

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι**  
**27 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. (α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ορίου για να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -3 + \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = -3$$

(β) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πλευρικού ορίου για να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^3} = \infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = \infty$$

Ποιο συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από τα παραπάνω αποτελέσματα για το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{αν } x > 0 \\ 4 & \text{αν } x = 0 \\ -\frac{1}{x^3} & \text{αν } 0 > x \end{cases}$$

2. (α) Ποια τιμή πρέπει να έχουν τα  $a$  και  $b$  ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + a & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ \cos x + 2a & \text{αν } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ bx & \text{αν } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο  $x = 0$  και στο  $x = \frac{\pi}{2}$ ;

(β) Να βρεθούν με έμμεση διαφορίση οι  $\frac{dy}{dx}$  και  $\frac{d^2y}{dx^2}$  αν

$$x^2 + 3xy - y^2 = 9$$

3. (α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f(x) = -x + \cos(2x)$  με πεδίο ορισμού το  $[\pi, 2\pi]$  είναι κοίλη προς τα πάνω και κοίλη προς τα κάτω καθώς και τα σημεία στα οποία έχει σημεία καμπής.

(β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα των κύβων δύο θετικών αριθμών αν το άθροισμά τους είναι ίσο με 2;

4. (α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $x = \frac{1}{t} + t^2, y = t^2 - t + 1$  στο σημείο  $(2, 1)$ .

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left( \frac{\cos x}{-3 \sin^2 x} + \cos x \right) dx$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int (x(\ln x)^2 + 2x^{-3}) dx$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**