

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
12 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΠΕΝΤΕ ΑΠΟ ΤΑ ΕΞΗ ΘΕΜΑΤΑ

1. (α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ορίου για να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

(β) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{αν } x > 0 \\ -2 & \text{αν } x = 0 \\ 2x^2 + 1 & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

2. (α) Ποια τιμή πρέπει να έχει το a ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{αν } 1 \leq x \\ \ln(x) + a & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x = 1$;

(β) Είναι δυνατό να ορίσουμε την $f(0)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να επεκτείνεται η

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

και να είναι συνεχής στο $x = 0$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. (α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{αν } 1 < x \\ 3x - 4 & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $x = 1$.

(β) Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της

$$y = \ln(\cos^{-1}(x))$$

στο $x = 0$. Η απάντησή σας πρέπει να περιέχει μόνο αριθμούς, τον φυσικό λογάριθμο αριθμών και το x .

4. (α) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = -3x + \cos(4x)$ με πεδίο ορισμού το $[-\pi, 2\pi]$ είναι κοίλη προς τα πάνω και κοίλη προς τα κάτω καθώς και τα σημεία στα οποία έχει σημεία καμπής.

(β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα των τετραγώνων δύο θετικών αριθμών αν το άθροισμά τους είναι ίσο με 4;

5. (α) Δείξτε χωρίς να την λύσετε ότι η εξίσωση $2 \tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

6. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\ln 2} \frac{4e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int (\cos(\ln(x)) + 3x^{-1}) dx$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ