

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

1. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^5 \sin \left(\frac{1}{x^3} \right) .$$

2. Έστω

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x < 0 \\ 7x + 2, & x \geq 0 \end{cases} .$$

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πλευρικών παραγώγων, υπολογίστε τις $g'_-(0)$ και $g'_+(0)$.

(β) Εξετάστε αν η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $g'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.

3. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = x \cos \left(\frac{1}{x} \right) .$$

4. Έστω

$$g(x) = \frac{5x - 10}{x - 4} .$$

(α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα πάνω και αυτά στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω.

(β) Βρείτε τα x στα οποία η $g(x)$ εμφανίζει σημείο καμπής.

5. Υπολογίστε το εμβαδον A του χωρίου μεταξύ της καμπυλής

$$y = x \cos x$$

και του άξονα x από $x = -\frac{\pi}{2}$ ως $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 7}}.$$

7. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt[3]{\cos^4(2x^3 - 6x)} \sin(2x^3 - 6x) (x^2 - 1) dx.$$

8. Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ αν

$$y = (\cos x)^{\sin x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ