

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
20 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 4 ΩΡΕΣ

1. Έστω

$$f(x) = x^{\frac{5}{19}}.$$

(I) Εξετάστε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

(II) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ποια είναι η τιμή της $f'(0)$; Αν δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ερμηνεύστε γεωμετρικά γιατί δεν είναι.

2. Έστω

$$h(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2, & t < 2 \\ 11, & t = 2 \\ 7t, & t > 2 \end{cases}.$$

Εξετάστε αν η $h(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $t = 2$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

3. Έστω

$$g(x) = \cos x.$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ότι

$$g'(x) = -\sin x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη κάποια από τα παρακάτω:

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

$$(III) \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$(IV) \quad \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

4. Βρείτε τα σημεία στα οποία η καμπύλη

$$y = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 24x + 11$$

έχει οριζόντια εφαπτομένη.

5. Έστω

$$f(t) = \frac{\sqrt[4]{2t+6}}{2t^2-8}.$$

(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της $f(t)$.

(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $f'(t)$.

(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{f'}$ της $f'(t)$.

6. Έστω

$$g(x) = \sqrt[3]{\sin^5(3x)}.$$

(I) Βρείτε το πεδίο ορισμού D_g της $g(x)$.

(II) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $g'(x)$.

(III) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{g'}$ της $g'(x)$.

(IV) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και παραγώγους συναρτήσεων που γνωρίζετε, την $g''(x)$.

(V) Βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{g''}$ της $g''(x)$.

7. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = \tan(2x) - 4x$$

στο σημείο από το οποίο διέρχεται για $x = \frac{\pi}{8}$.

8. Αν

$$s = (\theta^3 - 9\theta)^{\frac{2}{5}} \text{ και } \theta = \csc(3z^2 - 5),$$

υπολογίστε την παράγωγο $\frac{ds}{dz}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ