

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
27 ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ.

1. (α) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{\pi} - \sqrt{x}} \tan x.$$

(β) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ 9x^2 + a, & x > 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των a και b για τις οποίες:

(I) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(II) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

2. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Αν ναι, βρείτε την $f'(0)$.

(β) Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $g(x) = \cos x$ με κέντρο το $-\frac{3\pi}{2}$.

3. (α) Έστω

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

(I) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

(II) Να εξεταστεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η $f(x)$.

(β) Έχει η συνάρτηση $g(t) = t - t^{\frac{1}{2}}$ ολικό ελάχιστο στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$; Αν ναι, πού;

4. (α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$x^3 - 2y^2 = -1$$

στο σημείο $(1, -1)$.

(β) Να βρεθούν οι $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad t \text{ στο } \mathbb{R}.$$

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \cos x (\sin x - 7)^5 dx.$$

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = x^2 - 3x$ και τον άξονα x από $x = -1$ έως $x = 4$.