

Μαθηματική Ανάλυση Ι Τελική Εξέταση

Απαντήστε σε πέντε από τα έξι θέματα

Θέμα 1 (α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ορίου για να αποδείξετε ότι

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1 = 5$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

(β) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ x + 2a, & x < 0 \end{cases}$$

Για ποια τιμή του a υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; Για αυτή την τιμή του a είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 0$;

Θέμα 2 (α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να αποδείξετε ότι αν $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$, τότε $f'(1) = 9$.

(β) Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης

$$x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2ty = 4$$

στο σημείο για το οποίο $t = 0$.

Θέμα 3 (α) Να εξεταστεί ως προς την μονotonία, τα τοπικά ακρότα, την κοιλότητα και τα σημεία καμπής η

$$h(t) = t^{3/2} - 3t^{1/2}$$

(β) Αποδείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 16cm το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Θέμα 4 (α) Να βρεθεί η $f'(x)$ αν

$$f(x) = \frac{x^{\sin x} \cdot (\tan^{-1} x)^{\log_6 x}}{3^x}$$

(β) Να βρεθεί η $\frac{dG}{dx}$ αν $G(x) = \int_1^2 t^4 dt + \int_2^{\ln x} t^4 dt$, $x > e^2$.

Θέμα 5 (α) Να βρεθεί η μέση τιμή της $g(x) = |x^3|$ στο $[-2, 1]$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \left(\frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} \right) dx$$

Θέμα 6 (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{4 \sec x}{\sec^2 x + 2} \tan x \sec x dx$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x \tan^{-1}(x^2) dx$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Δ. Δριβαλιάρης