+3|^{1/2}}{2|x+3|^7 - 11|x+3|^6}$

! $\left[ \begin{array}{l} \text{Θέτω } y = |x+3| \\ x \to -3^- \quad x+3 \to 0^- \Rightarrow |x+3| \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+ \end{array} \right]$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{5y^2 + 9y^{1/2}}{2y^7 - 11y^6} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{1/2}(5y^{3/2}+9)}{y^6(2y-11)} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y^{11/2}} \cdot \lim_{y \to 0^+} \frac{5y^{3/2}+9}{2y-11} = \infty \cdot \frac{5\cdot 0^{3/2}+9}{2\cdot 0 - 11} =$$

$$= \infty(-9/11) = -\infty$$

Άσκ 8: Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^5} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \cdot (-\infty) =$$

[Θέτω $y = x^4$ $\quad x\to 0^- \Rightarrow x^4 \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$]

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} \cdot (-\infty) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

Άσκ 9: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} x \cdot \sin(1/x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}}.$$

[Θέτω $y = \frac{1}{x}$, $x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow y \to 0^-$]

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin y}{y} = \underline{1}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\cos(1/x^3)}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^4 \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$$

[Θέτω $y = \frac{1}{x}$ $\quad x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$]

$$\lim_{y\to 0^+} y^4 \cdot \cos(y^3) = \lim_{y\to 0^+} y^4 \cdot \lim_{y\to 0^+} \cos(y^3) = 0^4 \cdot \cos(0^3)$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

[$\cos(y^3)$ συνεχής]

Ασκ10: Έχουμε ότι

$$-\frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{1}{x}, \quad x\in(-5/7,0) \quad (*)$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}(-1/x^2) = -\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = -\infty \quad (**)$$

και ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ (***)

Από (*), (**), (***) και το θεώρημα σύγκρισης παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Ασκ11: (α) Για $x\in\mathbb{R}$,

$$-1\le \cos(3x) \le 1.$$

Για $x<-\frac{1}{4}$, $4x+1<0$

Άρα,

$$\frac{1}{4x+1} \le \frac{\cos(3x)}{4x+1} \le -\frac{1}{4x+1}, \quad \text{για } x<-\frac{1}{4} \quad (*)$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4x} = 0 \quad (**)$$

και ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4x+1}\right) = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4x} = -0 = 0 \quad (***)$$

Από τις (*), (**), (***) και το θεωρ. σύγκρισης

Παίρνουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos(3x)}{4x+1} = 0$

(β) Γνωρίζουμε ότι

$-1 \leq \sin(5x^2-12x+9) \leq 1$, για $x \in \mathbb{R}$.

Για $x>2$, $-x^4+16<0$

Άρα,

(*) $\frac{1}{-x^4+16} \leq \frac{\sin(5x^2-12x+9)}{-x^4+16} \leq -\frac{1}{-x^4+16}$, για $x \geq 2$

Έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4+16} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4} = \cancel{-\infty}\ 0$ (**)

και ότι

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{-x^4+16} = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{-x^4} = -0 = 0$ (***)

Από (*), (**) και (***) παίρνουμε

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(5x^2-12x+9)}{-x^4+16} = 0.$

Πρόοδος: Τετάρτη

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων 16/10/2018

Ασκ 1: Έστω

$f(x) = \frac{x}{x+4}$

Προφανώς $D_f = (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1$

και ότι

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$

Άρα, η $y = \frac{x}{x+4}$ έχει μια οριζόντια ασύμπτωτη, την $y = 1$

Ασκ 2: Έστω

$f(x) = \frac{2x^3+7}{x^2-2}$

Έχουμε ότι $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Και άρα $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3+7}{x^2-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x =$

$= 2 \lim_{x \to -\infty} x = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$

και ότι

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+7}{x^2-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} 2x = 2 \lim_{x \to \infty} x = 2 \cdot \infty = \infty$

Επομένως, η $y = \frac{2x^3+7}{x^2-2}$ δεν έχει καμιά οριζόντια ασύμπτωτη.

'Ασκ3:

Έστω $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$.

Έχουμε ότι $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Επομένως, $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

Η $f(x)$ είναι ρητή άρα η $f(x)$ είναι συνεχής σε όλα τα $x\in D_f$

Επομένως, πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$ είναι οι $x=-3$ και $x=3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{-3-3}=-\frac{1}{6}.$$

Άρα, η $x=-3$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=$$

[Θέτω $y=x-3$, $x\to 3^- \Rightarrow x-3\to 0^- \Rightarrow y\to 0^-$]

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{y}=-\infty$$

Άρα, η $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x+3}{x^2-9}$.

Δεν χρειάζεται για $x=3^+$ ~~εν~~

Σημείωση: Εναλλακτικά θα μπορούσα να πάρω ότι $\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x^2-9}=\infty$.

Άσκ 4:

Έστω $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Έχουμε ότι

$x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$|x|>1 \Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1$

Επομένως, $D_f = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

• Οριζόντιες Ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-1/x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} =$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Για } x<0 \\ \Rightarrow |x|=-x \end{array}\right]$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-1/x^2}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}} = -1$$

και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1-1/x^2)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(1-1/x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-1/x^2}}$$
$\left[\begin{array}{l} x>0 \Rightarrow \\ |x|=x \end{array}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} 1/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

Άρα, η $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες τις

$y=-1$ και $y=1$

• Κατακόρυφες Ασύμπτωτες

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $D_f$

<u>Άσκηση</u>: αποδείξτε το αναλυτικά

Άρα, πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ είναι

η $x=-1$ και $x=1$

Έχουμε ότι     από δεξιά του $-1$ δεν ορίζεται

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -1^-} x \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= -1 \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\left[ \text{Θέτω } y = x^2-1 ,\ x\to -1^- \Rightarrow x^2-1 \to 0^+ \atop x^2 \to 1^+ \Rightarrow x^2-1 \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+ \right]$$

$$= -\cancel{\lim_{x\to 1}} = -\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = -\infty$$

Επομένως η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} x \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\left[ \text{Θέτω } y = x^2-1 \quad x\to 1^+ \Rightarrow x^2 \to 1^+ \Rightarrow x^2-1 \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+ \right]$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = \infty$$

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

8:45 για την περίοδο

**Ασκ5:** Έστω $f(x) = x\cdot\sin(\frac{1}{x})$

Προφανώς $D_f = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

η $g(x)=x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι πολυωνυμική

η $h_1(x)=\sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι τριγωνομετρική

η $h_2(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*=D_{h_2}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ γιατί είναι ρητή

Άρα, η $h(x)=(h_1\circ h_2)(x) = \sin(1/x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Εφόσον η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επομένως, η $y=x\cdot\sin(1/x)$ έχει μια πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$

Γνωρίζουμε ότι

$$0\le\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1, \text{ για } x\neq 0$$

Άρα,

$$0\le\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|, \text{ για } x\neq 0. \quad (*)$$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to 0} 0=0$ (**) και ότι $\lim_{x\to 0}|x|=0$ (***)

Από τις (*), (**) και (***) και το θεώρημα Σάντουιτς το $\lim_{x\to 0}\left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=0$

Άρα, $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Επομένως, η $y=x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν έχει καμία κατακόρυφη ασύμπτωτη.

# 7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

**Ασκ.1** (α) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to0} f(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα

$\lim_{x\to0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)$

Έχουμε ότι

$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(\alpha x+b)=\alpha\cdot0+b=b$

και ότι $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(\cancel{\alpha x+b}\,2x^2+\alpha)=2\cdot0^2+\alpha=\alpha$

Επομένως τα $\lim_{x\to0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to0^+} f(x)$ υπάρχουν για οποιαδήποτε

$\alpha,b\in\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} \Leftrightarrow b=\alpha$

Επομένως, $\lim_{x\to0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha,b\in\mathbb{R}$ με $\alpha=b$

Αν $\alpha=b$ τότε

$\lim_{x\to0} f(x)=\alpha \quad (=b)$

(β) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0 αν υπάρχει το $\lim_{x\to0} f(x)$ και

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

Από το (α), το $\lim_{x\to0} f(x)$ υπάρχει για $\alpha,b\in\mathbb{R}$ με $\alpha=b$

Αν $\alpha=b$ τότε

$\lim_{x\to0} f(x)=\alpha$

Επομένως, $\lim_{x\to0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \alpha=2$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=0$ για $\alpha=b=2$

Άσκ 2: (α) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{ax^4}{3} + bx + \frac{\sin(ax)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{ax^4}{3} + bx\right) + \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{a\cdot 0^4}{3} + b\cdot 0 + a$$

$= a$

και ότι

$$\lim_{x\to 0^+} (ax^2 + b\cos(bx) + 2b) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} (ax^2 + 2b) + b\lim_{x\to 0^+} \cos(bx) =$$

$$= a\cdot 0^2 + 2b + b\cdot \lim_{x\to 0^+} \cos(bx)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = bx \\ x\to 0^+ \Rightarrow bx \to \begin{cases} 0^+, & b\geq 0 \\ 0^-, & b<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\to 0^+, & b\geq 0 \\ y\to 0^-, & b<0 \end{cases} \end{array}\right]$$

$$= 2b + b\cdot \begin{cases} \lim_{y\to 0^+} \cos y, & b\geq 0 \\ \lim_{y\to 0^-} \cos y, & b<0 \end{cases}$$

$= 2b + b\cdot 1 = 3b$

Επομένως τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν για όλα

τα $a, b \in \mathbb{R}$.

Επομένως $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 3b$

Άρα, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $a, b\in\mathbb{R}$ με $a=3b$

Αν $a=3b$, τότε
$\lim_{x\to 0} f(x) = 3b\,(=a)$

(β) Η $f(x)$ είναι ~~συνεχ~~ συνεχής εάν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$
και $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

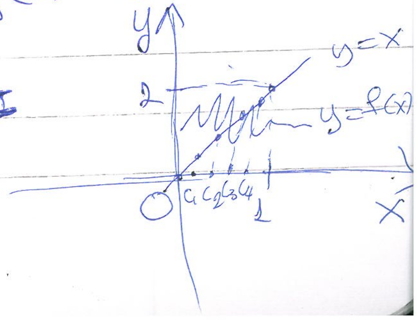
Από το (α), το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει για $a, b\in\mathbb{R}$ με $a=3b$

Αν $a=3b$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 3b$ ή $(=a)$

Επιπλέον,
$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 3b=3 \Leftrightarrow b=1$

Άρα, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=0$ για $a=3$ και $b=1$

Ασκ3: Έστω $g(x)=f(x)-x$
Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και η $h(x)=x$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, η $g(x)=f(x)-h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Έχουμε ότι
$g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$
και ότι
$g(1)=f(1)-1\leq 0$ $[f(1)\leq 1 \Rightarrow f(1)-1\leq 0]$
Εφόσον η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0)\geq 0$ και $g(1)\leq 0$ από το θεωρ. ενδ. τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in[0,1]$ τ.ω. $g(c)=0$.




Όμως, $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)-c=0 \Leftrightarrow f(c)=c$

Ασκ4: (α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to a+2k\pi} \sin x =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = x - 2k\pi \\ x \to a + 2k\pi \Rightarrow x - 2k\pi \to a \Rightarrow y \to a \\ y = x - 2k\pi \Rightarrow x = y + 2k\pi \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y \to a} \sin(y + 2k\pi) = \lim_{y \to a} \sin y$$

(Γιατί $\sin\theta$ περιοδική με $T = 2\pi \Rightarrow \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$, $k \in \mathbb{Z}$)

Ασκ5: (α) $\lim_{x \to \pi/2} \sin x =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτω } y = x - \pi/2 \\ x \to \pi/2 \Rightarrow x - \pi/2 \to 0 \Rightarrow y \to 0 \\ y = x - \pi/2 \Rightarrow x = y + \pi/2 \end{array}\right]$$

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\lim_{y \to 0} \sin(y + \pi/2) = \lim_{y \to 0} \left(\sin y \cdot \cos(\pi/2) + \cos y \cdot \sin(\pi/2)\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} (\sin y \cdot 0 + \cos y \cdot 1) = \lim_{y \to 0} \cos y = 1$$

Ασκ6: (α) Έστω $f(x) = \sin x$

προφανώς $D_f = \mathbb{R}$

Για να δείξω ότι η $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής πρέπει να δείξω ότι είναι συνεχής στο $x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Άρα, πρέπει ν.δ.ο για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι $\lim_{x \to x_0} \sin x$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } y = x - x_0 \\ x \to x_0 \Rightarrow x - x_0 \to 0 \Rightarrow y \to 0 \\ \quad y = x - x_0 \Rightarrow x = y + x_0 \end{array}\right]$$

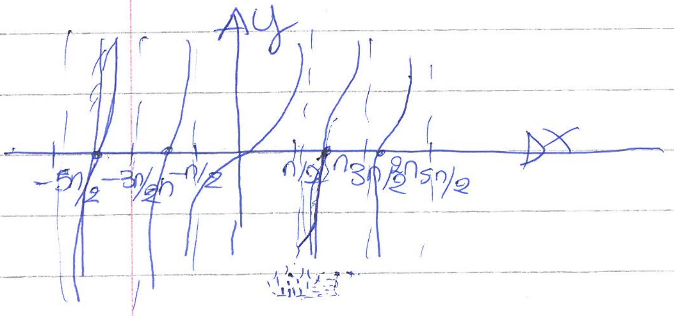
$$\lim_{y\to 0} \sin(y+x_0) = \lim_{y\to 0}\left(\sin y \cos x_0 + \sin x_0 \cos y\right) =$$

$$= \cos x_0 \cdot \lim_{y\to 0} \sin y + \sin x_0 \cdot \lim_{y\to 0} \cos y =$$

$$= \cos x_0 \cdot 0 + \sin x_0 \cdot 1 = \sin x_0$$

Άρα, η $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής

Ασκ 7: (α) Έστω $f(x) = \tan x$,
Γνωρίζουμε ότι
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$




Από την Ασκ 6 (γ), η $f(x)$ είναι συνεχής στο $D_f$.
Άρα, οι πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y = \tan x$ είναι οι $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Έστω $k \in \mathbb{Z}$.

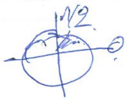
$$\lim_{x \to k\pi + \pi/2^-} \tan x$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{θέτω } y = x - k\pi \\ x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow x - k\pi \to \pi/2^- \Rightarrow y \to \pi/2 \\ y = x - k\pi \Rightarrow x = y + k\pi \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(y + k\pi)$$

$$\left[\begin{array}{l} \tan\theta \text{ περιοδική με περίοδο } \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \tan(\theta + k\pi) = \tan\theta, \text{ για } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \tan y = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin y}{\cos y}$$



$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\Rightarrow |\cos^2 y| = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

Για $0 < y < \pi/2$, $\cos y > 0$ και άρα $|\cos y| = \cos y$

Επομένως, για $0 < y < \pi/2$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$$= \lim_{y \to \pi/2^-} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} =$$

[Θέτω $z = \sin y$

$y \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \sin y \to 1^- \Rightarrow z \to 1^-$]

$$\lim_{z \to 1^-} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \lim_{z \to 1^-} \frac{z}{\sqrt{1+z}} \cdot \lim_{z \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-z}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \infty = \infty$$ [Άσκηση: Κάντε το αναλυτικά]

Άρα, η $x = k\pi + \pi/2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = \tan x$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

Σημείωση: Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πάρουμε το $\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

Άσκ: Υπολογίστε το