ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009–2010

Θέμα 1: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)}\,.$$

Λύση: *1ος τρόπος:* Για $x \neq 0$, θέτουμε

$$y = \frac{1}{x^2}\,.$$

Αν

$$x \to -\infty,$$

τότε

$$\frac{1}{x^2} \to 0^+$$

και άρα

$$y \to 0^+.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin(-3y)}\,.$$

Από τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin(-3y)} &= \lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{-3y}{\sin(-3y)}\right)\\ &= -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^+} \frac{-3y}{\sin(-3y)}\,.\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$z = -3y.$$

Αν

$$y \to 0^+,$$

τότε

$$-3y \to 0^-$$

και άρα

$$z \to 0^-.$$

Άρα

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{-3y}{\sin(-3y)} = \lim_{z\to 0^-} \frac{z}{\sin z}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0^-} \frac{z}{\sin z} &= \lim_{z\to 0^-} \frac{1}{\dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0^-} \dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1 = -\frac{1}{3}\,.$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)}$$

και με δύο ακόμη, παρόμοιους με τον παραπάνω, τρόπους:
(α) Εφόσον ισχύει ότι

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

για όλα τα θ στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}\right) \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Για $x \neq 0$, θέτουμε

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Αν

$$x \to -\infty,$$

τότε

$$\frac{1}{x^2} \to 0^+$$

και άρα

$$y \to 0^+.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y\to0^+} \frac{y}{\sin 3y}.$$

Από τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to0^+} \frac{y}{\sin 3y} &= \lim_{y\to0^+} \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\right) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{y\to0^+} \frac{3y}{\sin 3y}.
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$z = 3y.$$

Αν

$$y \to 0^+,$$

τότε

$$3y \to 0^+$$

και άρα

$$z \to 0^+.$$

Άρα

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{3y}{\sin 3y} = \lim_{z \to 0^+} \frac{z}{\sin z}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0^+} \frac{z}{\sin z} &= \lim_{z \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{z \to 0^+} \dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = -\left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

(β) Για $x \neq 0$, θέτουμε

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Αν

$$x \to -\infty,$$

τότε

$$\frac{1}{x^2} \to 0^+$$

και άρα

$$y \to 0^+.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin(-3y)}\,.$$

Εφόσον ισχύει ότι

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

για όλα τα θ στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin(-3y)} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{-\sin 3y} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \left(-\frac{y}{\sin 3y}\right) \\
&= -\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin 3y}\,.
\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin 3y} &= \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3y}{\sin 3y}\right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{y \to 0^+} \frac{3y}{\sin 3y}\,.
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$z = 3y.$$

Αν

$$y \to 0^+,$$

τότε

$$3y \to 0^+$$

και άρα

$$z \to 0^+.$$

Άρα
$$\lim_{y \to 0^+} \frac{3y}{\sin 3y} = \lim_{z \to 0^+} \frac{z}{\sin z}\,.$$
Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$
παίρνουμε ότι
$$\begin{aligned}\lim_{z \to 0^+} \frac{z}{\sin z} &= \lim_{z \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{z \to 0^+} \dfrac{\sin z}{z}} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$
Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = -\left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

2ος τρόπος: Για $x \neq 0$, θέτουμε
$$y = -\frac{3}{x^2}\,.$$
Αν
$$x \to -\infty,$$
τότε
$$-\frac{3}{x^2} \to 0^-$$
και άρα
$$y \to 0^-.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-\dfrac{y}{3}}{\sin y}\,.$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^-} \frac{-\dfrac{y}{3}}{\sin y} &= \lim_{y\to 0^-} \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{\sin y}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^-} \frac{y}{\sin y} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^-} \frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}} \\
&= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0^-}\frac{\sin y}{y}} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} \\
&= -\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = -\frac{1}{3}\,.$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\sin\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)}$$

και με δύο ακόμη, παρόμοιους με τον παραπάνω, τρόπους:

(α) Εφόσον ισχύει ότι

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

για όλα τα θ στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} \right) \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} .
\end{aligned}$$

Για $x \neq 0$, θέτουμε

$$y = \frac{3}{x^2}.$$

Αν

$$x \to -\infty,$$

τότε

$$\frac{3}{x^2} \to 0^+$$

και άρα

$$y \to 0^+.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{\sin y} .$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{\sin y} &= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{\sin y}\right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin y} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = -\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

(β) Για $x \neq 0$, θέτουμε

$$y = \frac{3}{x^2}\,.$$

Αν

$$x \to -\infty,$$

τότε

$$\frac{3}{x^2} \to 0^+$$

και άρα

$$y \to 0^+.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{\sin(-y)}\,.$$

Εφόσον ισχύει ότι

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

για όλα τα θ στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{\sin(-y)} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{-\sin y} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{\frac{y}{3}}{\sin y} \right) \\
&= -\lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y}{3}}{\sin y} \\
&= -\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{\sin y} \right) \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin y} \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \\
&= -\frac{1}{3} \frac{1}{\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y}} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \\
&= -\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sin\left(-\frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{1}{3}\,.$$

Θέμα 2: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}} \,.$$

Λύση: *1ος τρόπος:* Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη δύναμη του x στον παρονομαστή του

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}}$$

είναι η $x^{\frac{7}{3}}$. Πολλαπλασιάζοντας με $x^{-\frac{7}{3}}$ (ή ισοδύναμα διαιρώντας με $x^{\frac{7}{3}}$) τον αριθμητή και τον παρονομαστή του

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}}$$

παίρνουμε ότι, για $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}} &= \frac{x^{-\frac{7}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x\right)}{x^{-\frac{7}{3}}\left(3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}\right)} \\
&= \frac{x^{-\frac{7}{3}}\,x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{7}{3}}\,x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{7}{3}}\,x}{3x^{-\frac{7}{3}}\,x^{\frac{7}{3}} - 3x^{-\frac{7}{3}}\,x^2 + 2x^{-\frac{7}{3}}\,x^{\frac{5}{3}}} \\
&= \frac{x^{-\frac{5}{3}} - 3x^{-1} + 2x^{-\frac{4}{3}}}{3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\frac{5}{3}} - 3x^{-1} + 2x^{-\frac{4}{3}}}{3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \,.$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x\to\infty} x^r = 0, \text{ για } r < 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} k = k,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^{-1} + 2x^{-\frac{4}{3}}\right) &= \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{5}{3}} - 3\lim_{x\to\infty} x^{-1} + 2\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{4}{3}} \\
&= 0 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right) &= \lim_{x\to\infty}3-3\lim_{x\to\infty}x^{-\frac{1}{3}}+2\lim_{x\to\infty}x^{-\frac{2}{3}}\\ &= 3-3\cdot 0+2\cdot 0\\ &= 3.\end{aligned}$$

Εφόσον, όπως μόλις δείξαμε,

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)\neq 0,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τα δύο όρια που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{5}{3}}-3x^{-1}+2x^{-\frac{4}{3}}}{3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{5}{3}}-3x^{-1}+2x^{-\frac{4}{3}}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)}\\ &= \frac{0}{3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+2x}{3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}}}=0.$$

2ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη δύναμη του x στον αριθμητή του

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+2x}{3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}}}$$

είναι η $x^{\frac{4}{3}}$ και η μεγαλύτερη δύναμη του x στον παρονομαστή του

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+2x}{3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}}}$$

είναι η $x^{\frac{7}{3}}$. Για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}} &= \frac{x^{\frac{4}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{7}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{7}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x^{\frac{4}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{7}{3}}\left(3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right)} \\
&= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}}\ \frac{x^{-\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}}{3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}} \\
&= x^{-1}\ \frac{x^{-\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}}{3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 2x}{3x^{\frac{7}{3}} - 3x^2 + 2x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\left(x^{-1}\ \frac{x^{-\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}}{3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}}\right).$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x\to\infty} x^r = 0,\ \text{για } r < 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} k = k,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}\right) &= \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{2}{3}} - \lim_{x\to\infty} 3 + 2\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{3}} \\
&= 0 - 3 + 2\cdot 0 \\
&= -3
\end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right) &= \lim_{x\to\infty} 3 - 3\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{3}} + 2\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{2}{3}} \\
&= 3 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Εφόσον, όπως μόλις δείξαμε,

$$\lim_{x\to\infty}\left(3 - 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right) \neq 0,$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0$$

και τα δύο όρια που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^{-1}\,\frac{x^{-\frac{2}{3}}-3+2x^{-\frac{1}{3}}}{3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}}\right) &= \lim_{x\to\infty} x^{-1}\,\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{2}{3}}-3+2x^{-\frac{1}{3}}}{3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}}\\
&= 0\,\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{2}{3}}-3+2x^{-\frac{1}{3}}}{3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}}\\
&= 0\,\frac{\lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{2}{3}}-3+2x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-3x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)}\\
&= 0\cdot\frac{-3}{3}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+2x}{3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}}} = 0.$$

Σημείωση: Το

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{4}{3}}+2x}{3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}}}$$

ορίζεται, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$ με $x\neq 0$, εφόσον, για x στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
3x^{\frac{7}{3}}-3x^2+2x^{\frac{5}{3}} = 0 &\Leftrightarrow x^{\frac{5}{3}}\left(3x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow x^{\frac{5}{3}} = 0 \text{ ή } 3x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2 = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 3x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2 = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{15}}{6}\\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Θέμα 3: Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί και

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b, & x < 0 \\ -x^4, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των a και b για τις οποίες η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Αρχικά εξετάζουμε για ποιες τιμές των a και b η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$ και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Το $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο υπάρχουν τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ και

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Εφόσον, για $x < 0$, $f(x) = ax^3 + b$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όρια

$$\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3,$$

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

(ή τη συνέχεια των συναρτήσεων $g_1(x) = x^3$ και $g_2(x) = k$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (ax^3 + b) \\ &= a \lim_{x \to 0^-} x^3 + \lim_{x \to 0^-} b \\ &= a \cdot 0^3 + b \\ &= b. \end{aligned}$$

Εφόσον, για $x > 0$, $f(x) = -x^4$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to x_0} x^4 = x_0^4$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_3(x) = x^4$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(-x^4)\\ &= -\lim_{x\to 0^+} x^4\\ &= -0^4\\ &= 0.\end{aligned}$$

Άρα τα $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχουν, για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$, και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow b = 0.$$

Επομένως το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$. Για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

και άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Εφόσον, για $x \geq 0$, $f(x) = -x^4$,

$$f(0) = -0^4 = 0.$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x = 0$, πρέπει η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x = 0$. Άρα, από όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x = 0$, πρέπει $b = 0$. Στη συνέχεια μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} ax^3, & x < 0 \\ -x^4, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Εφόσον $f(x) = ax^3$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_4(x) = x^2$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{ah^3-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} ah^2 \\
&= a \lim_{h\to 0^-} h^2 \\
&= a \cdot 0^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Εφόσον $f(x) = -x^4$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_5(x) = x^3$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^4-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} (-h^3) \\
&= -\lim_{h\to 0^+} h^3 \\
&= -0^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$, τα

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

Σημείωση: Στην τρίτη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και ως εξής: Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Έστω a στο $\mathbb{R}$. Εφόσον $f(x) = ax^3$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_4(x) = x^2$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{ax^3 - 0}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} ax^2 \\
&= a \lim_{x \to 0^-} x^2 \\
&= a \cdot 0^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Εφόσον $f(x) = -x^4$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_5(x) = x^3$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^4 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} (-x^3) \\ &= -\lim_{x \to 0^+} x^3 \\ &= -0^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$, τα

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

2ος τρόπος: Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}.$$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Εφόσον, για $x \geq 0$, $f(x) = -x^4$,

$$f(0) = -0^4 = 0.$$

Εφόσον $f(x) = ax^3 + b$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \frac{(ah^3 + b) - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \left(ah^2 + \frac{b}{h} \right) \\
&= a \lim_{h \to 0^-} h^2 + \lim_{h \to 0^-} \frac{b}{h}.
\end{aligned}$$

Για $b \neq 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_1(x) = x^2$ στο $x = 0$) και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
a \lim_{h \to 0^-} h^2 + \lim_{h \to 0^-} \frac{b}{h} &= a \cdot 0^2 + \lim_{h \to 0^-} \frac{b}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \frac{b}{h} \\
&= b \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} \\
&= \begin{cases} -\infty, & \text{αν } b > 0 \\ \infty, & \text{αν } b < 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Επομένως, για $b \neq 0$, το

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

δεν υπάρχει. Για $b = 0$, χρησιμοποιώντας τα γνωστά όριά

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

και

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

(ή τη συνέχεια τών συναρτήσεων $g_2(x) = x^2$ και $g_3(x) = k$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a \lim_{h \to 0^-} h^2 + \lim_{h \to 0^-} \frac{b}{h} &= a \lim_{h \to 0^-} h^2 + \lim_{h \to 0^-} 0 \\ &= a \cdot 0^2 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0.$$

Εφόσον $f(x) = -x^4$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_4(x) = x^3$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^4 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} (-h^3) \\ &= -\lim_{h \to 0^+} h^3 \\ &= -0^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$, τα

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και ως εξής: Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Εφόσον, για $x \geq 0$, $f(x) = -x^4$,

$$f(0) = -0^4 = 0.$$

Εφόσον $f(x) = ax^3 + b$, για $x < 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{(ax^3+b)-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \left(ax^2 + \frac{b}{x}\right) \\
&= a \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}.
\end{aligned}$$

Για $b \neq 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων, το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_1(x) = x^2$ στο $x = 0$) και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} &= a\cdot 0^2 + \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} \\ &= b \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \\ &= \left\{ \begin{array}{rl} -\infty, & \text{αν } b > 0 \\ \infty, & \text{αν } b < 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Επομένως, για $b \neq 0$, το

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

δεν υπάρχει. Για $b = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και τα γνωστά όριά

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$$

και

$$\lim_{x\to x_0} k = k$$

(ή τη συνέχεια τών συναρτήσεων $g_2(x) = x^2$ και $g_3(x) = k$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} &= a \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} 0 \\ &= a\cdot 0^2 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Εφόσον $f(x) = -x^4$, για $x > 0$, και $f(0) = 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3$$

(ή τη συνέχεια της συνάρτησης $g_4(x) = x^3$ στο $x = 0$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^4-0}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} (-x^3)\\ &= -\lim_{x\to 0^+} x^3\\ &= -0^3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$, τα

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

υπάρχουν και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

Σημείωση: Εφόσον, όπως είδαμε και στους δύο τρόπους, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$$

(ή

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0),$$

έχουμε ότι $f'(0) = 0$, για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $b = 0$.

Θέμα 4: Να βρεθούν το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της

$$f(x) = x \sin x$$

στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Εφόσον οι συναρτήσεις $g_1(x) = x$ και $g_2(x) = \sin x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, και άρα και στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, η

$$f(x) = x \sin x$$

είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ βρίσκονται είτε στα κρίσιμα σημεία της $f(x)$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ είτε στα άκρα του $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Είναι τα σημεία του $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ στα οποία είτε η $f'(x)$ δεν ορίζεται είτε $f'(x) = 0$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(x \sin x) \\
&= x\,\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(x)\,\sin x \\
&= x\,\cos x + 1\,\sin x \\
&= x\,\cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον $\cos x \neq 0$, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε ότι, για x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x\ \cos x + \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow x\ \cos x = -\sin x \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow x = -\tan x. \end{aligned}$$

Για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan x > 0$ και άρα $-\tan x < 0$. Για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x > 0$. Επομένως, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$x \neq -\tan x$$

και άρα, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) \neq 0.$$

Άρα η $f(x)$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Από όσα είπαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, παίρνουμε ότι το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ βρίσκονται στα άκρα του $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$. Έχουμε ότι

$$f(0) = 0 \cdot \sin 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Επομένως το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι 0 (στο $x = 0$) και το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\frac{\pi}{2}$ (στο $x = \frac{\pi}{2}$).

Σημείωση: Στην τρίτη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι

$$f'(x) \neq 0,$$

για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, και ως εξής: Για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει ότι

$$x > 0,$$

$$\cos x > 0,$$
$$\sin x > 0.$$

Επομένως, για όλα τα x στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$x\,\cos x + \sin x > 0$$

και άρα, για όλα τα x στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) > 0.$$

Επομένως, για όλα τα x στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) \neq 0.$$

2ος τρόπος: Εφόσον οι συναρτήσεις $g_1(x) = x$ και $g_2(x) = \sin x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, και άρα και στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, η

$$f(x) = x\,\sin x$$

είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x\,\sin x) \\ &= x\,\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(x)\,\sin x \\ &= x\,\cos x + 1\,\sin x \\ &= x\,\cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Η $f'(x)$ ορίζεται για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει ότι

$$x > 0,$$

$$\cos x > 0,$$

$$\sin x > 0.$$

Επομένως, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$x \cos x + \sin x > 0$$

και άρα, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) > 0.$$

Εφόσον η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και, για όλα τα x στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) > 0,$$

η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι το $f(0)$ και το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε ότι

$$f(0) = 0 \cdot \sin 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Άρα το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι 0 (στο $x = 0$) και το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\frac{\pi}{2}$ (στο $x = \frac{\pi}{2}$).

Θέμα 5: Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\ y = \ln t, \quad t > 0$$

είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x - 7$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Η κλίση της ευθείας

$$y = -3x - 7 \tag{1}$$

είναι $m = -3$. Η κλίση της εφαπτομένης της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\ y = \ln t, \quad t > 0 \tag{2}$$

σε ένα σημείο της είναι $\frac{dy}{dx}$. Εφόσον δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι κλίσεις τους είναι ίσες, τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης (2) είναι παράλληλη στην ευθεία (1) είναι αυτά όπου

$$\frac{dy}{dx} = -3.$$

Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (2). Έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^4}\right) = -\frac{4}{t^5}$$

και ότι

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln t) = \frac{1}{t},$$

για $t > 0$, δηλαδή για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (2). Εφόσον

$$-\frac{4}{t^5} \neq 0,$$

για $t > 0$, έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} \neq 0,$$

για $t > 0$, δηλαδή για όλα τα σημεία της παραμετρικής καμπύλης (2). Άρα η κλίση σε ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (2) είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{4}{t^5}} \\
&= -\frac{t^4}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως, εφόσον $t > 0$, παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = -3 \Leftrightarrow -\frac{t^4}{4} &= -3 \\
\Leftrightarrow t^4 &= 12 \\
\Leftrightarrow t &= \sqrt[4]{12}\,.
\end{aligned}
$$

Για $t = \sqrt[4]{12}$, έχουμε ότι

$$x = \frac{1}{(\sqrt[4]{12})^4} = \frac{1}{12}$$

και ότι

$$y = \ln \sqrt[4]{12} = \frac{\ln 12}{4}\,.$$

Άρα η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\, y = \ln t, \quad t > 0$$

είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = -3x - 7$$

στο σημείο

$$\left(\frac{1}{12}\,, \frac{\ln 12}{4}\right).$$

2ος τρόπος: Η κλίση της ευθείας

$$y = -3x - 7 \tag{3}$$

είναι $m = -3$. Η κλίση της εφαπτομένης της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\ y = \ln t, \quad t > 0 \tag{4}$$

σε ένα σημείο της είναι $\frac{dy}{dx}$. Εφόσον δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι κλίσεις τους είναι ίσες, τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης (4) είναι παράλληλη στην ευθεία (3) είναι αυτά όπου

$$\frac{dy}{dx} = -3.$$

Για $t > 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{t^4} &\Leftrightarrow t^4 = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow t = \sqrt[4]{\frac{1}{x}}\,. \end{aligned}$$

Επομένως αν το (x, y) είναι ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (4), τότε

$$\begin{aligned} y &= \ln t \\ &= \ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \ln\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\ln x. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (4), ισχύει ότι

$$y = -\frac{1}{4}\ln x. \tag{5}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\frac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (5). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}\ln x\right)\\ &= -\frac{1}{4}\,\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x}\\ &= -\frac{1}{4x}\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -3 &\Leftrightarrow -\frac{1}{4x} = -3\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

Για $x = \dfrac{1}{12}$, έχουμε ότι

$$y = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\ln 12}{4}\,.$$

Άρα η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\ y = \ln t, \quad t > 0$$

είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = -3x - 7$$

στο σημείο

$$\left(\frac{1}{12}, \frac{\ln 12}{4}\right).$$

Σημείωση: Στη δεύτερη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (4), ισχύει ότι

$$y = -\frac{1}{4}\ln x$$

και ως εξής: Για $t > 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y = \ln t &\Leftrightarrow e^y = e^{\ln t} \\ &\Leftrightarrow e^y = t. \end{aligned}$$

Άρα αν το (x, y) είναι ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (4), τότε

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t^4} \\ &= \frac{1}{(e^y)^4} \\ &= \frac{1}{e^{4y}} \\ &= e^{-4y}. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x = e^{-4y} &\Leftrightarrow \ln x = \ln\left(e^{-4y}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln x = -4y \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}\ln x. \end{aligned}$$

Άρα, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (4), ισχύει ότι

$$y = -\frac{1}{4}\ln x.$$

3ος τρόπος: Η κλίση της ευθείας

$$y = -3x - 7 \tag{6}$$

είναι $m = -3$. Η κλίση της εφαπτομένης της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\ y = \ln t, \quad t > 0 \tag{7}$$

σε ένα σημείο της είναι $\frac{dy}{dx}$. Εφόσον δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι κλίσεις τους είναι ίσες, τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης (7) είναι παράλληλη στην ευθεία (6) είναι αυτά όπου

$$\frac{dy}{dx} = -3.$$

Για $t > 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y = \ln t &\Leftrightarrow e^y = e^{\ln t} \\ &\Leftrightarrow e^y = t. \end{aligned}$$

Άρα αν το (x, y) είναι ένα σημείο της παραμετρικής καμπύλης (7), τότε

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t^4} \\ &= \frac{1}{(e^y)^4} \\ &= \frac{1}{e^{4y}} \\ &= e^{-4y}. \end{aligned}$$

Επομένως, για όλα τα σημεία (x, y) της παραμετρικής καμπύλης (7), ισχύει ότι

$$x = e^{-4y}. \tag{8}$$

Βρίσκουμε την κλίση $\dfrac{dy}{dx}$ σε ένα σημείο της καμπύλης (8). Θεωρούμε το y παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της (8) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων και τις γνωστές παραγώγους

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= 1, \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} x = e^{-4y} &\Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-4y}\right) \\ &\Rightarrow 1 = \frac{d}{dx}(e^{-4y}) \\ &\Rightarrow 1 = e^{-4y}\,\frac{d}{dx}(-4y) \\ &\Rightarrow 1 = e^{-4y}\left(-4\,\frac{dy}{dx}\right) \\ &\Rightarrow 1 = -4e^{-4y}\,\frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{4y}}{4}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -3 &\Leftrightarrow -\frac{e^{4y}}{4} = -3\\ &\Leftrightarrow e^{4y} = 12\\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{4y}\right) = \ln 12\\ &\Leftrightarrow 4y = \ln 12\\ &\Leftrightarrow y = \frac{\ln 12}{4}\,.\end{aligned}$$

Για $y = \dfrac{\ln 12}{4}$, έχουμε ότι

$$x = e^{-4y} = e^{-4\cdot\frac{\ln 12}{4}} = e^{-\ln 12} = \frac{1}{12}\,.$$

Άρα η εφαπτομένη της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \frac{1}{t^4},\, y = \ln t, \quad t > 0$$

είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = -3x - 7$$

στο σημείο

$$\left(\frac{1}{12}\,, \frac{\ln 12}{4}\right).$$

Θέμα 6: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ από $x = \pi$ έως $x = 3\pi$.

Λύση: *1ος τρόπος:* Για $x \geq \pi$, $x^2 \geq \pi^2$. Άρα, εφόσον $\sin x \leq 1$, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$, και $1 \leq \pi^2$,

$$x^2 \geq \sin x,$$

για $x \geq \pi$, και άρα για $\pi \leq x \leq 3\pi$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ από $x = \pi$ έως $x = 3\pi$ είναι

$$A = \int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\, dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και τα γνωστά ολοκληρώματα

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 - \sin x\right)\, dx &= \int x^2\, dx - \int \sin x\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - (-\cos x) + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \cos x + C\,.\end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\, dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \cos x\right]_{\pi}^{3\pi} \\ &= \left(\frac{(3\pi)^3}{3} + \cos 3\pi\right) - \left(\frac{\pi^3}{3} + \cos \pi\right) \\ &= \frac{27\pi^3}{3} - 1 - \frac{\pi^3}{3} + 1 \\ &= \frac{26\pi^3}{3}\,.\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$A = \frac{26\pi^3}{3}\,.$$

Σημείωση: Στη δεύτερη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\,dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων, τα γνωστά ολοκληρώματα

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\,dx &= \int_{\pi}^{3\pi} x^2\,dx - \int_{\pi}^{3\pi} \sin x\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\pi}^{3\pi} - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{3\pi} \\
&= \left(\frac{(3\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3}\right) - \left((-\cos 3\pi) - (-\cos\pi)\right) \\
&= \frac{27\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} - 1 + 1 \\
&= \frac{26\pi^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος: Βρίσκουμε τα x μεταξύ π και 3π στα οποία οι καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ τέμνονται. Για $x \geq \pi$, $x^2 \geq \pi^2$. Άρα, εφόσον $\sin x \leq 1$, για όλα τα x στο $\mathbb{R}$, και $1 < \pi^2$,

$$x^2 \neq \sin x,$$

για $x \geq \pi$, και άρα για $\pi \leq x \leq 3\pi$. Επομένως μεταξύ π και 3π οι καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ δεν τέμνονται σε κανένα σημείο. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ από $x = \pi$ έως $x = 3\pi$ είναι

$$A = \left|\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\,dx\right|\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και τα γνωστά ολοκληρώματα

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 - \sin x\right)\,dx &= \int x^2\,dx - \int \sin x\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - (-\cos x) + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \cos x + C\,. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \cos x\right]_{\pi}^{3\pi} \\ &= \left(\frac{(3\pi)^3}{3} + \cos 3\pi\right) - \left(\frac{\pi^3}{3} + \cos \pi\right) \\ &= \frac{27\pi^3}{3} - 1 - \frac{\pi^3}{3} + 1 \\ &= \frac{26\pi^3}{3}\,. \end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$A = \left|\frac{26\pi^3}{3}\right| = \frac{26\pi^3}{3}\,.$$

Σημείωση: (α) Στη δεύτερη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\,dx$$

και με τον τρόπο που είδαμε στη Σημείωση του 1ου τρόπου.

(β) Θα μπορούσαμε, κατά παρόμοιο τρόπο, να υπολογίσουμε το A και ως εξής: Εφόσον μεταξύ π και 3π οι καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ δεν τέμνονται σε κανένα σημείο, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sin x$ από $x = \pi$ έως $x = 3\pi$ είναι

$$A = \left| \int_{\pi}^{3\pi} \left(\sin x - x^2\right)\, dx \right| .$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων, τα γνωστά ολοκληρώματα

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi} \left(\sin x - x^2\right)\, dx &= \int_{\pi}^{3\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{3\pi} x^2 \, dx \\
&= \left[-\cos x\right]_{\pi}^{3\pi} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\pi}^{3\pi} \\
&= \left((-\cos 3\pi) - (-\cos \pi)\right) - \left(\frac{(3\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3}\right) \\
&= 1 - 1 - \frac{27\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \\
&= -\frac{26\pi^3}{3} .
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$A = \left| -\frac{26\pi^3}{3} \right| = \frac{26\pi^3}{3} .$$

(γ) Στη δεύτερη παράγραφο του (β) θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi}^{3\pi} \left(\sin x - x^2\right)\, dx$$

και με τρόπο παρόμοιο με αυτό με τον οποίο υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi}^{3\pi} \left(x^2 - \sin x\right)\, dx$$

στη δεύτερη παράγραφο του 1ου και του 2ου τρόπου.

Θέμα 7: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(e^{x^2} x + x \sin 2x \right) \, dx.$$

Λύση: Από τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\int \left(e^{x^2} x + x \sin 2x \right) \, dx = \int e^{x^2} x \, dx + \int x \sin 2x \, dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int e^{x^2} x \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int e^x \, dx = e^x + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int e^{x^2} x \, dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = x^2. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(x^2) \, dx = 2x \, dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2} \, du = x \, dx. \end{array} \right] \\
&= \int \frac{1}{2} \, e^u \, du \\
&= \frac{1}{2} \int e^u \, du \\
&= \frac{1}{2} \, (e^u + C) \\
&= \frac{1}{2} \, \left(e^{x^2} + C \right) \\
&= \frac{e^{x^2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int x\ \sin 2x\, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(\cos kx) = -k \sin kx,$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int x\ \sin 2x\, dx &= \int x\ \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)'\ dx \\
&= x\ \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int (x)'\ \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\ dx \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} - \int (x)'\ \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\ dx \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} - \int 1\ \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\ dx \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \int \cos 2x\, dx \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + C\right) \\
&= -\frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int \left(e^{x^2} x + x \sin 2x\right)\ dx &= \left(\frac{e^{x^2}}{2} + C\right) + \left(-\frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \\
&= \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.
\end{aligned}$$

Σημείωση: Στην τρίτη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int x \, \sin 2x \, dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

τις ιδιότητες των παραγώγων και τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int x \, \sin 2x \, dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 2x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(2x)\, dx = 2\, dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\, du = dx. \end{array} \right] \\
&= \int \frac{1}{2} \, \frac{u}{2} \, \sin u \, du \\
&= \frac{1}{4} \int u \, \sin u \, du.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int u \, \sin u \, du.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{du}(\cos u) = -\sin u,$$

$$\frac{d}{du}(u) = 1,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int \cos u \, du = \sin u + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int u\,\sin u\,du &= \int u\ (-\cos u)'\ dx\\ &= u\ (-\cos u) - \int (u)'\ (-\cos u)\ du\\ &= -u\ \cos u - \int (u)'\ (-\cos u)\ du\\ &= -u\ \cos u - \int 1\ (-\cos u)\ du\\ &= -u\ \cos u - \left(-\int \cos u\,du\right)\\ &= -u\ \cos u + \int \cos u\,du\\ &= -u\ \cos u + \sin u + C.\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\int x\ \sin 2x\,dx =\\ &= \frac{1}{4}\ (-u\ \cos u + \sin u + C)\\ &[u = 2x]\\ &= \frac{1}{4}\ (-2x\ \cos 2x + \sin 2x + C)\\ &= -\frac{x\ \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

Θέμα 8: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\sin^{-1} x + \frac{\ln x}{x}\right) dx.$$

Λύση: Από τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων παίρνουμε ότι

$$\int \left(\sin^{-1} x + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int \sin^{-1} x \, dx + \int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \sin^{-1} x \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int \sin^{-1} x \, dx &= \int (x)' \, \sin^{-1} x \, dx \\
&= x \, \sin^{-1} x - \int x \, \left(\sin^{-1} x\right)' \, dx \\
&= x \, \sin^{-1} x - \int x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις ιδιότητες των παραγώγων, τις γνωστές παραγώγους

$$\frac{d}{dx}(k) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C,$$

παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\int x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = 1 - x^2. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(1-x^2)\, dx = -2x \, dx \text{ και άρα } -\dfrac{1}{2}\, du = x \, dx. \end{array} \right] \\
&= \int -\frac{1}{2} \, \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\
&= -\frac{1}{2}(2\sqrt{u} + C) \\
&= -\sqrt{u} + C \\
&= -\sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
\int \sin^{-1} x \, dx &= x \, \sin^{-1} x - (-\sqrt{1-x^2} + C) \\
&= x \, \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = \ln x. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(\ln x)\,dx = \dfrac{1}{x}\,dx. \end{array}\right] \\
&= \int u\,du \\
&= \frac{u^2}{2} + C \\
&= \frac{\ln^2 x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Από όσα είπαμε, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int \left(\sin^{-1} x + \frac{\ln x}{x}\right) dx &= \left(x\,\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C\right) + \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C\right) \\
&= x\,\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + \frac{\ln^2 x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Σημείωση: (α) Στη δεύτερη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση, τις γνωστές παραγώγους

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2) &= 2x, \\
\frac{d}{dx}(k) &= 0, \\
\frac{d}{dx}(x) &= 1,
\end{aligned}$$

τις ιδιότητες των παραγώγων, τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C,$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\
&\left[\begin{array}{l}\text{Θέτουμε } u = x^2. \\ \text{Τότε } du = \dfrac{d}{dx}(x^2)\,dx = 2x\,dx \text{ και άρα } \dfrac{1}{2}\,du = x\,dx.\end{array}\right] \\
&= \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u}}\,du \\
&\left[\begin{array}{l}\text{Θέτουμε } v = 1-u. \\ \text{Τότε } dv = \dfrac{d}{du}(1-u)\,du = -du \text{ και άρα } -dv = du.\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int -\frac{1}{\sqrt{v}}\,dv \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv \\
&= -\frac{1}{2}(2\sqrt{v}+C) \\
&= -\sqrt{v}+C \\
&= -\sqrt{1-u}+C \\
&= -\sqrt{1-x^2}+C.
\end{aligned}$$

(β) Στην τρίτη παράγραφο παραπάνω θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

και ως εξής: Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και τη γνωστή παράγωγο

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\ \ln x\,dx \\
&= \int (\ln x)'\ \ln x\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln x \, \ln x - \int \ln x \, (\ln x)' \, dx \\
&= \ln^2 x - \int \ln x \, (\ln x)' \, dx \\
&= \ln^2 x - \int \ln x \, \frac{1}{x} \, dx \\
&= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx.
\end{aligned}
$$

Εφόσον

$$
\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx,
$$

$$
2 \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x + C
$$

και άρα

$$
\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.
$$