3 Εφαρμογές των παραγώγων

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις παραγώγους για την εύρεση μέγιστων και ελάχιστων τιμών συναρτήσεων, για την πρόβλεψη και την ερμηνεία του σχήματος γραφικών παραστάσεων, και τέλος για την κατανόηση της συμπεριφοράς συναρτήσεων που ικανοποιούν διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε επίσης πώς η εφαπτόμενη ευθεία αναπαράγει το σχήμα της καμπύλης κοντά στο σημείο επαφής και πώς χρησιμεύει για την αριθμητική εύρεση των ριζών μιας συναρτήσεως. Σε πολλές από τις εφαρμογές αυτές κεντρικό ρόλο παίζει το θεώρημα μέσης τιμής, τα πορίσματα του οποίου «δείχνουν τον δρόμο» για την είσοδό μας στον ολοκληρωτικό λογισμό, στο Κεφάλαιο 4.

3.1 Ακρότατα συναρτήσεων

Το πρόβλημα της πλατφόρμας γεωτρήσεως • Ολικά (απόλυτα) ακρότατα • Τοπικά (σχετικά) ακρότατα • Εύρεση ακροτάτων

Μια από τις χρησιμότερες εφαρμογές των παραγώγων είναι η απάντηση στο ερώτημα αν μια συνάρτηση εμφανίζει μέγιστες ή ελάχιστες τιμές σε κάποιο διάστημα και πού βρίσκονται αυτές. Έτσι μπορούμε να λύνουμε προβλήματα όπως το ακόλουθο.

Το πρόβλημα της πλατφόρμας γεωτρήσεως

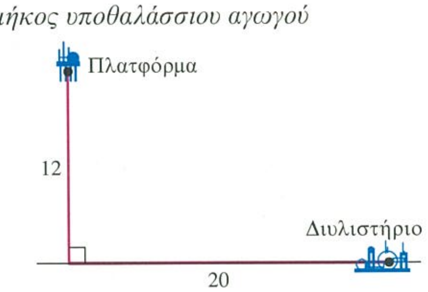
Παράδειγμα 1 Αγωγός πετρελαίου από την πλατφόρμα γεωτρήσεως ώς το διυλιστήριο

Μια πλατφόρμα γεωτρήσεως που απέχει από την ακτή 12 km πρόκειται να συνδεθεί μέσω αγωγού με παράκτιο διυλιστήριο, το οποίο βρίσκεται 20 km μακρύτερα από το εγγύτερο στην πλατφόρμα σημείο της ακτής. Αν το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 50.000 € ανά km και το κόστος του επίγειου αγωγού είναι 30.000 € ανά km, τότε ποιος συνδυασμός των δύο τύπων αγωγών θα δώσει τη λιγότερο δαπανηρή σύνδεση;

Προκαταρκτική ανάλυση

Κάνουμε μερικές δοκιμές για να αποκτήσουμε μια πρώτη αίσθηση του προβλήματος:

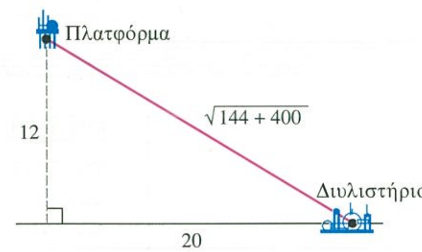
(α) *Ελάχιστο μήκος υποθαλάσσιου αγωγού*



Εφόσον ο υποθαλάσσιος αγωγός είναι ακριβότερος, ας δοκιμάσουμε να τον χρησιμοποιήσουμε όσο λιγότερο γίνεται. Έτσι επιλέγουμε την πλησιέστερη διαδρομή προς την ακτή (12 km) και κατόπιν χρησιμοποιούμε επίγειο αγωγό για τα υπόλοιπα 20 km ώς το διυλιστήριο.

$$\text{Κόστος} = 12(50.000) + 20(30.000) = 1.200.000$$

(β) *Όλος ο αγωγός υποθαλάσσιος (ευθεία σύνδεση)*

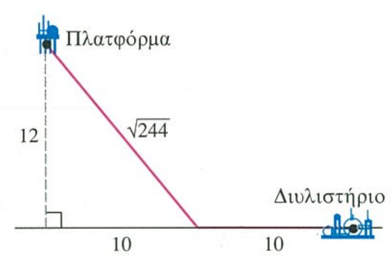


Εδώ επιλέγουμε την ευθεία διαδρομή (όλη υποθαλάσσια) από την πλατφόρμα ώς το διυλιστήριο.

$$\text{Κόστος} = \sqrt{544}\,(50.000) = 1.166.190$$

Πρόκειται για φθηνότερη επιλογή απ' ό,τι η (α).

(γ) *Κάτι ενδιάμεσο*

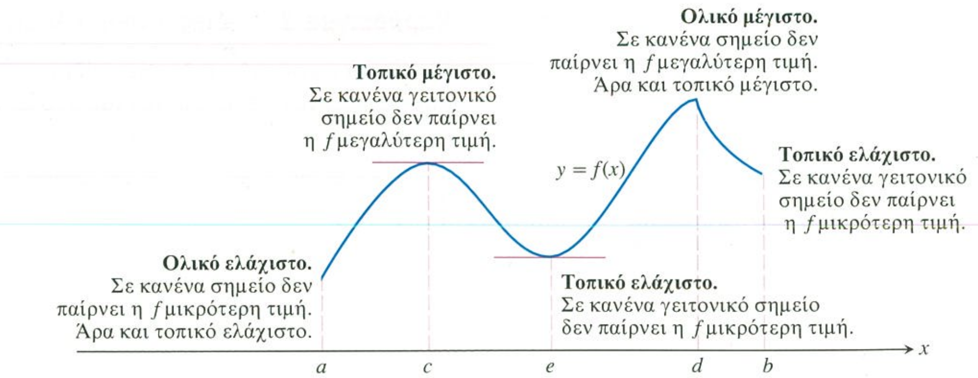


Εδώ ο υποθαλάσσιος αγωγός φθάνει ώς το ενδιάμεσο σημείο που απέχει 10 km από το διυλιστήριο, και κατόπιν συνεχίζει ο επίγειος αγωγός.

$$\text{Κόστος} = \sqrt{244}\,(50.000) + 10(30.000) \approx 1.081.025$$

Παρατηρούμε ότι καμία από τις δύο ακραίες περιπτώσεις (ελάχιστη υποθαλάσσια διαδρομή ή όλος ο αγωγός υποθαλάσσιος) δεν δίνει τη βέλτιστη λύση. Μια ενδιάμεση κατάσταση είναι προτιμότερη.

Το σημείο που απείχε 10 km από το διυλιστήριο ήταν μια τυχαία επιλογή. Υπάρχει άραγε καλύτερη; Κι αν ναι, πώς θα τη βρούμε; Υπάρχει κάποια μέθοδος λύσεως; Τα μαθηματικά εργαλεία που θα αναπτύξουμε θα δώσουν απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήματα. Στο τέλος της ενότητας θα επανέλθουμε για να λύσουμε το πρόβλημα του παρόντος παραδείγματος.



CD-ROM Δικτυότοπος **ΣΧΗΜΑ 3.1** Ταξινόμηση μεγίστων και ελαχίστων.

Ολικά (απόλυτα) ακρότατα

Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές μιας συναρτήσεως, τόσο σε τοπική όσο και σε συνολική κλίμακα (δείτε το Σχήμα 3.1), παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον.

Ορισμός Ολικά ακρότατα

Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D. Η τιμή $f(c)$ είναι

(α) ολικό (ή απόλυτο) μέγιστο στο D αν και μόνο αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε x στο D,

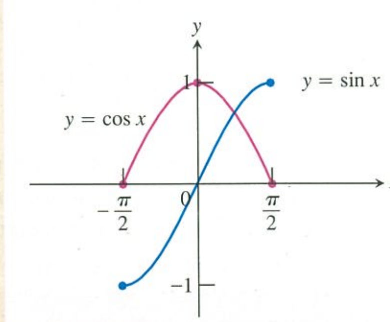
(β) ολικό (ή απόλυτο) ελάχιστο στο D αν και μόνο αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε x στο D.

Συχνά παραλείπουμε τον προσδιορισμό «ολικά» και κάνουμε λόγο απλώς για «ακρότατα».

Το Παράδειγμα 2 δείχνει ότι τα ακρότατα μπορεί να προκύψουν τόσο σε εσωτερικά σημεία όσο και σε άκρα διαστημάτων.

Παράδειγμα 2 Διερεύνηση ακροτάτων

Στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$, η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ έχει μέγιστη τιμή 1 (μία φορά) και ελάχιστη τιμή 0 (δύο φορές). Η συνάρτηση $g(x) = \sin x$ έχει μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 (Σχήμα 3.2).



ΣΧΗΜΑ 3.2 Οι γραφικές παραστάσεις του Παραδείγματος 2.

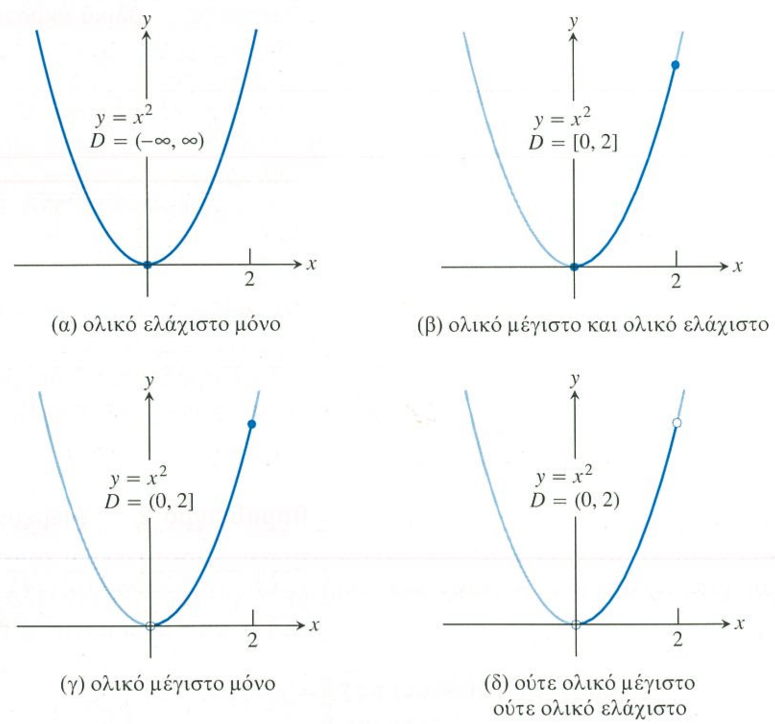
Συναρτήσεις που δίδονται από τον ίδιο μαθηματικό τύπο αλλά διαθέτουν διαφορετικά πεδία ορισμού, μπορεί να έχουν διαφορετικά ακρότατα.

Παράδειγμα 3 Διερεύνηση ολικών ακροτάτων

Τα ολικά ακρότατα που εμφανίζουν στα πεδία ορισμού τους οι ακόλουθες συναρτήσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.3.

Τύπος συναρτήσεως	Πεδίο ορισμού D	Ολικά ακρότατα στο D
(α) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$.
(β) $y = x^2$	$[0, 2]$	Ολικό μέγιστο 4 στο $x = 2$. Ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$.
(γ) $y = x^2$	$(0, 2]$	Ολικό μέγιστο 4 στο $x = 2$. Δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο.
(δ) $y = x^2$	$(0, 2)$	Δεν υπάρχουν ολικά ακρότατα.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Daniel Bernoulli
(1700-1789)

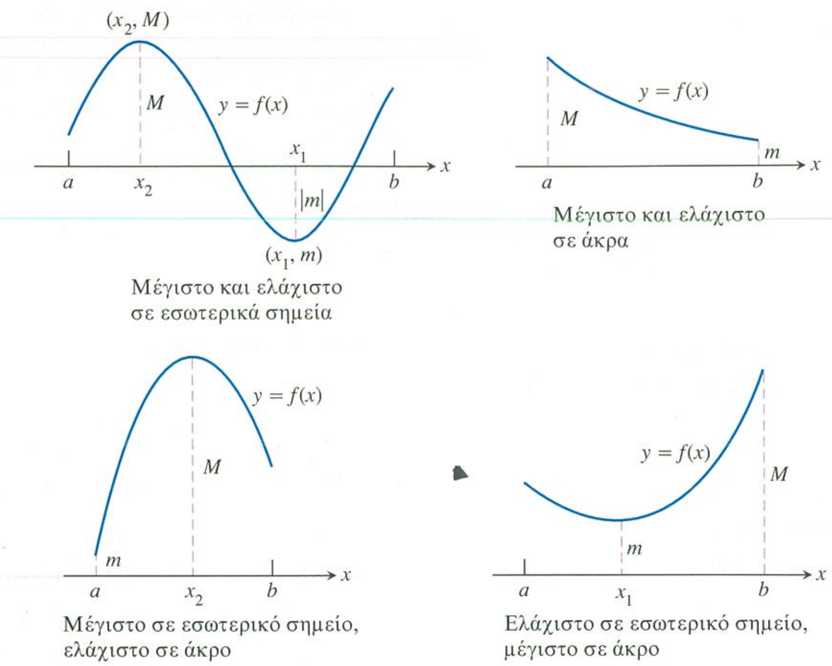


ΣΧΗΜΑ 3.3 Οι γραφικές παραστάσεις του Παραδείγματος 3.

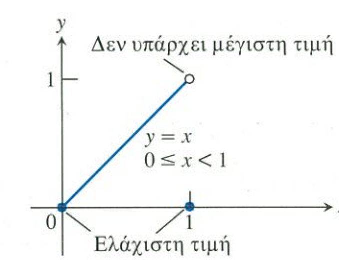
Το Παράδειγμα 3 δείχνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην διαθέτει μέγιστο ή ελάχιστο. Βεβαίως, αυτό δεν ισχύει για συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε πεπερασμένο κλειστό διάστημα.

Θεώρημα 1 Θεώρημα ακροτάτων για συνεχείς συναρτήσεις

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος I, τότε θα διαθέτει ολικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο I. Δηλαδή, θα υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 στο I τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, και $m \le f(x) \le M$ για κάθε άλλο x στο I (Σχήμα 3.4).



ΣΧΗΜΑ 3.4 Τα ακρότατα συναρτήσεως που είναι συνεχής και ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ μπορεί να προκύπτουν σε εσωτερικά σημεία ή στα άκρα του διαστήματος.



ΣΧΗΜΑ 3.5 Αρκεί ένα σημείο ασυνέχειας για να αναιρέσει την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου σε κλειστό διάστημα. Η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 1]$ πλην του $x = 1$, συνεπώς η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 1]$ δεν έχει μέγιστο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 απαιτεί λεπτομερή γνώση του συστήματος των πραγματικών αριθμών, και παραλείπεται εδώ.

Παράδειγμα 4 Τα ακρότατα εξαρτώνται από τη συνέχεια

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.5, οι απαιτήσεις του Θεωρήματος 1 περί κλειστότητας του διαστήματος και συνέχειας της συναρτήσεως είναι ουσιώδεις. Χωρίς αυτές, τα συμπεράσματα του θεωρήματος δεν ισχύουν κατ' ανάγκην.

Τοπικά (σχετικά) ακρότατα

Το Σχήμα 3.1 δείχνει μια γραφική παράσταση με πέντε ακρότατα μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της $[a, b]$. Το ολικό (απόλυτο) ελάχιστο της συναρτήσεως προκύπτει στο a παρά το ότι η τιμή της συνάρτησης στο e είναι μικρότερη από τις τιμές των *γειτονικών* της σημείων. Κοιτάζοντας την καμπύλη από αριστερά βλέπουμε ότι αρχικά ανέρχεται, ενώ μετά το c κατέρχεται, ώστε η τιμή $f(c)$ να αποτελεί μέγιστο σε *τοπική* κλίμακα. Η συνάρτηση εμφανίζει ολικό μέγιστο στο d.

Ορισμός Τοπικά ακρότατα

Έστω c εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f. Η τιμή $f(c)$ είναι

(α) τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο στο c αν και μόνο αν $f(x) \le f(c)$ για κάθε x που ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c

(β) τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο στο c αν και μόνο αν $f(x) \ge f(c)$ για κάθε x που ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τους ορισμούς των τοπικών ακροτάτων και στα άκρα διαστημάτων. Μια συνάρτηση f θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο *στο άκρο* c αν ισχύει η κατάλληλη ανισότητα για όλα τα x που ανήκουν σε ένα ημιανοιχτό διάστημα που περιέχει το c.

Ένα ολικό ακρότατο είναι και τοπικό ακρότατο, αφού όντας ακρότατο σε όλο το πεδίο ορισμού θα είναι ακρότατο και στην άμεση γειτονιά του. Έτσι, *ο κατάλογος όλων των τοπικών ακροτάτων θα συμπεριλαμβάνει αυτομάτως και όποια ολικά ακρότατα υπάρχουν.*

Εύρεση ακροτάτων

Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου η συνάρτηση του Σχήματος 3.1 παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, είναι σημεία όπου η f' είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει. Η πρόταση αυτή έχει γενική ισχύ, όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2 Τοπικά ακρότατα

Αν μια συνάρτηση f εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου ορισμού της, και αν υπάρχει η f' στο c, τότε

$$f'(c) = 0.$$

Το Θεώρημα 2 μας λέει ότι η πρώτη παράγωγος μιας συναρτήσεως μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού όπου υπάρχει τοπικό ακρότατο και όπου η παράγωγος ορίζεται. Έτσι, τα μόνα σημεία στα οποία μια συνάρτηση f μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο (τοπικό ή ολικό) είναι τα

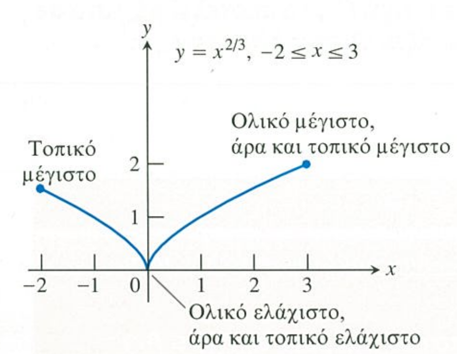
1. εσωτερικά σημεία όπου $f' = 0$
2. εσωτερικά σημεία όπου η f' δεν ορίζεται
3. άκρα του πεδίου ορισμού της f.

CD-ROM Δικτυότοπος

Στις περισσότερες εφαρμογές ζητούμε τα ολικά ακρότατα συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα. Το Θεώρημα 1 μας εγγυάται ότι τα ακρότατα αυτά υπάρχουν· και το Θεώρημα 2 μας λέει πού να τα βρούμε. Ο ακόλουθος ορισμός συνοψίζει όσα είπαμε.

Ορισμός Κρίσιμο σημείο

Ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f όπου η f' είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει είναι **κρίσιμο σημείο** της f.



ΣΧΗΜΑ 3.6 Τα ακρότατα της $f(x) = x^{2/3}$ στο διάστημα $[-2, 3]$ προκύπτουν για $x = 0$ και $x = 3$. (Παράδειγμα 5)

Μπορούμε λοιπόν, συνοψίζοντας, να πούμε ότι τα ακρότατα θα εμφανίζονται μονάχα σε κρίσιμα σημεία και σε άκρα διαστημάτων.

Παράδειγμα 5 Εύρεση ολικών ακροτάτων σε κλειστό διάστημα

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x) = x^{2/3}$ στο διάστημα $[-2, 3]$.

Λύση Το Σχήμα 3.6 δείχνει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο περίπου ίσο με 2 στο $x = 3$, και ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$. Επαληθεύουμε τις παρατηρήσεις αυτές υπολογίζοντας τη συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος, και επιλέγοντας τη μέγιστη και την ελάχιστη από τις τιμές που θα βρούμε.

Η πρώτη παράγωγος

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

δεν μηδενίζεται πουθενά, ενώ για $x = 0$ δεν ορίζεται. Οι τιμές της f στο κρίσιμο αυτό σημείο και στα άκρα του διαστήματος είναι:

Τιμή στο κρίσιμο σημείο: $f(0) = 0$

Τιμές στα άκρα: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ολικό μέγιστο της συναρτήσεως είναι $\sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$, και ότι προκύπτει στο δεξιό άκρο $x = 3$. Το ολικό ελάχιστο είναι 0, και προκύπτει στο εσωτερικό σημείο $x = 0$.

Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα συνεχούς συναρτήσεως f σε κλειστό διάστημα

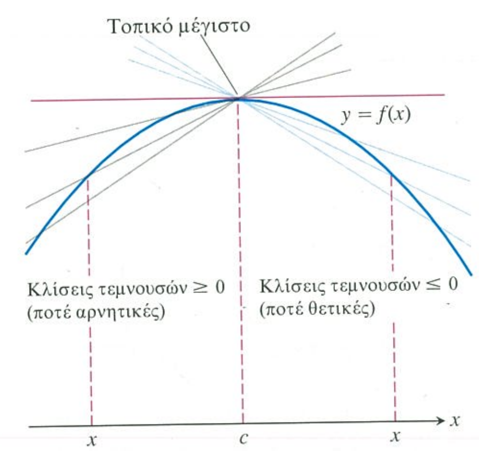
Βήμα 1. Υπολογίζουμε την f σε όλα τα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Βήμα 2. Από τις τιμές που βρήκαμε επιλέγουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη.

Απόδειξη Θεωρήματος 2 Για να δείξουμε ότι η $f'(c)$ μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό τοπικό ακρότατο, δείχνουμε πρώτα ότι η $f'(c)$ δεν μπορεί να είναι θετική και κατόπιν ότι δεν μπορεί να είναι αρνητική. Ο μόνος αριθμός που δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός είναι το μηδέν, άρα αυτή πρέπει να είναι και η τιμή της $f'(c)$.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$ (Σχήμα 3.7) ούτως ώστε $f(x) - f(c) \le 0$ για κάθε x αρκούντως κοντά στο c. Αφού το c είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f, η $f'(c)$ ορίζεται ως το αμφίπλευρο όριο

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$



ΣΧΗΜΑ 3.7 Καμπύλη με τοπικό μέγιστο. Η τιμή της κλίσης στο c αποτελεί ταυτόχρονα το όριο μη θετικών και μη αρνητικών αριθμών, και συνεπώς μηδενίζεται.

Συνεπώς, θα υπάρχουν στο $x = c$ τόσο το δεξιό όσο και το αριστερό όριο και θα ισούνται με $f'(c)$. Ας δούμε το καθένα από τα όρια αυτά χωριστά, αρχίζοντας από το δεξιό:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0. \qquad \text{Εφόσον } (x - c) > 0 \text{ και } f(x) \le f(c) \qquad (1)$$

Ομοίως, για το αριστερό όριο έχουμε

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0. \qquad \text{Εφόσον } (x - c) < 0 \text{ και } f(x) \le f(c) \qquad (2)$$

Συνδυαζόμενες, οι (1) και (2) συνεπάγονται ότι $f'(c) = 0$.

Έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα για τοπικά μέγιστα. Για να το αποδείξουμε και για τοπικά ελάχιστα, όπου $f(x) \ge f(c)$, αρκεί να αλλάξουμε στην παραπάνω απόδειξη τη φορά των ανισοτήτων (1) και (2).

Στο Παράδειγμα 6, εξετάζουμε τη συνάρτηση της οποίας τη γραφική παράσταση σχεδιάσαμε στο Παράδειγμα 3 της Ενότητας 2 του Κεφαλαίου 0.

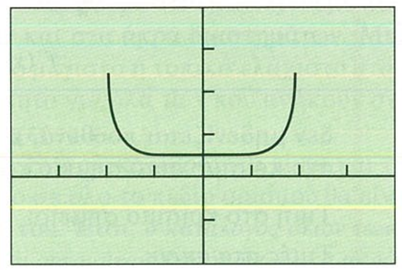
Παράδειγμα 6 Εύρεση ακροτάτων

Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Λύση Το Σχήμα 3.8 υποδεικνύει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο περίπου ίσο με 0,5 στο $x = 0$. Φαίνεται ακόμη να υπάρχουν τοπικά μέγιστα για $x = -2$ και $x = 2$. Στα σημεία αυτά, ωστόσο, η f δεν ορίζεται. Άλλα μέγιστα δεν φαίνεται να υπάρχουν.

Ας επαληθεύσουμε τώρα τις γραφικές αυτές παρατηρήσεις. Η



[−4, 4] επί [−2, 4]

Σχημα 3.8 Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

(Παράδειγμα 6)

συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $4 - x^2 > 0$, συνεπώς πεδίο ορισμού της είναι το ανοιχτό διάστημα $(-2, 2)$. Το πεδίο ορισμού δεν έχει άκρα, κι έτσι όλα τα ακρότατα οφείλουν να εμφανίζονται σε κρίσιμα σημεία. Παραγωγίζουμε την

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = (4 - x^2)^{-1/2},$$

για να βρούμε την f':

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-3/2}(-2x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{3/2}}.$$

Το μόνο κρίσιμο σημείο στο πεδίο ορισμού $(-2, 2)$ είναι το $x = 0$. Η τιμή

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{4 - 0^2}} = \frac{1}{2}$$

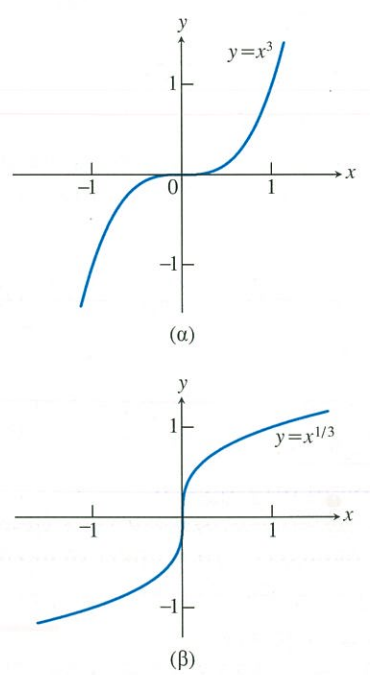
είναι λοιπόν η μόνη υποψήφια για ακρότατο.

Προσδιορίζουμε αν το $1/2$ είναι όντως ακρότατο της f, εξετάζοντας τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Καθώς το x απομακρύνεται από το 0 προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, ο παρονομαστής μειώνεται, η τιμή της f αυξάνεται, και η γραφική παράσταση ανέρχεται. Υπάρχει λοιπόν, ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι ολικό.

Δεν υπάρχουν μέγιστα, τοπικά ή ολικά. Αυτό δεν παραβιάζει το Θεώρημα 1 (θεώρημα ακροτάτων) αφού εδώ η f ορίζεται σε *ανοιχτό* διάστημα. Το Θεώρημα 1 εγγυάται την ύπαρξη ακροτάτων υπό την προϋπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα.



Σχημα 3.9 Κρίσιμα σημεία που δεν είναι ακρότατα. (α) Η $y' = 3x^2$ μηδενίζεται στο $x = 0$, αλλά η $y = x^3$ δεν παρουσιάζει ακρότατο εκεί. (β) Η $y' = (1/3)x^{-2/3}$ δεν ορίζεται για $x = 0$, αλλά η $y = x^{1/3}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο εκεί.

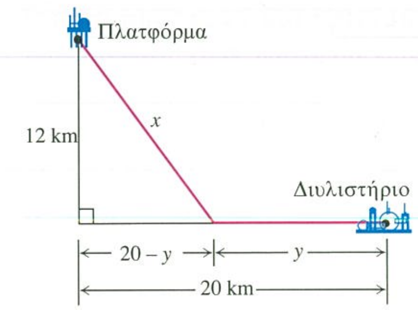
Παράδειγμα 7 Ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι πάντα και ακρότατο

Τα ακρότατα προκύπτουν μόνο σε κρίσιμα σημεία και σε άκρα, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Ένα κρίσιμο σημείο ή ένα άκρο δεν είναι κατ' ανάγκην και ακρότατο. Η πρόταση αυτή επικυρώνεται από το Σχήμα 3.9 για εσωτερικά σημεία, και από την Άσκηση 56 για τα άκρα του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 8 Λύση του προβλήματος της πλατφόρμας γεωτρήσεως

Αποτυπώνουμε σε πρόχειρο σχήμα τη γεωμετρία και τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος. Θεωρούμε ως μεταβλητές το μήκος x του υποθαλάσσιου αγωγού και το μήκος y του επίγειου αγωγού (Σχήμα 3.10).

Το σημείο-κλειδί είναι να αναγνωρίσουμε από το σχήμα ότι απέ-



Σχημα 3.10 Το σχήμα για την επίλυση του προβλήματος με την πλατφόρμα γεωτρήσεως.

ναντι από την πλατφόρμα σχηματίζεται ορθή γωνία. Έτσι μπορούμε να συνδέσουμε τα x και τα y βάσει του Πυθαγόρειου Θεωρήματος:

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2$$
$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}. \qquad (3)$$

Μόνο η θετική ρίζα έχει νόημα εδώ.

Το κόστος του αγωγού είναι η συνάρτηση

$$c = 50.000\, x + 30.000\, y.$$

Για να εκφράσουμε το c συναρτήσει μόνο της μιας μεταβλητής, αντικαθιστούμε το x κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (3):

$$c = 50.000 \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 30.000y.$$

Πρέπει τώρα να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως $c(y)$ στο διάστημα $0 \le y \le 20$. Η πρώτη παράγωγος της c ως προς y είναι

$$c' = 50.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 30.000$$

$$= -50.000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 30.000.$$

Θέτουμε το c' ίσο με μηδέν και παίρνουμε

$$50.000\,(20 - y) = 30.000 \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$
$$\frac{5}{3}(20 - y) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$
$$\frac{25}{9}(20 - y)^2 = 144 + (20 - y)^2$$
$$\frac{16}{9}(20 - y)^2 = 144$$
$$(20 - y) = \pm\frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$
$$y = 20 \pm 9$$
$$y = 11 \quad \text{ή} \quad y = 29.$$

Μόνο η ρίζα $y = 11$ ανήκει στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Στο κρίσιμο αυτό σημείο καθώς και στα άκρα του διαστήματος η c παίρνει τις εξής τιμές:

$$c(11) = 1.080.000$$
$$c(0) = 1.166.190$$
$$c(20) = 1.200.000.$$

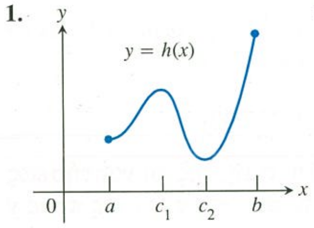
Συνεπώς, η λιγότερο δαπανηρή σύνδεση στοιχίζει 1.080.000 € και επιτυγχάνεται μέσω υποθαλάσσιου αγωγού που φτάνει στην ακτή σε σημείο το οποίο απέχει 11 km από το διυλιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1

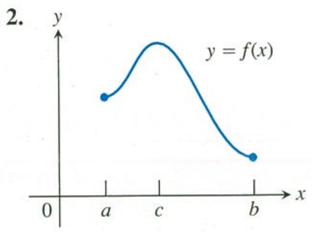
Γραφική εύρεση ακροτάτων

Στις Ασκήσεις 1-6, προσδιορίστε από τη γραφική παράσταση αν η συνάρτηση παρουσιάζει ολικά ακρότατα στο $[a, b]$. Κατόπιν εξηγήστε γιατί η απάντησή σας είναι συμβατή με το Θεώρημα 1.

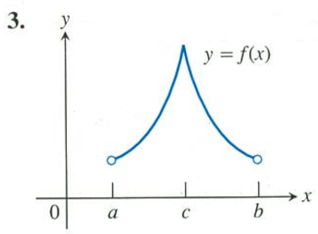
1.



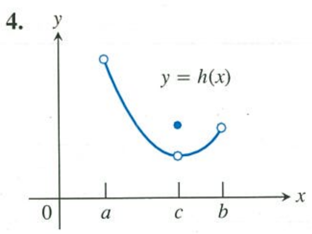
2.



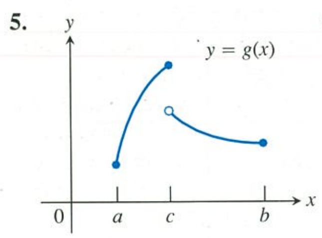
3.



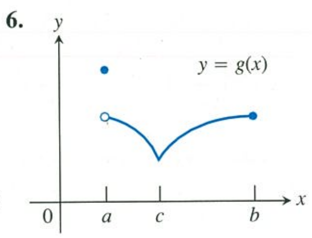
4.



5.

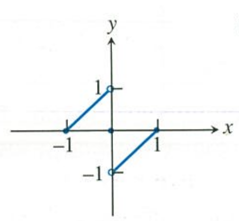


6.

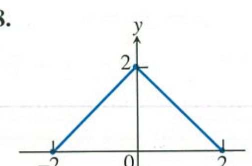


Στις Ασκήσεις 7-10, βρείτε πού προκύπτουν ακρότατα και ποια είναι αυτά.

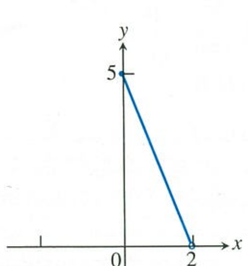
7.



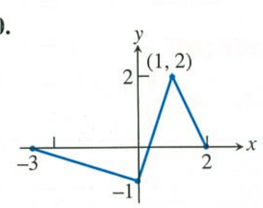
8.



9.



10.



Στις Ασκήσεις 11-14, αντιστοιχίστε κάθε γραφική παράσταση με έναν πίνακα τιμών.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

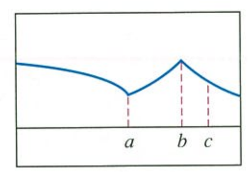
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

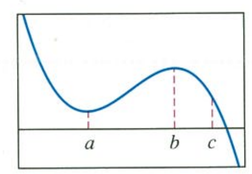
x	$f'(x)$
a	δεν υπάρχει
b	0
c	-2

14.

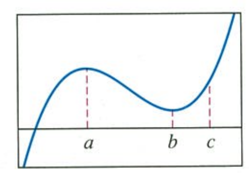
x	$f'(x)$
a	δεν υπάρχει
b	δεν υπάρχει
c	$-1{,}7$



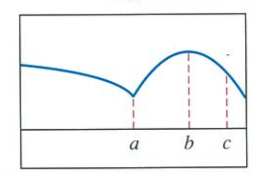
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Ολικά ακρότατα

Στις Ασκήσεις 15-20, βρείτε τα ολικά ακρότατα κάθε συναρτήσεως στο αναγραφόμενο διάστημα. Κατόπιν σχεδιάστε τη συνάρτηση. Εντοπίστε σε ποια σημεία του γραφήματος προκύπτουν ολικά ακρότατα και καταγράψτε τις συντεταγμένες τους.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

16. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

17. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \le x \le \frac{7\pi}{4}$

18. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0{,}5 \le x \le 2$

20. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

Εύρεση ακροτάτων

Στις Ασκήσεις 21-30, βρείτε πού υπάρχουν και ποια είναι τα ακρότατα της συναρτήσεως.

21. $y = 2x^2 - 8x + 9$

22. $y = x^3 - 2x + 4$

23. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

24. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

25. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

26. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

27. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

28. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

29. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

30. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Τοπικά ακρότατα και κρίσιμα σημεία

Στις Ασκήσεις 31-38, βρείτε την παράγωγο σε κάθε κρίσιμο σημείο και προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα.

31. $y = x^{2/3}(x + 2)$

32. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

33. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

34. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

35. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

36. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

37. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

38. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

Απαντήστε στα ερωτήματα των Ασκήσεων 39 και 40, αιτιολογώντας κάθε απάντησή σας.

39. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

(α) Υπάρχει η $f'(2)$;

(β) Δείξτε ότι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της f εμφανίζεται για $x = 2$.

(γ) Αντιτίθεται το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) στο θεώρημα ακροτάτων;

(δ) Επαναλάβετε τα (α) και (β) για την $f(x) = (x - a)^{2/3}$, δηλαδή με το a στη θέση του 2.

40. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f(x) = |x^3 - 9x|$.

(α) Υπάρχει η $f'(0)$;

(β) Υπάρχει η $f'(3)$;

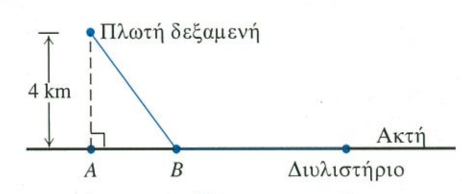
(γ) Υπάρχει η $f'(-3)$;

(δ) Προσδιορίστε όλα τα ακρότατα της f.

Εφαρμογές βελτιστοποίησης

Όταν ζητάτε τα μέγιστα ή τα ελάχιστα συναρτήσεως μιας μεταβλητής, καλό είναι να σχεδιάζετε πρώτα τη συνάρτηση σε κάποιο κατάλληλο διάστημα. Αυτό θα σας βοηθήσει να αντιληφθείτε καλύτερα το πρόβλημα, προτού μπείτε στις λεπτομέρειες των υπολογισμών· αλλά και θα έχετε έναν εποπτικό έλεγχο της λύσης που βρήκατε.

41. *Κατασκευή αγωγού* Ένα δεξαμενόπλοιο εφοδιάζει με πετρέλαιο μια πλωτή δεξαμενή που απέχει 4 km από την ακτή. Το πλησιέστερο διυλιστήριο βρίσκεται 9 km ανατολικά του σημείου της ακτής ακριβώς απέναντι από τη δεξαμενή. Είναι απαραίτητο να κατασκευαστεί ένας αγωγός σύνδεσης της δεξαμενής με το διυλιστήριο. Η κατασκευή στοιχίζει 300.000 € ανά km διά θαλάσσης και 200.000 € ανά km διά ξηράς.

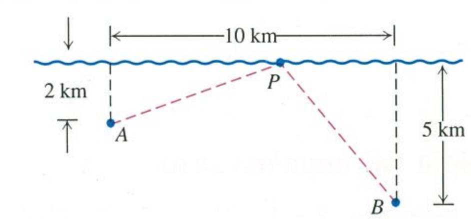


(α) Εντοπίστε το σημείο B που ελαχιστοποιεί το κατασκευαστικό κόστος.

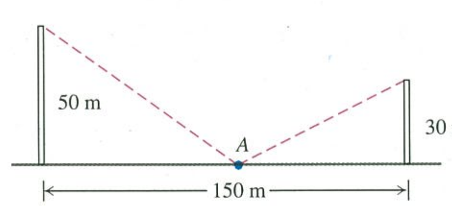
(β) Το κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής αναμένεται να αυξηθεί, ενώ το κόστος της επίγειας κατασκευής αναμένεται να μείνει σταθερό. Για ποιο κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής συμφέρει πλέον περισσότερο να κατασκευαστεί ο αγωγός απευθείας στο σημείο A;

42. *Εθνική οδός* Τα χωριά A και B πρόκειται να συνδεθούν μέσω εθνικής οδού. Σε απόσταση 50 km νότια της ευθείας που συνδέει τα χωριά, υπάρχει ένας επαρχιακός δρόμος ο οποίος μπορεί να αναβαθμιστεί σε εθνική οδό. Το κόστος αναβαθμίσεως του υπάρχοντος δρόμου είναι 300.000 € ανά km, ενώ το κόστος κατασκευής νέας εθνικής οδού είναι 500.000 € ανά km. Βρείτε ποιος συνδυασμός αναβαθμίσεως και νέας κατασκευής ελαχιστοποιεί το κόστος οδικής σύνδεσης των δύο χωριών. Χαράξτε επακριβώς στο σχήμα τον σχεδιασμό της εθνικής οδού που προτείνετε.

43. *Τοποθεσία σταθμού άντλησης* Δυο πόλεις βρίσκονται στα νότια ενός ποταμού. Για τις ανάγκες ύδρευσης των πόλεων πρόκειται να κατασκευαστεί στον ποταμό ένας σταθμός αντλήσεως ύδατος, απ' όπου θα ξεκινούν δύο αγωγοί που θα φέρνουν το νερό στην κάθε πόλη. Κάθε αγωγός θα κατασκευαστεί επί της ευθείας που συνδέει τον σταθμό με την αντίστοιχη πόλη. Βρείτε την τοποθεσία του σταθμού άντλησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος των αγωγών ύδρευσης.



44. *Μήκος καλωδίου* Δύο πύργοι έχουν ύψος 50 m και 30 m αντίστοιχα, και απέχουν 150 m. Ένα καλώδιο πρόκειται να συνδέσει το σημείο A με την κορυφή κάθε πύργου.



(α) Εντοπίστε τη θέση του A που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος του καλωδίου.

(β) Δείξτε γενικά ότι, ανεξαρτήτως του ύψους των πύργων, το μήκος του καλωδίου ελαχιστοποιείται αν οι γωνίες με κορυφή το σημείο A γίνουν ίσες.

45. *Μάθετε γράφοντας* Η συνάρτηση

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5,$$

αναπαριστά τον όγκο κάποιου κιβωτίου.

(α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης V.

(β) Τι σημαίνουν για τον όγκο του κιβωτίου οι τιμές που βρήκατε στο (α);

46. *Μάθετε γράφοντας* Η συνάρτηση

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad 0 < x < \infty,$$

αναπαριστά την περίμετρο ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαστάσεων x επί $100/x$.

(α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης P.

(β) Τι σημαίνουν για την περίμετρο του ορθογωνίου οι τιμές που βρήκατε στο (α);

47. *Εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου* Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου με μήκος υποτείνουσας 5 cm;

48. *Εμβαδόν γηπέδου* Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα γήπεδο σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου με μήκος μεγάλης πλευράς x. Στις δύο μικρότερες πλευρές θα εφάπτονται δυο ημικυκλικές περιοχές ακτίνας r. Το γήπεδο θα περικλείεται από έναν διάδρομο στίβου μήκους 400 m.

(α) Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογώνιου τμήματος συναρτήσει μόνο του x ή μόνο του r (όποιο από τα δύο θέλετε).

(β) Για ποιες τιμές των x και r αποκτά μέγιστο εμβαδόν το ορθογώνιο τμήμα του γηπέδου;

49. *Μέγιστο ύψος κατακόρυφα κινούμενου σώματος* Το ύψος ενός σώματος που κινείται κατακόρυφα δίδεται από τη σχέση

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad g > 0,$$

όπου s σε m και t σε sec. Βρείτε το μέγιστο ύψος του σώματος.

50. *Μέγιστη τιμή εναλλασσόμενου ρεύματος* Έστω ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t (σε sec) το ρεύμα i (σε Ampère) εναλλασσόμενου κυκλώματος δίδεται από τη σχέση $i = 2\cos t + 2\sin t$. Ποια η μέγιστη τιμή του ρεύματος (κατά μέτρο) για το κύκλωμα αυτό;

Θεωρία και παραδείγματα

51. *Ένα ελάχιστο άνευ παραγώγου* Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ παρόλο που η f δεν είναι διαφορίσιμη εκεί. Είναι συμβατό αυτό με το Θεώρημα 2; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

52. *Άρτιες συναρτήσεις* Αν μια άρτια συνάρτηση $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της f στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

53. *Περιττές συναρτήσεις* Αν μια περιττή συνάρτηση $g(x)$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της g στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

54. *Μάθετε γράφοντας* Γνωρίζουμε πώς να βρίσκουμε τα ακρότατα μιας συνεχούς συναρτήσεως $f(x)$ με διερεύνηση των τιμών της στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του πεδίου ορισμού. Τι συμβαίνει όμως όταν *δεν* υπάρχουν κρίσιμα και ακραία σημεία; Είναι δυνατόν να υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

55. *Πολυώνυμα τρίτου βαθμού* Θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

(α) Δείξτε ότι η f μπορεί να έχει 0, 1, ή 2 κρίσιμα σημεία. Επικυρώστε την απάντησή σας με παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις.

(β) Πόσα τοπικά ακρότατα μπορεί να εμφανίζει η f;

T **56.** *Συναρτήσεις άνευ ακροτάτων στα άκρα*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί η τιμή $f(0) = 0$ δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο της f.

(β) Κατασκευάστε μια δική σας συνάρτηση που δεν εμφανίζει ακρότατο σε άκρο του πεδίου ορισμού της.

T Σχεδιάστε τις συναρτήσεις που δίδονται στις Ασκήσεις 57-60. Κατόπιν βρείτε πού εμφανίζονται τα ακρότατα και ποια είναι αυτά.

57. $f(x) = |x-2| + |x+3|, \quad -5 \le x \le 5$

58. $g(x) = |x-1| - |x-5|, \quad -2 \le x \le 7$

59. $h(x) = |x+2| - |x-3|, \quad -\infty < x < \infty$

60. $k(x) = |x+1| + |x-3|, \quad -\infty < x < \infty$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 61-70, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για την εύρεση των ολικών ακροτάτων κάθε συναρτήσεως στο αναγραφόμενο κλειστό διάστημα. Συγκεκριμένα εκτελέστε τα παρακάτω.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση στο συγκεκριμένο διάστημα για να δείτε τη γενική συμπεριφορά της.

(β) Βρείτε τα εσωτερικά σημεία όπου $f' = 0$. (Ίσως χρειαστεί να επιλύσετε αριθμητικά την εξίσωση και να βρείτε προσεγγιστικά μια λύση.) Μπορείτε επίσης να σχεδιάσετε την f'.

(γ) Βρείτε τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος όπου η f' δεν υπάρχει.

(δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση για κάθε σημείο που βρήκατε στα (β) και (γ) καθώς και στα άκρα του διαστήματος.

(ε) Βρείτε πού προκύπτουν και ποια είναι τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

62. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

63. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

64. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

65. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

66. $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

67. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad 0{,}5 \le x \le 24$

68. $g(x) = e^{-x}, \quad -1 \le x \le 1$

69. $h(x) = \ln(x+1), \quad 0 \le x \le 3$

70. $k(x) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

3.2 Θεώρημα μέσης τιμής και διαφορικές εξισώσεις

Το θεώρημα του Rolle • Το θεώρημα μέσης τιμής • Φυσική ερμηνεία • Μαθηματικές συνέπειες • Εύρεση ταχύτητας και θέσεως από την επιτάχυνση • Διαφορικές εξισώσεις και ύψος βλήματος

Έχουμε δει πώς υπολογίζεται συναρτήσει του χρόνου η θέση σωματιδίου που αφήνεται από την ηρεμία να πέσει ελεύθερα. Μάθαμε επίσης πώς να εξάγουμε τις συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης από τη συνάρτηση θέσεως. Υποθέστε, όμως, ότι αρχικά γνωρίζουμε μόνο την επιτάχυνση του σώματος (επιτάχυνση της βαρύτητας, στην περίπτωσή μας) και τίποτα άλλο. Θα μπορούσαμε τότε να κινηθούμε αντίστροφα και να βρούμε τις συναρτήσεις ταχύτητας και θέσεως;

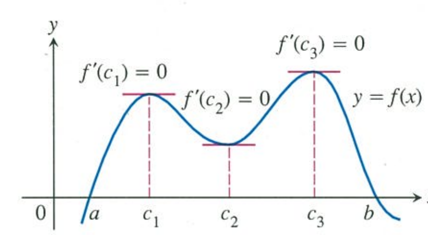
Το μαθηματικό ερώτημα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι το εξής: Ποιες συναρτήσεις έχουν ως παράγωγο μια δοθείσα συνάρτηση; Ποιες συναρτήσεις ταχύτητας αντιστοιχούν σε δεδομένη συνάρτηση επιτάχυνσης; Ποιες συναρτήσεις θέσεως αντιστοιχούν σε δεδομένη συνάρτηση ταχύτητας; Στα ερωτήματα αυτά απαντούν τα πορίσματα του θεωρήματος μέσης τιμής.

Το θεώρημα μέσης τιμής συνδέει τον μέσο ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης σε σημείο εσωτερικό του διαστήματος.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Michel Rolle
(1652-1719)

Το θεώρημα του Rolle

Υπάρχουν ισχυρές γεωμετρικές ενδείξεις ότι μεταξύ δύο σημείων στα οποία μια διαφορίσιμη καμπύλη τέμνει τον άξονα x θα υπάρχει σημείο της καμπύλης όπου η εφαπτομένη της γίνεται οριζόντια. Ένα θεώρημα ηλικίας 300 ετών του Michel Rolle αποδεικνύει ότι όντως έτσι έχουν τα πράγματα.



Σχήμα 3.11 Το θεώρημα του Rolle λέει ότι μια διαφορίσιμη καμπύλη έχει τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη μεταξύ δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x. Η καμπύλη που φαίνεται εδώ έχει τρεις.

Θεώρημα 3 Θεώρημα του Rolle
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Αν

$$f(a) = f(b) = 0,$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός c στο (a, b) όπου $f'(c) = 0$ (Σχήμα 3.11).

Απόδειξη Όντας συνεχής, η f εμφανίζει ολικά μέγιστα και ελάχιστα στο $[a, b]$. Αυτά μπορούν να εμφανίζονται μόνο

1. σε εσωτερικά σημεία όπου μηδενίζεται η f'
2. σε εσωτερικά σημεία όπου η f' δεν υπάρχει
3. σε άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή στα a και b.

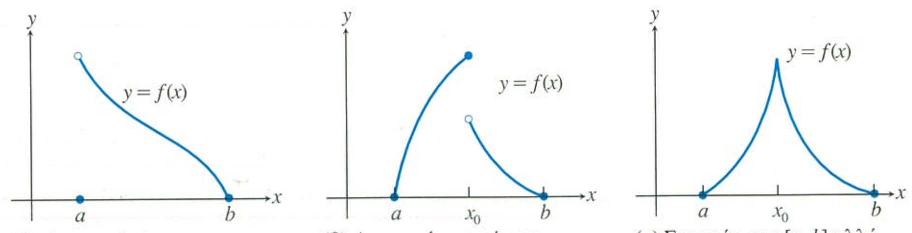
Εξ υποθέσεως, η f έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του $[a, b]$. Αυτό αποκλείει αμέσως την πρόταση 2, αφήνοντας ως ενδεχόμενα σημεία ακροτάτων τα εσωτερικά σημεία στα οποία $f' = 0$, και τα δύο άκρα a και b.

Αν είτε το μέγιστο είτε το ελάχιστο εμφανίζεται σε σημείο c εσωτερικό του διαστήματος, τότε $f'(c) = 0$ βάσει του Θεωρήματος 2 της Ενότητας 3.1, πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα του Rolle.

Αν και τα δύο ακρότατα εμφανίζονται στα a και b, τότε μηδενίζονται αμφότερα. Αυτό σημαίνει ότι η f έχει σταθερή τιμή 0, άρα $f' = 0$

σε όλο το (a, b) και το σημείο c μπορεί συνεπώς να κείται οπουδήποτε στο διάστημα αυτό. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3 είναι ουσιώδεις. Αν δεν ικανοποιούνται έστω και σε ένα σημείο του διαστήματος, η συνάρτηση μπορεί να μην έχει οριζόντια εφαπτομένη (Σχήμα 3.12).



(α) Ασυνεχής σε κάποιο άκρο

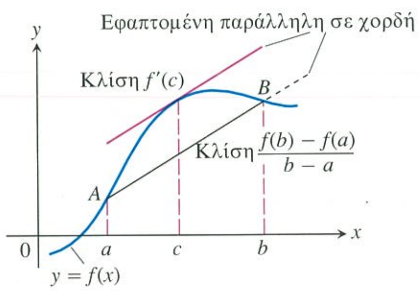
(β) Ασυνεχής σε κάποιο εσωτερικό σημείο

(γ) Συνεχής στο $[a, b]$ αλλά μη διαφορίσιμη σε κάποιο εσωτερικό σημείο

ΣΧΗΜΑ 3.12 Δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Το θεώρημα μέσης τιμής

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι παραπλήσιο του θεωρήματος του Rolle.



ΣΧΗΜΑ 3.13 Από γεωμετρικής πλευράς, το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι ανάμεσα στο A και στο B η καμπύλη έχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή AB.

Θεώρημα 4 Θεώρημα μέσης τιμής
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b). Θα υπάρχει τότε τουλάχιστον ένα σημείο c στο (a, b) όπου

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

Απόδειξη Απεικονίζουμε την f ως καμπύλη στο επίπεδο και φέρνουμε την ευθεία που διέρχεται από τα $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ (δείτε το Σχήμα 3.13). Η ευθεία αυτή είναι η γραφική παράσταση της

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

(εξίσωση σημείου-κλίσεως). Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφημάτων των f και g στο x είναι

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \tag{3}$$

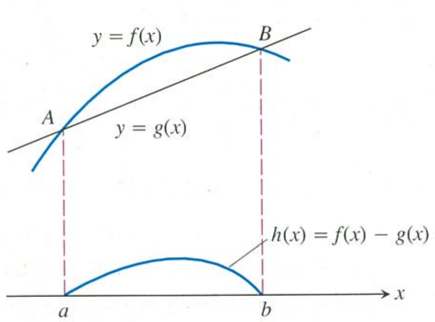
Τα γραφήματα των f, g, και h φαίνονται στο κοινό Σχήμα 3.14.

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[a, b]$. Είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) διότι οι f και g είναι συνεχείς και διαφορίσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Επίσης, ισχύει $h(a) = h(b) = 0$, αφού τα γραφήματα των f και g διέρχονται αμφότερα από τα A και B. Συνεπώς, σε κάποιο σημείο c στο (a, b) θα είναι $h' = 0$· το σημείο αυτό είναι το ζητούμενο.

Επαληθεύουμε την Εξίσωση (1) παραγωγίζοντας ως προς x την Εξίσωση (3) και θέτοντας $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Παράγωγος της Εξ. (3) . . .}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{. . . για } x = c$$

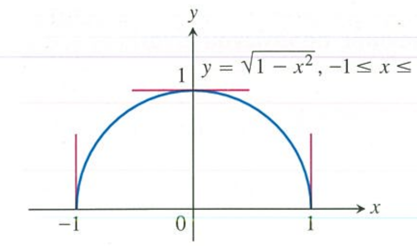


ΣΧΗΜΑ 3.14 Η χορδή AB είναι γραφική παράσταση της συναρτήσεως $g(x)$. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ δίδει την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφημάτων των f και g στο x.

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Αναδιατάσσοντας}$$

ό.έ.δ.



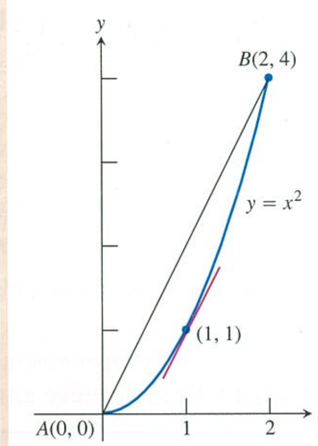
ΣΧΗΜΑ 3.15 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[-1, 1]$ χωρίς να είναι διαφορίσιμη στα -1 και 1.

Στις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής δεν περιλαμβάνεται η απαίτηση να είναι η f διαφορίσιμη στο a ή στο b. Αρκεί η συνέχεια στα a και b (Σχήμα 3.15).

Συνήθως δεν γνωρίζουμε τίποτα άλλο για το c παρά αυτό που λέει το θεώρημα, δηλαδή ότι το c υπάρχει. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να ικανοποιήσουμε την περιέργειά μας για το ποιο είναι το c, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί, αλλά αυτό αποτελεί συνήθως την εξαίρεση. Η σπουδαιότητα του θεωρήματος δεν έγκειται στην εύρεση του c.

Παράδειγμα 1 Διερεύνηση του θεωρήματος μέσης τιμής

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ (Σχήμα 3.16) είναι συνεχής για $0 \le x \le 2$ και διαφορίσιμη για $0 < x < 2$. Εφόσον $f(0) = 0$ και $f(2) = 4$, το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι σε κάποιο σημείο c του διαστήματος, η παράγωγος $f'(x) = 2x$ θα πρέπει να παίρνει την τιμή $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. Σε αυτή εδώ την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε το c λύνοντας την εξίσωση $2c = 2$, οπότε $c = 1$.



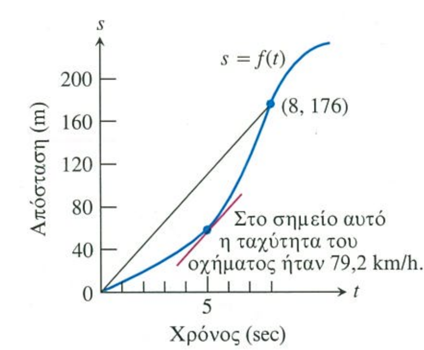
ΣΧΗΜΑ 3.16 Όπως βρήκαμε στο Παράδειγμα 1, στο σημείο $c = 1$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη της χορδής.

Μια φυσική ερμηνεία

Όπως γνωρίζουμε, η ποσότητα $(f(b) - f(a))/(b - a)$ είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f στο διάστημα $[a, b]$, ενώ η $f'(c)$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής. Το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι υπάρχει κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος όπου ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με τον μέσο ρυθμό μεταβολής στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα 2 Ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής

Αν ένα όχημα που επιταχύνεται από την ηρεμία χρειάζεται 8 sec για να διανύσει 176 m, η μέση ταχύτητά του για το διάστημα των 8 sec είναι $176/8 = 22$ m/sec. Σε κάποιο σημείο λοιπόν της κίνησης, το ταχύμετρο θα δείξει ακριβώς 79,2 km/h (22 m/sec) (Σχήμα 3.17).



ΣΧΗΜΑ 3.17 Γραφική παράσταση της απόστασης συναρτήσει του χρόνου για το όχημα του Παραδείγματος 2.

Μαθηματικές συνέπειες

Το πρώτο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής μας πληροφορεί για το ποιες συναρτήσεις έχουν μηδενική παράγωγο.

Πόρισμα 1 **Οι συναρτήσεις μηδενικής παραγώγου είναι σταθερές συναρτήσεις**

Αν $f'(x) = 0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος I, τότε $f(x) = C$ για κάθε x στο I, όπου C είναι μια σταθερά.

Γνωρίζουμε ήδη ότι αν μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα I, τότε θα είναι και διαφορίσιμη στο I και θα ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο I. Το Πόρισμα 1 δείχνει το αντίστροφο της πρότασης αυτής.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Bernard le Bouyer Fontenelle (1657-1757)

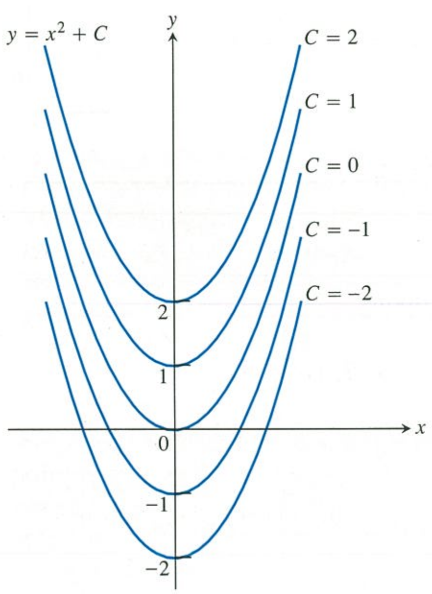
Απόδειξη Πορίσματος 1 Θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο I. Αρκεί να δείξουμε ότι αν x_1 και x_2 είναι δυο τυχόντα σημεία στο I, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

Έστω x_1 και x_2 δυο σημεία στο I, τέτοια ώστε $x_1 < x_2$. Στην περίπτωση αυτή, η f θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, δεδομένου ότι είναι διαφορίσιμη, και άρα συνεχής, σε όλο το $[x_1, x_2]$. Κατά συνέπεια, θα υπάρχει σημείο c μεταξύ των x_1 και x_2 όπου θα ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Εφόσον $f' = 0$ σε όλο το I, η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \text{ και } f(x_1) = f(x_2)$$



Σχημα 3.18 Η γεωμετρική σημασία του Πορίσματος 2 του θεωρήματος μέσης τιμής είναι ότι οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με την ίδια παράγωγο θα είναι κατακόρυφα μετατοπισμένες η μια ως προς την άλλη. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με παράγωγο $2x$ είναι οι παραβολές $y = x^2 + C$, μερικές από τις οποίες φαίνονται εδώ.

Στην αρχή της ενότητας, αναρωτηθήκαμε αν είναι δυνατόν, ξεκινώντας από την επιτάχυνση ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα και εργαζόμενοι αντίστροφα απ' ό,τι ως τώρα, να εξαγάγουμε τις συναρτήσεις της ταχύτητας και της θέσης του σώματος. Η απάντηση είναι καταφατική, βάσει του ακόλουθου πορίσματος.

Πόρισμα 2 **Συναρτήσεις που έχουν την ίδια παράγωγο σε ένα διάστημα διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερά στο διάστημα αυτό**

Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε σημείο ενός διαστήματος I, θα υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + C$ για κάθε x στο I.

Απόδειξη Για κάθε x στο I, η παράγωγος της συναρτήσεως διαφοράς $h = f - g$ είναι

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Συνεπώς, $h(x) = C$ στο I (Πόρισμα 1). Δηλαδή, $f(x) - g(x) = C$ στο I, και άρα $f(x) = g(x) + C$.

Το Πόρισμα 2 λέει ότι δυο συναρτήσεις θα έχουν κοινή παράγωγο σε ένα διάστημα μόνο αν οι τιμές τους διαφέρουν κατά μια σταθερά στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $(-\infty, \infty)$ είναι $2x$. Κάθε άλλη συνάρτηση με παράγωγο $2x$ στο $(-\infty, \infty)$ θα ισούται με $x^2 + C$ για κάποια τιμή του C (Σχήμα 3.18).

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του Πορίσματος 2

Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ που έχει παράγωγο $\sin x$ και της οποίας το γράφημα διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$.

Λύση Εφόσον η f έχει την ίδια παράγωγο με την $g(x) = -\cos x$, θα είναι $f(x) = -\cos x + C$ για κάποια σταθερά C. Η τιμή της C προσδιορίζεται από τη συνθήκη $f(0) = 2$ (αφού το γράφημα της f διέρχεται από το $(0, 2)$):

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{άρα} \qquad C = 3.$$

Ο ζητούμενος τύπος συναρτήσεως θα είναι λοιπόν $f(x) = -\cos x + 3$.

Εύρεση ταχύτητας και θέσεως από την επιτάχυνση

Μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα $v(t)$ και τη θέση $s(t)$ σώματος που αφήνεται να πέσει ελεύθερα με επιτάχυνση $9{,}8\ \text{m/sec}^2$ ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $v(t)$ ισούται με 9,8. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $g(t) = 9{,}8t$ είναι 9,8. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$v(t) = 9{,}8t + C$$

για κάποια σταθερά C. Εφόσον το σώμα αφήνεται να πέσει από την ηρεμία, $v(0) = 0$. Έτσι προσδιορίζεται η σταθερά C:

$$9{,}8(0) + C = 0, \qquad \text{άρα} \qquad C = 0.$$

Η συνάρτηση ταχύτητας είναι λοιπόν $v(t) = 9{,}8t$. Ποια είναι η συνάρτηση θέσεως $s(t)$;

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $s(t)$ ισούται με $9{,}8t$. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $h(t) = 4{,}9t^2$ είναι $9{,}8t$. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$s(t) = 4{,}9t^2 + C$$

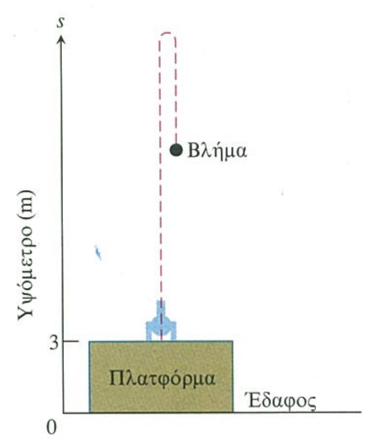
για κάποια σταθερά C. Εφόσον $s(0) = 0$,

$$4{,}9(0)^2 + C = 0 \qquad \text{και} \qquad C = 0.$$

Η συνάρτηση θέσεως θα είναι λοιπόν $s(t) = 4{,}9t^2$.

Διαφορικές εξισώσεις και ύψος βλήματος

Διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση που συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με μία ή περισσότερες από τις παραγώγους της. Μια συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι ικανοποιούν μια διαφορική εξίσωση καλείται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης.



Σχημα 3.19 Σκαρίφημα της κίνησης του βλήματος στο Παράδειγμα 5.

Παράδειγμα 4 Λύσεις διαφορικών εξισώσεων

(α) Η συνάρτηση $s(t) = 4{,}9t^2$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $d^2s/dt^2 = 9{,}8\ \text{m/sec}^2$.

(β) Η συνάρτηση $y = -\cos x + 3$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $dy/dx = \sin x$.

Παράδειγμα 5 Εύρεση ύψους βλήματος από την επιτάχυνση, την αρχική ταχύτητα και την αρχική θέση του

Βαρύ βλήμα βάλλεται κατακόρυφα από πλατφόρμα ύψους 3 m, με αρχική ταχύτητα 160 m/sec. Υποθέστε ότι η μόνη δύναμη που δρα πάνω στο βλήμα κατά την κίνησή του είναι η βαρύτητα, η οποία δημιουργεί μια κατακόρυφη (και προς τα κάτω) επιτάχυνση μέτρου 9,8 m/sec^2. Να βρεθεί μια εξίσωση του ύψους του βλήματος από το έδαφος συναρτήσει του χρόνου t, αν η χρονική στιγμή της εκτόξευσης είναι $t = 0$. Σε πόσο ύψος από το έδαφος βρίσκεται το βλήμα 3 sec μετά τη βολή;

Λύση Σχεδιάζουμε πρώτα ένα σκαρίφημα (Σχήμα 3.19) όπου συμβολίζουμε με s το ύψος (από το έδαφος) του βλήματος τη χρονική στιγμή t. Θεωρούμε ότι το s είναι μια διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση του t και παριστάνουμε κατά τα γνωστά την ταχύτητα και την επιτάχυνση του βλήματος ως

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{και} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Εφόσον η βαρύτητα δρα κατά την κατεύθυνση στην οποία το s *μειώνεται* στο μοντέλο μας, το πρόβλημα ανάγεται τώρα στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$d^2s/dt^2 = -9{,}8,$$

δεδομένου ότι

$$v(0) = 160 \quad \text{και} \quad s(0) = 3.$$

Εφόσον η παράγωγος της συναρτήσεως $g(t) = -9{,}8t$ ισούται με $-9{,}8$, από το Πόρισμα 2 παίρνουμε

$$v(t) = -9{,}8t + C$$

για κάποια σταθερά C. Μπορούμε να βρούμε τη C από την αρχική συνθήκη $v(0) = 160$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 160 \\ -9{,}8(0) + C &= 160 \\ C &= 160. \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στην τελική έκφραση της ταχύτητας ds/dt:

$$ds/dt = -9{,}8t + 160.$$

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $s(t)$ ισούται με $-9{,}8t + 160$. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $h(t) = -4{,}9t^2 + 160t$ είναι $-9{,}8t + 160$. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$s = -4{,}9t^2 + 160t + C.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη δεύτερη αρχική συνθήκη για να βρούμε τη νέα σταθερά C:

$$\begin{aligned} s(0) &= 3 \\ -4{,}9(0)^2 + 160(0) + C &= 3 \\ C &= 3. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε την τελική έκφραση του s συναρτήσει του t:

$$s = -4{,}9t^2 + 160t + 3.$$

Για να βρούμε το ύψος του βλήματος 3 sec μετά τη βολή, θέτουμε $t = 3$ στον τύπο του s. Βρίσκουμε

$$s = -4{,}9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438{,}9 \text{ m}.$$

Στα Κεφάλαια 4 και 6 θα μελετήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις εκτενέστερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

Έλεγχος προϋποθέσεων

Ποιες από τις συναρτήσεις στις Ασκήσεις 1-4 πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο δοσμένο διάστημα και ποιες όχι; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

2. $g(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

3. $s(t) = \sqrt{t(1-t)}, \quad [0, 1]$

4. $f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\theta}, & -\pi \le \theta < 0 \\ 0, & \theta = 0 \end{cases}$

5. *Μάθετε γράφοντας* Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$. Επίσης είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$, όπου η παράγωγός της δεν μηδενίζεται ποτέ. Πώς γίνεται αυτό; Δεν λέει το θεώρημα του Rolle ότι η παράγωγος πρέπει να είναι μηδέν σε κάποιο σημείο του $(0, 1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Για ποιες τιμές των a, m, και b πληροί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$;

Διαφορικές εξισώσεις

7. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι $f(-1) = 3$ και $f'(x) = 0$ για κάθε x. Αληθεύει ότι $f(x) = 3$ για κάθε x; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι $g(0) = 5$ και $g'(t) = 2$ για κάθε t. Αληθεύει ότι $g(t) = 2t + 5$ για κάθε t; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Στις Ασκήσεις 9-12, να βρεθούν όλες οι δυνατές συναρτήσεις που έχουν ως παράγωγο τη δεδομένη σε κάθε περίπτωση συνάρτηση.

9. **(α)** $y' = x$
(β) $y' = x^2$
(γ) $y' = x^3$

10. **(α)** $y' = 2x$
(β) $y' = 2x - 1$
(γ) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

11. **(α)** $r' = -\dfrac{1}{\theta^2}$
(β) $r' = 1 - \dfrac{1}{\theta^2}$
(γ) $r' = 5 + \dfrac{1}{\theta^2}$

12. **(α)** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
(β) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
(γ) $y' = 4t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

Στις Ασκήσεις 13-16, για κάθε μία από τις παραγώγους που δίδονται, να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο P.

13. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

14. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

15. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

16. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Εύρεση θέσεως από την ταχύτητα

Στις Ασκήσεις 17-20 δίδεται η ταχύτητα $v = ds/dt$ και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή t.

17. $v = 9{,}8t + 5, \quad s(0) = 10$

18. $v = 32t - 2, \quad s(0{,}5) = 4$

19. $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$

20. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

Εύρεση θέσεως από την επιτάχυνση

Στις Ασκήσεις 21-24 δίδεται η επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$, η αρχική ταχύτητα, και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή t.

21. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

22. $a = 9{,}8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

23. $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

24. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Επιτάχυνση βαρύτητας

25. *Ελεύθερη πτώση στη Σελήνη* Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης είναι 1,6 m/sec^2. Αφήνουμε έναν βράχο να πέσει σε μια χαράδρα. Με ποια ταχύτητα θα προσκρούσει στο σεληνιακό έδαφος μετά από ελεύθερη πτώση διάρκειας 30 sec;

26. *Ταχύτητα πυραύλου* Ένας πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με σταθερή επιτάχυνση 20 m/sec^2. Ποια θα είναι η ταχύτητά του μετά από 1 min;

27. *Κατάδυση από βατήρα* Με πόση περίπου ταχύτητα θα βουτήξετε στο νερό αν πηδήσετε από βατήρα καταδύσεων ύψους 10 m; ($g = 9{,}8$ m/sec^2.)

28. *Ύψος βλήματος στον Άρη* Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη είναι 3,72 m/sec^2. Αν ένας βράχος εκτοξευτεί κατακόρυφα από την επιφάνεια του πλανήτη με αρχική ταχύτητα 93 m/sec, σε πόσο ύψος θα φτάσει; (*Υπόδειξη*: Πότε μηδενίζεται η ταχύτητα;)

Ευθύγραμμη κίνηση

29. *Κίνηση κατά μήκος του άξονα συντεταγμένων* Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, υπό την προϋπόθεση ότι $ds/dt = 4$ και $s = 0$ για $t = 1$. Να βρεθούν

(α) η ταχύτητα $v = ds/dt$ συναρτήσει του χρόνου t

(β) η θέση s συναρτήσει του t.

30. *Εύρεση θέσης από την ταχύτητα* **(α)** Έστω ότι η ταχύτητα σώματος κινούμενου επί του άξονα s είναι

$$\frac{ds}{dt} = v = 9{,}8t - 3.$$

i. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = 5$ όταν $t = 0$.

ii. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = -2$ όταν $t = 0$.

iii. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = s_0$ όταν $t = 0$.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Θεωρούμε ότι η θέση s σώματος που κινείται στον άξονα s είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου t. Αληθεύει ότι, γνωρίζοντας την παράγωγο της θέσεως ds/dt, μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση του σώματος στο διάστημα από $t = a$ έως $t = b$, ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή θέση του σώματος τις στιγμές αυτές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Εφαρμογές

31. *Θερμοκρασιακή μεταβολή* Χρειάστηκαν 14 sec για ανέλθει η ένδειξη ενός θερμομέτρου υδραργύρου από −19°C σε 100°C όταν το βγάλαμε από την κατάψυξη και το βυθίσαμε σε νερό που έβραζε. Δείξτε ότι κάποια στιγμή η στήλη του υδραργύρου ανέβαινε με ρυθμό 8,5°C/sec.

32. *Υπέρβαση ορίου ταχύτητας* Σε οδηγό νταλίκας επιδίδεται κλήση υπέρβασης του ορίου ταχύτητας, με το αιτιολογικό ότι σε 2 h διένυσε 250 km ενώ το όριο ταχύτητας ήταν 100 km/h. Γιατί;

33. *Τριήρεις* Από αρχαίους συγγραφείς μαθαίνουμε ότι μια τριήρης (αρχαίο ελληνικό και ρωμαϊκό πλοίο με 170 κωπηλάτες) διήνυσε κάποτε 184 ναυτικά μίλια σε 24 h. Εξηγήστε γιατί σε κάποια στιγμή της διαδρομής η τριήρης αυτή θα πρέπει να έπλεε με ταχύτητα μεγαλύτερη των 7,5 κόμβων (ναυτικών μιλίων την ώρα).

34. *Μαραθώνιος* Ένας μαραθωνοδρόμος διένυσε τα 42,2 km του μαραθωνίου της Νέας Υόρκης σε 2,2 h. Δείξτε ότι σε δυο τουλάχιστον σημεία της διαδρομής ο δρομέας θα πρέπει να έτρεχε με ταχύτητα 19 km/h.

Θεωρία και παραδείγματα

35. *Γεωμετρικός μέσος των* a *και* b Ο **γεωμετρικός μέσος** δύο θετικών αριθμών a και b ισούται με $\sqrt{ab}$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = 1/x$ στο θετικό διάστημα $[a, b]$ για να δείξετε ότι το c (που εμφανίζεται στο θεώρημα) ισούται με $c = \sqrt{ab}$.

36. *Αριθμητικός μέσος των* a *και* b Ο **αριθμητικός μέσος** δύο αριθμών a και b ισούται με $(a + b)/2$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ σε τυχόν διάστημα $[a, b]$ για να δείξετε ότι το c (που εμφανίζεται στο θεώρημα) ισούται με $c = (a + b)/2$.

T **37.** *Μάθετε γράφοντας: Ένα αναπάντεχο γράφημα* Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x \sin(x + 2) - \sin^2(x + 1).$$

Τι είδους συμπεριφορά παρουσιάζει η γραφική παράσταση και γιατί; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

T **38.** *Θεώρημα του Rolle*

(α) Κατασκευάστε ένα πολυώνυμο $f(x)$ που να έχει τις ρίζες $x = -2, -1, 0, 1$, και 2.

(β) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τη συνάρτηση f και την παράγωγό της f'. Ποια σχέση έχουν αυτές οι γραφικές παραστάσεις με το θεώρημα του Rolle;

(γ) Αναδεικνύουν το ίδιο φαινόμενο οι γραφικές παραστάσεις της $g(x) = \sin x$ και της παραγώγου της g';

39. *Μοναδικότητα λύσεως* Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b). Έστω ακόμη ότι οι $f(a)$ και $f(b)$ έχουν αντίθετο πρόσημο και ότι $f' \neq 0$ μεταξύ των a και b. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο μεταξύ των a and b όπου $f(x) = 0$.

40. *Παράλληλες εφαπτομένες* Έστω ότι οι f και g είναι διαφορίσιμες στο $[a, b]$ και $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο μεταξύ των a and b όπου οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Κάντε ένα σχήμα για να εξηγήσετε την άποψή σας.

41. *Μάθετε γράφοντας: ταυτόσημα γραφήματα;* Αν οι γραφικές παραστάσεις των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο στο επίπεδο και οι δύο συναρτήσεις έχουν παντού τον ίδιο ρυθμό μεταβολής, θα ταυτίζονται τα γραφήματά τους; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. *Άνω φράγματα* Δείξτε ότι για τυχόντες αριθμούς a και b, η ανισότητα $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ αληθεύει.

43. *Πρόσημο της f'* Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $a \leq x \leq b$ και ότι $f(b) < f(a)$. Δείξτε ότι η f' είναι αρνητική σε κάποιο σημείο μεταξύ των a και b.

44. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Ποιες προϋποθέσεις πρέπει να πληροί η f ούτως ώστε να είναι

$$\min f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f',$$

όπου $\min f'$ και $\max f'$ είναι αντιστοίχως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f' στο $[a, b]$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

45. Χρησιμοποιήστε τις ανισότητες της Ασκήσεως 44 για να εκτιμήσετε την $f(0{,}1)$ αν $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ για $0 \leq x \leq 0{,}1$ και $f(0) = 1$.

46. Χρησιμοποιήστε τις ανισότητες της Ασκήσεως 44 για να εκτιμήσετε την $f(0{,}1)$ αν $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ για $0 \leq x \leq 0{,}1$ και $f(0) = 2$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σχεδίαση λύσεων διαφορικών εξισώσεων

Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να διερευνήσετε γραφικά τη λύση κάθε διαφορικής εξίσωσης στις Ασκήσεις 47-50. Συμπεριλάβετε στη διερεύνησή σας τα ακόλουθα βήματα.

(α) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης συναρτήσει της αυθαίρετης σταθεράς C.

(β) Σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα τις λύσεις για τις περιπτώσεις $C = -2, -1, 0, 1, 2$.

(γ) Εντοπίστε και σχεδιάστε στο υποδεικνυόμενο διάστημα $[a, b]$ τη λύση που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$.

47. $y' = x\sqrt{1 - x}$, $[0, 1]$, $P(1/2, 1)$

48. $y' = \frac{1}{x}$, $[1, 4]$, $P(2, -1)$

49. $y' = x \sin x$, $[-4, 4]$, $P(\pi, -1)$

50. $y' = \frac{1}{1 + \sin x}$, $[-\pi/4, \pi/2]$, $P(0, 1)$

3.3 Το σχήμα της γραφικής παράστασης

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις • Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα • Κοιλότητα • Σημεία καμπής • Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα • Τι μπορούμε να μάθουμε για μια συνάρτηση από την παράγωγό της

Για να προσδιορίσουμε το σχήμα μιας γραφικής παράστασης, θα πρέπει να γνωρίζουμε πόσο απότομα ανέρχεται ή κατέρχεται και πώς κάμπτεται η καμπύλη. Τα χαρακτηριστικά αυτά γνωρίσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.20. Στην ενότητα αυτή θα δούμε με ποιον τρόπο οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι μιας συναρτήσεως περιέχουν την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε το σχήμα της γραφικής της παράστασης. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας ορίζοντας αυστηρά την έννοια της αύξουσας και της φθίνουσας συναρτήσεως σε ένα διάστημα.

ΣΧΗΜΑ 3.20 Στο (α) η γραφική παράσταση ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (β) ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω. Στο (γ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (δ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Τι είδους χαρακτηριστικά παρουσιάζουν οι συναρτήσεις με θετική ή αρνητική παράγωγο; Η απάντηση δίδεται από το τρίτο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής και είναι η εξής: Οι συναρτήσεις θετικής παραγώγου είναι αύξουσες· ενώ οι συναρτήσεις αρνητικής παραγώγου είναι φθίνουσες.

Ορισμοί **Αύξουσα συνάρτηση, φθίνουσα συνάρτηση**

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα I. Τότε

1. η f είναι **αύξουσα** στο I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2. η f είναι **φθίνουσα** στο I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Πόρισμα 3 **Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις**

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b).

Αν $f' > 0$ σε όλο το (a, b), τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

Αν $f' < 0$ σε όλο το (a, b), τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

Απόδειξη Έστω x_1 και x_2 δυο σημεία του διαστήματος $[a, b]$ με $x_1 < x_2$. Το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο $[x_1, x_2]$ μας λέει ότι

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

για κάποιο c μεταξύ των x_1 και x_2. Το πρόσημο του δεξιού μέλους καθορίζεται από το πρόσημο της $f'(c)$ αφού το $x_2 - x_1$ είναι θετικό. Συνεπώς θα είναι $f(x_2) > f(x_1)$ αν η παράγωγος f' είναι θετική στο (a, b) και $f(x_2) < f(x_1)$ αν η f' είναι αρνητική στο (a, b).

Ιδού πώς εφαρμόζουμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για να βρούμε τα διαστήματα όπου μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Τα κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως f διαμερίζουν τον άξονα x σε διαστήματα όπου η f' είναι είτε θετική είτε αρνητική. Προσδιορίζουμε το πρόσημο της f' στο εκάστοτε διάστημα υπολογίζοντας την f' για τυχόν x στο διάστημα αυτό. Κατόπιν εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.

Παράδειγμα 1 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και εντοπίστε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

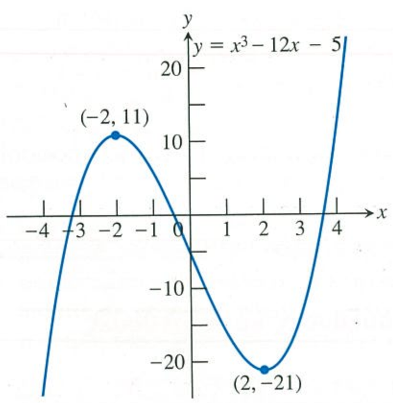
Λύση Το Σχήμα 3.21 υποδεικνύει ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία. Εφόσον η f είναι συνεχής και διαφορίσιμη για κάθε πραγματικό x, τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν μονάχα στα σημεία μηδενισμού της f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Τα σημεία μηδενισμού της f' είναι $x = -2$ και $x = 2$. Έτσι ο άξονας x διαμερίζεται σε διαστήματα ως ακολούθως.

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Πρόσημο της f'	$+$	$-$	$+$
Συμπεριφορά της f	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, «πολλαπλασιάσαμε» μεταξύ τους τα πρόσημα των παραγόντων της f'. Κατόπιν εφαρμόσαμε το Πόρισμα 3, συμπεραίνοντας ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, -2)$, φθίνουσα στο $(-2, 2)$, και αύξουσα πάλι στο $(2, \infty)$.



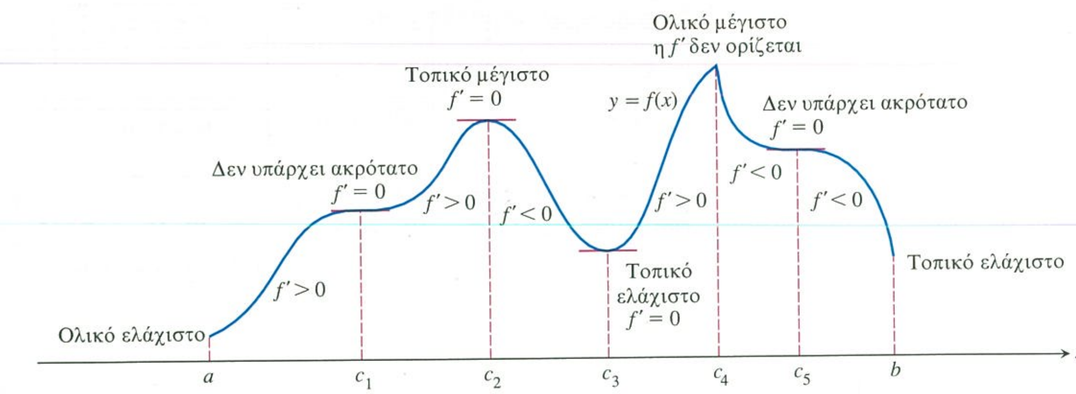
Σχήμα 3.21 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 12x - 5$. (Παράδειγμα 1)

Γνωρίζοντας σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα ή φθίνουσα μια συνάρτηση, μπορούμε να διερευνήσουμε τη φύση των τοπικών της ακροτάτων.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Στο Σχήμα 3.22, παρατηρούμε ότι στα σημεία ελαχίστων της f, είναι $f' < 0$ αμέσως πριν και $f' > 0$ αμέσως μετά το εκάστοτε σημείο ελαχίστου. (Αν πρόκειται για άκρο του διαστήματος, η πρόταση αυτή ισχύει προφανώς για τη μία μόνο πλευρά του σημείου.) Έτσι, η καμπύλη κατέρχεται (φθίνουσα) στα αριστερά του σημείου ελαχίστου και ανέρχεται (αύξουσα) στα δεξιά. Ομοίως, στα σημεία μεγίστων της f, $f' > 0$ αμέσως πριν και $f' < 0$ αμέσως μετά. Έτσι, η καμπύλη ανέρχεται (αύξουσα) στα αριστερά του σημείου μεγίστου και κατέρχεται (φθίνουσα) στα δεξιά.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Edmund Halley
(1656 -1742)



Σχήμα 3.22 Η πρώτη παράγωγος μιας συναρτήσεως μας πληροφορεί αν, και πόσο απότομα, ανέρχεται ή κατέρχεται η γραφική της παράσταση.

Οι παρατηρήσεις αυτές μάς οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου κριτηρίου για την ύπαρξη και τη φύση των τοπικών ακροτάτων διαφορίσιμων συναρτήσεων.

> **Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα**
> Σε ένα κρίσιμο σημείο $x = c$,
>
> **1.** η f εμφανίζει *τοπικό ελάχιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από αρνητική σε θετική
>
> **2.** η f εμφανίζει *τοπικό μέγιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από θετική σε αρνητική
>
> **3.** η f δεν εμφανίζει *τοπικό ακρότατο* αν η f' έχει το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του c.

Το κριτήριο για την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου σε άκρο του πεδίου ορισμού είναι παρόμοιο, με τη διαφορά ότι εκεί υπάρχει μόνο μία πλευρά προς εξέταση.

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

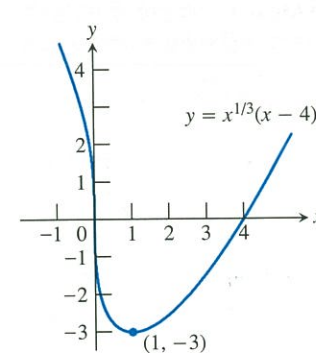
Εντοπίστε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συναρτήσεως.

Λύση Η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε x (Σχήμα 3.23). Η πρώτη παράγωγος

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

μηδενίζεται στο $x = 1$ και δεν ορίζεται στο $x = 0$. Δεν υπάρχουν άκρα του πεδίου ορισμού, συνεπώς τα κρίσιμα σημεία $x = 0$ και $x = 1$ είναι οι μόνοι υποψήφιοι για ύπαρξη ακροτάτων.

Τα κρίσιμα σημεία διαμερίζουν τον άξονα x σε διαστήματα θετικών και αρνητικών τιμών της f'. Το «τοπίο» των προσήμων της f' μας πληροφορεί για τη συμπεριφορά της f μεταξύ των κρίσιμων σημείων, αλλά και στα ίδια τα σημεία αυτά. Τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να τις παραστήσουμε ως εξής:



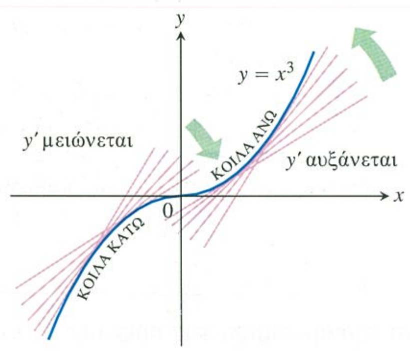
Σχήμα 3.23 Η γραφική παράσταση της $y = x^{1/3}(x - 4)$. (Παράδειγμα 2)

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Πρόσημο της f'	$-$	$-$	$+$
Συμπεριφορά της f	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3 του θεωρήματος μέσης τιμής, η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -0)$, φθίνουσα στο $(0, 1)$, και αύξουσα στο $(1, \infty)$. Σύμφωνα με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η f δεν εμφανίζει ακρότατο στο $x = 0$ (αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκεί), αλλά εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ (όπου η f' από αρνητική γίνεται θετική).

Το τοπικό ελάχιστο είναι $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$. Πρόκειται και για ολικό ελάχιστο, αφού παντού στα αριστερά του σημείου αυτού η τιμή της συναρτήσεως μειώνεται, ενώ παντού στα δεξιά αυξάνεται. Το Σχήμα 3.23 δείχνει τι συμβαίνει.

Πώς μπορούμε να ξέρουμε πώς κάμπτεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως $y = f(x)$; Η πληροφορία που ζητούμε περιέχεται στην y', αλλά πώς τη βρίσκουμε; Η απάντηση είναι να παραγωγίσουμε την y' (για συναρτήσεις που είναι διπλά διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους με εξαίρεση, ενδεχομένως, κάποια μεμονωμένα σημεία του). Η συνδυασμένη γνώση των y' και y'' μας αποκαλύπτει το σχήμα του γραφήματος της συνάρτησης. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς να σχεδιάζουμε πρόχειρα (αλλά ποιοτικώς σωστά) τις λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων.



Σχημα 3.24 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0)$ ενώ στο $(0, \infty)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Κοιλότητα

Καθώς βλέπετε στο Σχήμα 3.24, η συνάρτηση $y = x^3$ ανέρχεται καθώς το x αυξάνει, αλλά τα τμήματα της καμπύλης που ορίζονται στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, \infty)$ έχουν *καμφθεί* αντίθετα. Αν εξετάσουμε τις εφαπτομένες από αριστερά προς τα δεξιά, θα δούμε ότι η κλίση y' της καμπύλης μειώνεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και κατόπιν αυξάνεται στο $(0, \infty)$. Η καμπύλη $y = x^3$ *στρέφει τα κοίλα κάτω* στο $(-\infty, 0)$, ενώ στο $(0, \infty)$ *στρέφει τα κοίλα άνω*. Η καμπύλη κείται κάτω από τις εφαπτομένες της όταν στρέφει τα κοίλα κάτω, ενώ το αντίθετο συμβαίνει όταν στρέφει τα κοίλα άνω.

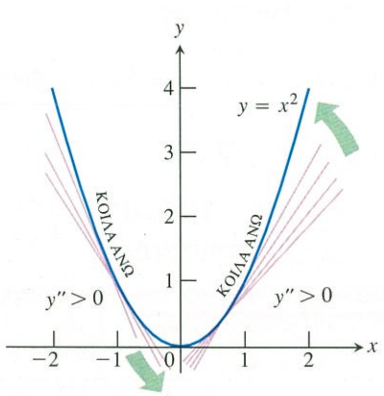
Ορισμός Κοιλότητα

Η γραφική παράσταση της διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ στρέφει

(α) τα κοίλα άνω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η y' είναι αύξουσα στο I

(β) τα κοίλα κάτω σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η y' είναι φθίνουσα στο I.

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο, τότε η y' είναι αύξουσα για $y'' > 0$ και φθίνουσα για $y'' < 0$.



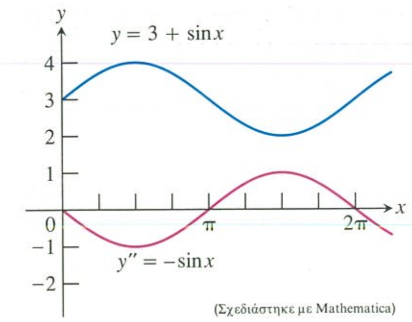
Σχημα 3.25 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ στρέφει παντού τα κοίλα άνω.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για κοιλότητα

Η γραφική παράσταση μιας διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ στρέφει

(α) τα κοίλα άνω σε κάθε διάστημα όπου $y'' > 0$

(β) τα κοίλα κάτω σε κάθε διάστημα όπου $y'' < 0$.



Σχημα 3.26 Χρήση της γραφικής παράστασης της y'' για να προσδιοριστεί η κοιλότητα της y. (Παράδειγμα 4)

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του κριτηρίου κοιλότητας

Η καμπύλη $y = x^2$ (Σχήμα 3.25) στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, \infty)$ εφόσον η δεύτερη της παράγωγος $y'' = 2$ είναι πάντα θετική.

Παράδειγμα 4 Προσδιορισμός των κοίλων

Προσδιορίστε την κοιλότητα της $y = 3 + \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση Η γραφική παράσταση της $y = 3 + \sin x$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, \pi)$, όπου η $y'' = -\sin x$ είναι αρνητική. Στο $(\pi, 2\pi)$, όπου η $y'' = -\sin x$ γίνεται θετική, στρέφει τα κοίλα άνω (Σχήμα 3.26).

Σημεία καμπής

Η καμπύλη $y = 3 + \sin x$ του Παραδείγματος 4 αλλάζει κοιλότητα στο σημείο $(\pi, 3)$. Καλούμε το $(\pi, 3)$ *σημείο καμπής* της καμπύλης.

Ορισμός Σημείο καμπής

Ένα σημείο της γραφικής παραστάσεως όπου υπάρχει εφαπτομένη και όπου αλλάζει η κοιλότητα της συναρτήσεως καλείται **σημείο καμπής.**

Ένα σημείο μιας καμπύλης εκατέρωθεν του οποίου η y'' αλλάζει πρόσημο, είναι σημείο καμπής. Στο ίδιο το σημείο αυτό, η y'' είτε μηδενίζεται (λόγω της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής της παραγώγου) είτε δεν ορίζεται. Αν η y είναι διπλά διαφορίσιμη, τότε $y'' = 0$ στο σημείο καμπής και η y' εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Πολλές φορές, στη μελέτη της ευθύγραμμης κίνησης, θέλουμε να ξέρουμε πότε είναι θετική και πότε αρνητική η επιτάχυνση (η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσεως). Τα σημεία καμπής του γραφήματος της συνάρτησης θέσεως μας αποκαλύπτουν πού αλλάζει πρόσημο η επιτάχυνση.

Παράδειγμα 5 Μελέτη ευθύγραμμης κίνησης

Σωματίδιο που κινείται σε οριζόντια ευθεία έχει συνάρτηση θέσεως την

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0.$$

Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση, και να περιγραφεί η κίνηση του σωματιδίου.

Λύση Η ταχύτητα είναι

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

ενώ η επιτάχυνση είναι

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Όταν η συνάρτηση $s(t)$ είναι αύξουσα, το σώμα κινείται προς τα δεξιά· όταν η $s(t)$ είναι φθίνουσα, η κίνηση γίνεται προς τα αριστερά.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ($v = s'$) μηδενίζεται για $t = 1$ και $t = 11/3$.

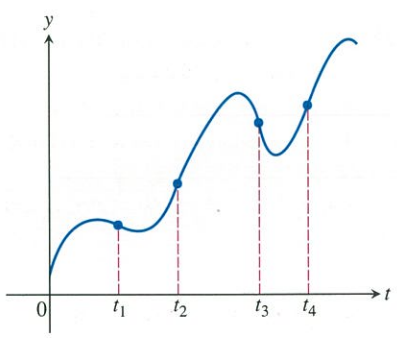
Διάστημα	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Πρόσημο $v = s'$	$+$	$-$	$+$
Συμπεριφορά s	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα
Κίνηση	δεξιά	αριστερή	δεξιά

Το σώμα κινείται προς τα δεξιά στα χρονικά διαστήματα $[0,\ 1)$ και $(11/3,\ \infty)$, και προς τα αριστερά στο διάστημα $(1,\ 11/3)$.

Η επιτάχυνση $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ μηδενίζεται για $t = 7/3$.

Διάστημα	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Πρόσημο $a = s''$	$-$	$+$
Γράφημα s	κοίλα κάτω	κοίλα άνω

Η επιταχύνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα αριστερά στο χρονικό διάστημα $[0,\ 7/3)$, μηδενίζεται προς στιγμήν για $t = 7/3$, και εφεξής κατευθύνεται προς τα δεξιά.



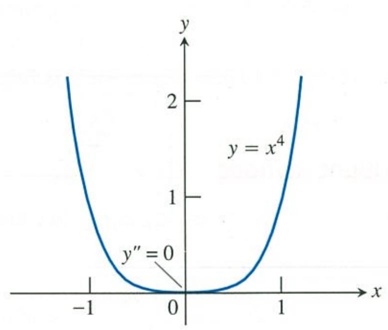
Σχημα 3.27 Μια υποθετική διακύμανση του δείκτη Dow Jones από το Παράδειγμα 6.

Παράδειγμα 6 Σημεία καμπής και χρηματιστήριο

Η γραφική παράσταση στο Σχήμα 3.27 δείχνει μια υποθετική διακύμανση του δείκτη Dow Jones του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης. Ο δείκτης αυτός περιγράφει τη συνολική κίνηση της χρηματαγοράς, καθώς και τις επιμέρους αυξομειώσεις.

Μπορεί κανείς να επενδύσει στο χρηματιστήριο αγοράζοντας μετοχές κάποιου ομίλου, και να παρακολουθεί κατόπιν τον δείκτη αξίας των συγκεκριμένων μετοχών. Ο σκοπός ενός επενδυτή είναι να αγοράσει φτηνά (σε τοπικό ελάχιστο) και να πουλήσει ακριβά (σε τοπικό μέγιστο). Βέβαια, η επίτευξη τέτοιου συγχρονισμού είναι ανέφικτη, αφού είναι αδύνατον να προβλέψει κανείς τις ακρότατες τιμές της αγοράς. Μόλις συνειδητοποιήσει ο επενδυτής ότι η αξία μιας μετοχής όντως αυξάνεται, το ελάχιστο έχει πια παρέλθει.

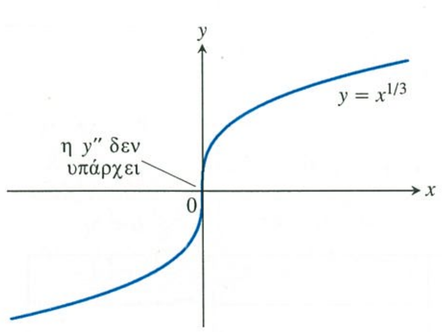
Εξετάζοντας τα σημεία καμπής, ο επενδυτής μπορεί να προβλέψει μια τάση αντιστροφής της αξίας της μετοχής πριν αυτή εκδηλωθεί, για τον λόγο ότι τα σημεία καμπής υποδεικνύουν μεταβολές θεμελιώδους χαρακτήρα στον *ρυθμό μεταβολής* μιας συναρτήσεως. Αγοράζοντας σε σημείο καμπής (ή κοντά σε αυτό) ο αγοραστής ποντάρει σε μια μακροπρόθεσμα αύξουσα τάση της αξίας μιας μετοχής. Με αυτόν τον τρόπο ο επενδυτής αμβλύνει τις επιπτώσεις από σποραδικές διακυμάνσεις της αξίας της μετοχής, και, μακροπρόθεσμα, κερδίζει από την αύξουσα τάση την οποία προέβλεψε.



Σχημα 3.28 Η γραφική παράσταση της $y = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στην αρχή, παρά το ότι $y'' = 0$ εκεί.

Παράδειγμα 7 Ένα σημείο όπου $y'' = 0$ δεν είναι πάντοτε σημείο καμπής

Η καμπύλη $y = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x = 0$ (Σχήμα 3.28). Η $y'' = 12x^2$ μηδενίζεται εκεί, όμως δεν αλλάζει πρόσημο.



Σχημα 3.29 Ένα σημείο όπου η y'' δεν υπάρχει μπορεί να είναι σημείο καμπής.

Παράδειγμα 8 Υπάρχουν σημεία καμπής όπου η y'' δεν υπάρχει

Η καμπύλη $y = x^{1/3}$ έχει σημείο καμπής στο $x = 0$ (Σχήμα 3.29), παρά το ότι η y'' δεν υπάρχει εκεί.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Βλέπουμε από το Παράδειγμα 7 ότι μια μηδενιζόμενη δεύτερη παράγωγος δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη σημείου καμπής. Από το Παράδειγμα 8 βλέπουμε ότι σημεία καμπής μπορούν να προκύψουν ακόμη και όταν *δεν* υπάρχει δεύτερη παράγωγος.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αντί να ερευνούμε για αλλαγές προσήμου της y' στα κρίσιμα σημεία, μπορούμε ενίοτε να χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο για να προσδιορίζουμε την ύπαρξη και τον χαρακτήρα των τοπικών ακροτάτων.

Θεώρημα 5 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

1. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$, τότε η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$.

2. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$, τότε η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$.

Το κριτήριο απαιτεί γνώση της f'' *μόνο στο σημείο* c και όχι σε κάποια περιοχή γύρω από το c. Αυτό απλοποιεί τα πράγματα. Από την άλλη, το κριτήριο δεν εφαρμόζεται αν $f''(c) = 0$ ή αν η $f''(c)$ δεν υπάρχει. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αναγκαστικά θα στραφούμε στο κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα.

Στο Παράδειγμα 9, εφαρμόζουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου στη συνάρτηση του Παραδείγματος 1.

Παράδειγμα 9 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

Λύση Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$f''(x) = 6x.$$

Ελέγχουμε τα κρίσιμα σημεία $x = \pm 2$ για ύπαρξη ακροτάτων (άκρα του πεδίου ορισμού δεν υπάρχουν), οπότε

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{ η } f \text{ έχει τοπικό μέγιστο στο } x = -2$$

και

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow \text{ η } f \text{ έχει τοπικό ελάχιστο στο } x = 2.$$

Παράδειγμα 10 Χρησιμοποιώντας τις f' και f'' για τη σχεδίαση της f

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

ακολουθώντας τα ακόλουθα βήματα.

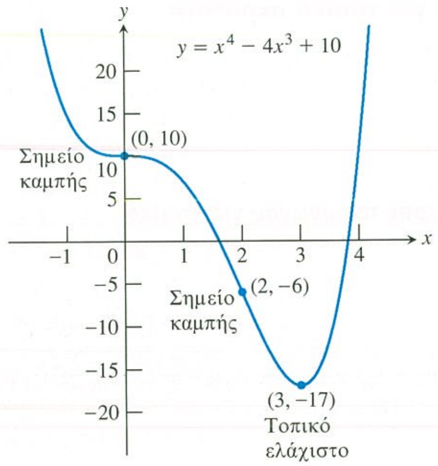
(α) Προσδιορίστε τα ακρότατα της f.

(β) Βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

(γ) Βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω.

(δ) Σχεδιάστε με μολύβι και χαρτί ένα εύλογο γράφημα για την f.

Λύση Η f είναι συνεχής εφόσον η $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ υπάρχει. Πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty,\ \infty)$, το οποίο συνεπώς είναι και πεδίο ορισμού της f'. Έτσι η f θα έχει κρίσιμα σημεία μόνο σε σημεία μηδενισμού της f'. Εφόσον



Σχημα 3.30 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. (Παράδειγμα 10)

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),$$

η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο $x = 0$ και στο $x = 3$.

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Πρόσημο f'	$-$	$-$	$+$
Συμπεριφορά f	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα

(α) Εφαρμόζοντας το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα και συμβουλευόμενοι τον παραπάνω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ακρότατο στο $x = 0$, ενώ στο $x = 3$ υπάρχει τοπικό ελάχιστο.

(β) Συμβουλευόμενοι τον παραπάνω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι η f είναι φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, 3]$, και αύξουσα στο $[3, \infty)$.

(γ) Η $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ μηδενίζεται στο $x = 0$ και στο $x = 2$.

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Πρόσημο f''	$+$	$-$	$+$
Συμπεριφορά f	κοίλα άνω	κοίλα κάτω	κοίλα άνω

Συμπεραίνουμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, \infty)$, ενώ στο $(0, 2)$ στρέφει τα κοίλα κάτω.

(δ) Συνοψίζοντας τους δύο παραπάνω πίνακες, παίρνουμε

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
φθίνουσα	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα
κοίλα άνω	κοίλα κάτω	κοίλα άνω	κοίλα άνω

Στο Σχήμα 3.30 φαίνεται η γραφική παράσταση της f.

Τα βήματα που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 10 αποτελούν μια γενικότερη διαδικασία σχεδίασης με το χέρι.

Διαδικασία σχεδίασης της $y = f(x)$ με μολύβι και χαρτί

Βήμα 1. Βρίσκουμε τις y' και y''.

Βήμα 2. Βρίσκουμε πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η καμπύλη.

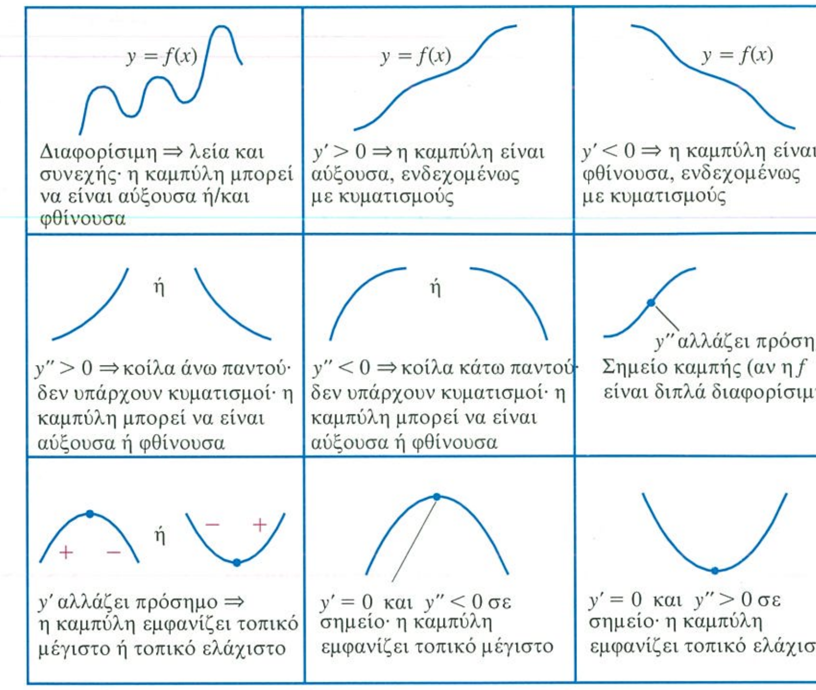
Βήμα 3. Προσδιορίζουμε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη.

Βήμα 4. Συνοψίζουμε.

Βήμα 5. Τοποθετούμε μερικά χαρακτηριστικά σημεία στο σχήμα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από αυτά.

Τι μπορούμε να μάθουμε για μια συνάρτηση από την παράγωγό της

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 10, μπορούμε να μάθουμε σχεδόν ό,τι θέλουμε για μια διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$ εξετάζοντας την πρώτη της παράγωγο. Μπορούμε να βρούμε πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η γραφική της παράσταση, και πού εμφανίζονται τοπικά ακρότατα. Μπορούμε να μάθουμε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη, αν παραγωγίσουμε την y'. Μπορούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε το σχήμα της γραφικής παραστάσεως. Η μόνη πληροφορία που δεν μπορούμε να εξαγάγουμε από την παράγωγο είναι πού ακριβώς να τοποθετήσουμε τη γραφική παράσταση στο επίπεδο xy. Όπως όμως είδαμε στην Ενότητα 3.2, η μόνη περαιτέρω πληροφορία που χρειαζόμαστε γι' αυτό είναι η τιμή της f σε ένα σημείο.

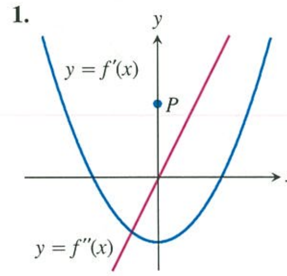


ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.3

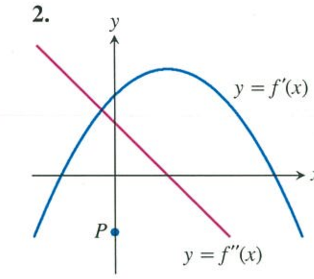
Πρόχειρη σχεδίαση (με μολύβι και χαρτί) της y βάσει γραφημάτων των y' και y''

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-4 δίδονται τα γραφήματα της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Μεταφέρετε στο χαρτί τα γραφήματα και προσθέστε σε αυτά ένα προσεγγιστικό γράφημα της f, δεδομένου ότι το γράφημα αυτό διέρχεται από το σημείο P.

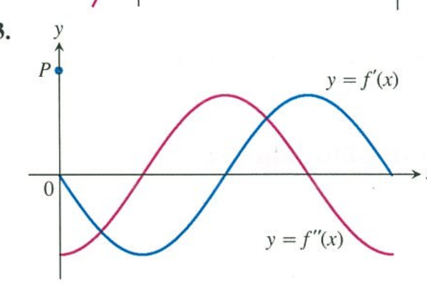
1.



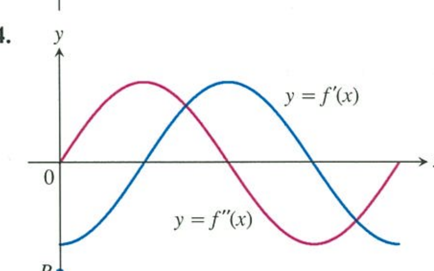
2.



3.



4.



Πρόχειρη σχεδίαση της y όταν γνωρίζουμε τα πρόσημα των y' και y''

5. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Καταγράψτε στο σχήμα σας τις συντεταγμένες όσων σημείων μπορείτε.

x	y	**Παράγωγοι**
$x < 2$		$y' < 0,\quad y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\quad y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' < 0,\quad y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\quad y'' < 0$

6. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(2, 2)$, της οποίας η πρώτη και δεύτερη παράγωγος εμφανίζουν τις ακόλουθες εναλλαγές προσήμων αντίστοιχα:

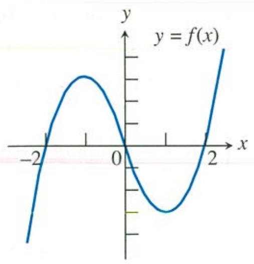
y': $+$ | -2 | $-$ | 0 | $+$ | 2 | $-$

y'': $-$ | -1 | $+$ | 1 | $-$

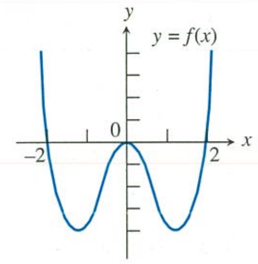
Χρήση γραφικών παραστάσεων για μελέτη συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 7 και 8, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της f για να εκτιμήσετε σε ποια σημεία ή διαστήματα **(α)** η f' και **(β)** η f'' είναι 0, θετική, ή αρνητική.

7.

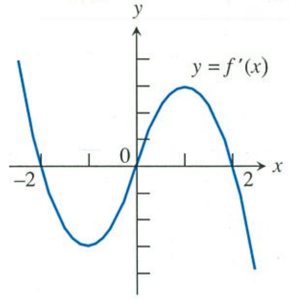


8.

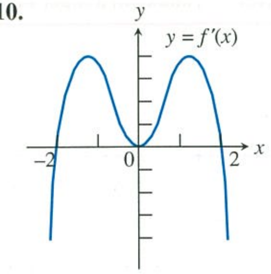


Στις Ασκήσεις 9-12, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της f' για να εκτιμήσετε σε ποια διαστήματα η f είναι **(α)** αύξουσα ή **(β)** φθίνουσα. **(γ)** Επίσης εκτιμήστε τα σημεία τοπικών ακροτάτων της f.

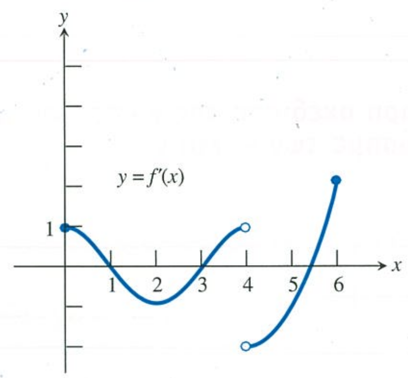
9.



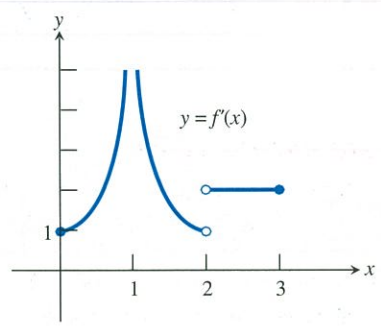
10.



11. Το πεδίο ορισμού της f' είναι $[0, 4) \cup (4, 6]$.



12. Το πεδίο ορισμού της f' είναι $[0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3]$.



Μελέτη της f όταν γνωρίζουμε την f'

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, αναφορικά με τις συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι δίδονται στις Ασκήσεις 13-16.

(α) Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f;

(β) Σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα η f και σε ποια φθίνουσα;

(γ) Σε ποια σημεία (αν υπάρχουν) εμφανίζει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα η f;

13. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$

14. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

15. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

16. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$

Σχήμα γραφικής παραστάσεως

Στις Ασκήσεις 17-22, εφαρμόστε αναλυτικές μεθόδους για να βρείτε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση

(α) είναι αύξουσα

(β) είναι φθίνουσα

(γ) στρέφει τα κοίλα άνω

(δ) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Κατόπιν εντοπίστε και χαρακτηρίστε τα όποια

(ε) τοπικά ακρότατα

(στ) σημεία καμπής.

17. $y = x^2 - x - 1$

18. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

19. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

20. $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

21. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

22. $y = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Τ Στις Ασκήσεις 23-32, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση για να βρείτε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση

(α) είναι αύξουσα

(β) είναι φθίνουσα

(γ) στρέφει τα κοίλα άνω

(δ) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Κατόπιν εντοπίστε και χαρακτηρίστε τα όποια

(ε) τοπικά ακρότατα

(στ) σημεία καμπής.

23. $y = 4x^3 + 21x^2 + 36x - 20$

24. $y = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$

25. $y = 2x^{1/5} + 3$

26. $y = 5 - x^{1/3}$

27. $y = x^{1/3}(x - 4)$

28. $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$

29. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x - 2}$

30. $y = x^{3/4}(5 - x)$

31. $y = x^{1/4}(x + 3)$

32. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Ακρότατα και σημεία καμπής

Στις Ασκήσεις 33 και 34, χρησιμοποιήστε την παράγωγο της συναρτήσεως $y = f(x)$ για να βρείτε τα σημεία όπου η f εμφανίζει

(α) τοπικό μέγιστο

(β) τοπικό ελάχιστο

(γ) σημείο καμπής.

33. $y' = (x - 1)^2(x - 2)$

34. $y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$

Στις Ασκήσεις 35 και 36, *εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

(α) Βρείτε πού εμφανίζονται και ποια είναι τα ολικά ακρότατα της f.

(β) Βρείτε όποια σημεία καμπής υπάρχουν.

(γ) Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση της f.

35. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2	3
f	0	2	0	−2
f'	3	0	δεν υπάρχει	−3
f''	0	−1	δεν υπάρχει	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	−
f'	+	−	−
f''	−	−	−

36. Η f είναι άρτια και συνεχής στο $[-3, 3]$, και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2
f	2	0	−1
f'	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει
f''	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	−	−
f'	−	−	+
f''	+	−	−

Τ Στις Ασκήσεις 37-40, βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) του γραφήματος της συνάρτησης, καθώς και τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα. Κατόπιν σχεδιάστε τη συνάρτηση σε αρκετά μεγάλη περιοχή ώστε να φαίνονται ταυτόχρονα όλα αυτά τα σημεία. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των σημείων τομής των γραφημάτων αυτών με τον άξονα x, και του γραφήματος της συναρτήσεως; Ποιες άλλες σχέσεις συνδέουν τα γραφήματα των παραγώγων με το γράφημα της συναρτήσεως;

37. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

38. $y = x^3 - 12x^2$

39. $y = \dfrac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

40. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

Τ 41. Σχεδιάστε την $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ σε κοινό σχήμα με την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγό της. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές των f' και f''.

Τ 42. Σχεδιάστε την $f(x) = x \cos x$ σε κοινό σχήμα με τη δεύτερη παράγωγό της στο $0 \leq x \leq 2\pi$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές της f''.

Ευθύγραμμη κίνηση

Στις Ασκήσεις 43-46, σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με συνάρτηση θέσεως $s(t)$. Αφού βρείτε **(α)** την ταχύτητα και **(β)** την επιτάχυνση του σωματιδίου, **(γ)** περιγράψτε την κίνησή του για $t \geq 0$.

43. $s(t) = t^2 - 4t + 3$

44. $s(t) = 6 - 2t - t^2$

45. $s(t) = t^3 - 3t + 3$

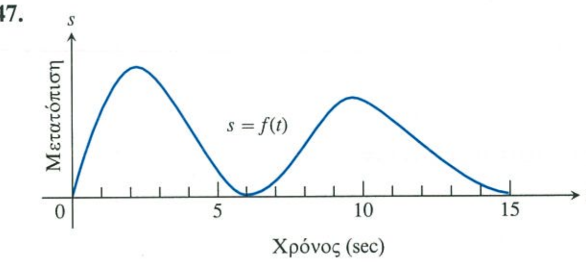
46. $s(t) = 3t^2 - 2t^3$

Στις Ασκήσεις 47 και 48, δίδεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως θέσεως $y = s(t)$ σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα. Περίπου σε ποιες χρονικές στιγμές

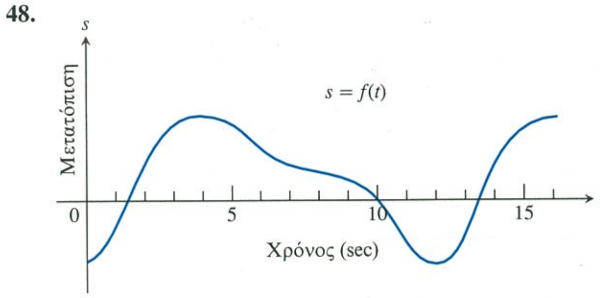
(α) μηδενίζεται η ταχύτητά του;

(β) μηδενίζεται η επιτάχυνσή του;

47.



48.



Θεωρία και παραδείγματα

49. *Μάθετε γράφοντας* Αν η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και $f'(c) = 0$ σε σημείο c εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε η f θα εμφανίζει υποχρεωτικά τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $x = c$; Εξηγήστε.

50. *Μάθετε γράφοντας* Αν η $f(x)$ είναι διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση και $f''(c) = 0$ σε σημείο c εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε η f θα έχει υποχρεωτικά σημείο καμπής στο $x = c$; Εξηγήστε.

51. *f και f'* Σχεδιάστε μια λεία καμπύλη $y = f(x)$ που να διέρχεται από την αρχή και να έχει τις εξής ιδιότητες: $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και $f'(x) > 0$ για $x > 0$.

52. *f και f''* Σχεδιάστε μια λεία καμπύλη $y = f(x)$ που να διέρχεται από την αρχή και να έχει τις εξής ιδιότητες: $f''(x) < 0$ για $x < 0$ και $f''(x) > 0$ για $x > 0$.

53. *f, f', και f''* Σχεδιάστε μια συνεχή καμπύλη $y = f(x)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Καταγράψτε στο σχήμα τις συντεταγμένες όσων σημείων σάς είναι δυνατόν.

$f(-2) = 8$,	$f'(x) > 0$ για $\|x\| > 2$
$f(0) = 4$,	$f'(x) < 0$ για $\|x\| < 2$
$f'(2) = 0$,	$f''(x) < 0$ για $x < 0$
$f'(2) = f(-2) = 0$,	$f''(x) > 0$ για $x > 0$

54. *Μάθετε γράφοντας: Οριζόντιες εφαπτομένες* Έχει η καμπύλη $y = x^2 + 3 \sin 2x$ οριζόντια εφαπτομένη κοντά στο $x = -3$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

55. *Μάθετε γράφοντας* Για $x > 0$, σχεδιάστε μια καμπύλη $y = f(x)$ για την οποία $f(1) = 0$ και $f'(x) = 1/x$. Μπορείτε να συμπεράνετε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

56. *Μάθετε γράφοντας* Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το γράφημα της $y = f(x)$ της οποίας η δεύτερη παράγωγος είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται ποτέ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

57. *Καμπύλες δευτέρου βαθμού* Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα σημεία καμπής μιας καμπύλης δευτέρου βαθμού $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

58. *Καμπύλες τρίτου βαθμού* Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα σημεία καμπής μιας καμπύλης τρίτου βαθμού $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απαρίθμηση ριζών

Όταν επιλύουμε αριθμητικά (υπολογιστικά) την εξίσωση $f(x) = 0$, θέλουμε συνήθως να ξέρουμε πόσες λύσεις υπάρχουν σε δοσμένο διάστημα. Μερικές φορές το Πόρισμα 3 μας δίνει την απάντηση.

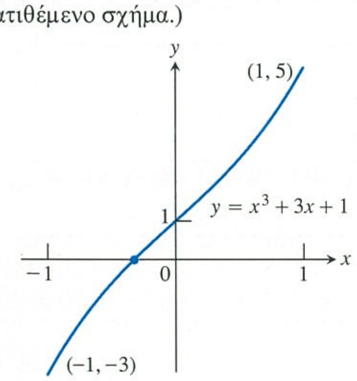
Έστω ότι

i. η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b)

ii. οι $f(a)$ και $f(b)$ έχουν αντίθετο πρόσημο

iii. $f' > 0$ στο (a, b) ή $f' < 0$ στο (a, b).

Αν τα παραπάνω ισχύουν, η f θα έχει ακριβώς μια ρίζα μεταξύ των a και b: Δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες, εφόσον είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο $[a, b]$. Ωστόσο, βάσει του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής (Ενότητα 1.4), θα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^3 + 3x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[-1, 1]$ διότι η f είναι διαφορίσιμη στο $[-1, 1]$, η $f(-1) = -3$ έχει αντίθετο πρόσημο με την $f(1) = 5$, και $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ και κάθε x. (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.)



Δείξτε ότι οι συναρτήσεις στις Ασκήσεις 59-62 έχουν ακριβώς μια ρίζα στο αναγραφόμενο διάστημα.

59. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

60. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

61. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

62. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

63. *Μάθετε γράφοντας: Μια οικογένεια συναρτήσεων τρίτου βαθμού*

(α) Σε ενιαίο σχήμα στον υπολογιστή σας, σχεδιάστε την $f(x) = x^3 + kx$ για $k = 0$ καθώς και για γειτονικές (θετικές και αρνητικές) τιμές του k. Πώς φαίνεται να επηρεάζει τη γραφική παράσταση η τιμή του k;

(β) Βρείτε την $f'(x)$. Όπως βλέπετε, η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x. Βρείτε τη διακρίνουσα (η διακρίνουσα του τριωνύμου $ax^2 + bx + c$ είναι $b^2 - 4ac$). Για ποιες τιμές του k γίνεται η διακρίνουσα θετική, μηδέν, και αρνητική αντίστοιχα; Για ποιες τιμές του k αποκτά δύο, μία, και καμία ρίζα αντίστοιχα η f'; Τώρα είστε σε θέση να εξηγήσετε πώς επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f η τιμή του k.

(γ) Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του k. Τι φαίνεται να συμβαίνει καθώς $k \to -\infty$; Καθώς $k \to \infty$;

64. *Μάθετε γράφοντας: Μια οικογένεια συναρτήσεων τετάρτου βαθμού*

(α) Σε ενιαίο σχήμα στον υπολογιστή σας, σχεδιάστε την $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$, $-1 \le x \le 4$ για $k = -4$, καθώς και για γειτονικές τιμές του k. Πώς φαίνεται να επηρεάζει τη γραφική παράσταση η τιμή του k;

(β) Βρείτε την $f''(x)$. Όπως βλέπετε, η $f''(x)$ είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού του x. Βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού (δείτε την Άσκηση 63β). Για ποιες τιμές του k γίνεται η διακρίνουσα θετική, μηδέν, και αρνητική αντίστοιχα; Για ποιες τιμές του k αποκτά δύο, μία, και καμία ρίζα αντίστοιχα η $f''(x)$; Τώρα είστε σε θέση να εξηγήσετε πώς επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f η τιμή του k.

Στις Ασκήσεις 65 και 66, χρησιμοποιήστε υπολογιστή.

65. *Λογιστικές συναρτήσεις* Έστω $f(x) = c/(1 + ae^{-bx})$ με $a > 0$, $abc \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ αν $abc > 0$ και φθίνουσα αν $abc < 0$.

(β) Δείξτε ότι το σημείο καμπής της f προκύπτει για $x = (\ln a)/b$.

66. *Πολυωνυμικές συναρτήσεις τετάρτου βαθμού* Έστω $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ με $a \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει 0 ή 2 σημεία καμπής.

(β) Γράψτε μια συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι συντελεστές αν το γράφημα της f έχει 0 ή 2 σημεία καμπής, αντίστοιχα.

3.4 Γραφική επίλυση αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων

Τιμές ισορροπίας και ευθείες φάσεων • Ευσταθής και ασταθής ισορροπία • Φαινόμενα ψύξης σώματος, πτώσης με αντίσταση αέρα, και λογιστικής αύξησης

Είδαμε πώς οι παράγωγοι μιας συναρτήσεως καθορίζουν το σχήμα της γραφικής παραστάσεως. Μπορούμε να εκμεταλλευθούμε τη γνώση μας αυτή προκειμένου να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις με γραφικές μεθόδους. Οι έννοιες που θα μας χρειαστούν κατ' αρχάς είναι η *ευθεία φάσεων* και η *τιμή ισορροπίας*. Οι έννοιες αυτές προκύπτουν αν εξετάσουμε από μια νέα οπτική γωνία τη συμπεριφορά διαφορίσιμων συναρτήσεων με μηδενιζόμενη παράγωγο.

Τιμές ισορροπίας και ευθείες φάσεων

Είδαμε ώς τώρα ότι τα κρίσιμα σημεία μάς επιτρέπουν να προσδιορίζουμε τη συμπεριφορά μιας συναρτήσεως και να βρίσκουμε τα ακρότατα σημεία της. Ας διερευνήσουμε τώρα από άλλη σκοπιά την περίπτωση στην οποία η παράγωγος μιας συναρτήσεως μηδενίζεται. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση που η παράγωγος dy/dx είναι συνάρτηση μόνο του y (της εξαρτημένης μεταβλητής). Για παράδειγμα, με έμμεση παραγώγιση της εξίσωσης

$$y^2 = x + 1$$

παίρνουμε

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{δηλαδή} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Μια διαφορική εξίσωση όπου η dy/dx είναι μόνο συνάρτηση του y καλείται **αυτόνομη.**

Ορισμός Τιμές ισορροπίας ή σημεία ηρεμίας

Αν η $dy/dx = g(y)$ είναι μια αυτόνομη διαφορική εξίσωση, τότε οι τιμές της y όπου $dy/dx = 0$ καλούνται **τιμές ισορροπίας** ή **σημεία ηρεμίας.**

Έτσι, σε κατάλληλη περιοχή γύρω από μια τιμή ισορροπίας η εξαρτημένη μεταβλητή δεν μεταβάλλεται, δηλαδή η y βρίσκεται σε *ηρεμία*. Η έμφαση έχει δοθεί εδώ στην τιμή του y για την οποία είναι $dy/dx = 0$, και όχι στην αντίστοιχη τιμή του x, όπως κάναμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1 Εύρεση τιμών ισορροπίας

Οι τιμές ισορροπίας της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-2)$$

είναι $y = -1$ και $y = 2$.

Για να κατασκευάσουμε μια γραφική λύση της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης του Παραδείγματος 1, σχεδιάζουμε πρώτα την **ευθεία φάσεων** της εξισώσεως, δηλαδή τοποθετούμε στον άξονα y τις τιμές ισορροπίας και αναγράφουμε τα διαστήματα όπου οι dy/dx και d^2y/dx^2 είναι θετικές ή αρνητικές. Έτσι αναγνωρίζουμε αμέσως πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η λύση, καθώς και πού είναι κοίλες και πού κυρτές οι καμπύλες λύσεων. Με άλλα λόγια, κωδικοποιούμε στην ευθεία φάσεων τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του γραφήματος που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Από αυτά μπορούμε να συμπεράνουμε το σχήμα των καμπυλών λύσεων, χωρίς να πρέπει να βρούμε τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις.

Παράδειγμα 2 Σχεδίαση ευθείας φάσεων και καμπυλών λύσεων

Αφού κατασκευάσετε την ευθεία φάσεων της εξίσωσης

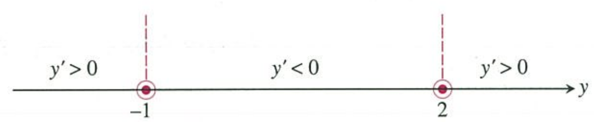
$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(y-2)$$

σχεδιάστε μερικές λύσεις της εξίσωσης αυτής.

Λύση

Βήμα 1. *Σχεδιάζουμε τον άξονα y στον οποίο τοποθετούμε τις τιμές ισορροπίας* $y=-1$ *και* $y=2$, *όπου* $dy/dx=0$.

Βήμα 2. *Εντοπίζουμε τα διαστήματα όπου* $y'>0$ *και* $y'<0$. Το δεύτερο αυτό βήμα μοιάζει με ό,τι κάναμε στην προηγούμενη ενότητα, μόνο που τώρα εργαζόμαστε στον άξονα y αντί στον x.



Η πληροφορία του προσήμου της y' μπορεί να ενσωματωθεί στην ίδια την ευθεία φάσεων. Εφόσον $y'>0$ στα αριστερά του $y=-1$, μια λύση y μικρότερη του -1 θα αυξάνεται όσο πλησιάζει την τιμή $y=-1$. Απεικονίζουμε την πληροφορία αυτή στο αντίστοιχο διάστημα σχεδιάζοντας ένα βέλος που δείχνει προς την τιμή -1.

Ομοίως, $y'<0$ μεταξύ των $y=-1$ και $y=2$, οπότε κάθε λύση εντός του διαστήματος αυτού θα μειώνεται, οδεύοντας προς την τιμή $y=-1$.

Για $y>2$, έχουμε $y'>0$, οπότε κάθε λύση με τιμή y μεγαλύτερη του 2 θα αυξάνεται από κει κι έπειτα απεριόριστα.

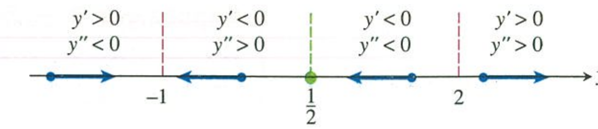
Συνοψίζοντας, καμπύλες λύσεων που κείνται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y=-1$ στο επίπεδο xy, οδεύουν προς το $y=-1$. Καμπύλες που κείνται μεταξύ των ευθειών $y=-1$ και $y=2$ απομακρύνονται από το $y=2$ και οδεύουν προς το $y=-1$. Καμπύλες λύσεων που κείνται πάνω από την ευθεία $y=2$ απομακρύνονται συνεχώς από το $y=2$.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Charles Babbage
(1792-1871)

Βήμα 3. *Υπολογίζουμε την* y'' *και σημειώνουμε τα διαστήματα όπου* $y''>0$ *και* $y''<0$. Για να βρούμε την y'', παραγωγίζουμε την y' *ως προς* x.

$$\begin{aligned} y' &= (y+1)(y-2) = y^2 - y - 2 \\ y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \\ &= (2y-1)y' \\ &= (2y-1)(y+1)(y-2). \end{aligned}$$

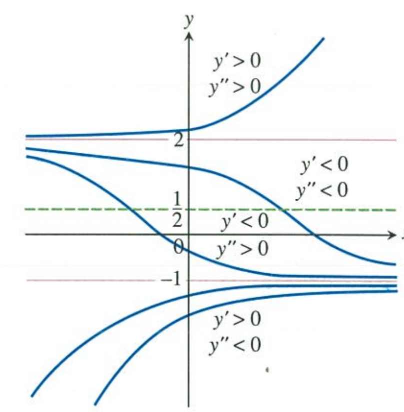
Από την τελευταία έκφραση, βλέπουμε ότι η y'' αλλάζει πρόσημο για $y=-1$, $y=1/2$, και $y=2$. Μεταφέρουμε την πληροφορία αυτή στην ευθεία φάσεων.



Βήμα 4. *Σχεδιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα καμπυλών λύσεων στο επίπεδο xy*. Οι οριζόντιες ευθείες $y=-1$, $y=1/2$, και $y=2$ διαμερίζουν το επίπεδο σε οριζόντιες ζώνες σε καθεμία εκ των οποίων τα πρόσημα των y' και y'' μας είναι γνωστά. Έτσι, σε κάθε ζώνη ξέρουμε αν οι καμπύλες λύσεων είναι αύξουσες ή φθίνουσες καθώς το x αυξάνεται (Σχήμα 3.31).

Οι «ευθείες ισορροπίας» $y=-1$ και $y=2$ είναι επίσης καμπύλες λύσεων. (Οι σταθερές συναρτήσεις $y=-1$ και $y=2$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση.) Όσες καμπύλες λύσεων τέμνονται με την ευθεία $y=1/2$ εμφανίζουν σημείο καμπής στο σημείο τομής. Οι καμπύλες αυτές στρέφουν τα κοίλα κάτω για $y>1/2$, ενώ για $y<1/2$ στρέφουν τα κοίλα άνω.

Όπως είχαμε προβλέψει στο βήμα 2, οι λύσεις που ξεκινούν από τη μεσαία και την κατώτερη οριζόντια ζώνη οδεύουν προς την τιμή ισορροπίας $y=-1$, καθώς αυξάνεται το x. Οι λύσεις στην ανώτερη ζώνη σταδιακά απομακρύνονται από την τιμή $y=2$.



Σχημα 3.31 Γραφικές λύσεις για το Παράδειγμα 2.

Ευσταθής και ασταθής ισορροπία

Ας προσέξουμε για λίγο στο Σχήμα 3.31 τη συμπεριφορά των καμπυλών λύσεων κοντά στις τιμές ισορροπίας. Αν μια καμπύλη λύσεως βρεθεί κοντά στην τιμή $y=-1$, οδεύει σταθερά προς την τιμή αυτή· πρόκειται λοιπόν για **ευσταθή ισορροπία.** Αντιθέτως, κοντά στην τιμή $y=2$ συμβαίνει το αντίθετο: κάθε καμπύλη λύσεως (με εξαίρεση την ίδια την $y=2$) απομακρύνεται από την τιμή αυτή καθώς το x αυξάνεται. Έτσι η τιμή $y=2$ αντιστοιχεί σε **ασταθή ισορροπία.** Αν η λύση έχει εξαρχής την τιμή αυτή, τη διατηρεί, αλλά αν απέχει από αυτήν έστω και ελάχιστα, εν τέλει θα απομακρυνθεί. (Μια τιμή ισορροπίας είναι ασταθής ακόμη και αν η λύση απομακρύνεται από αυτήν μόνο από τη μία της πλευρά.)

Μπορούμε τώρα να αναγνωρίσουμε τη συμπεριφορά αυτή στην ευθεία φάσεων που σχεδιάσαμε παραπάνω. Τα βέλη εκεί απομακρύνονται από την τιμή $y=2$, ενώ αν βρεθούν αριστερά της $y=2$, οδεύουν προς την τιμή $y=-1$.

Φαινόμενα ψύξης σώματος, πτώσης με αντίσταση αέρα, και λογιστικής αύξησης

Η αρχή αυτή καλείται *νόμος ψύξεως του Νεύτωνα* (παρότι εφαρμόζεται εξίσου και για φαινόμενα θέρμανσης).

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, χρησιμοποιούμε μια ευθεία φάσεων για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά ενός φυσικού μοντέλου. Πρώτος ο Isaac Newton διατύπωσε αξιωματικά την πρόταση ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός ψυχόμενου ή θερμαινόμενου σώματος είναι ανάλογος της θερμοκρασιακής διαφοράς μεταξύ του σώματος και του περιβάλλοντος (του μέσου που το περιβάλλει). Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή αυτή για να μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία σωμάτων συναρτήσει του χρόνου.

Παράδειγμα 3 Σούπα που κρυώνει

Πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός πιάτου καυτής σούπας από τη στιγμή που το αφήνουμε στο τραπέζι; Ξέρουμε βέβαια ότι η σούπα θα κρυώσει, αλλά ποια μορφή θα έχει η καμπύλη θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου;

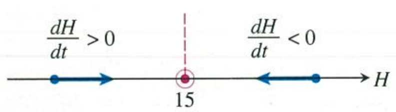
Λύση Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία της σούπας H είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου t, για τον οποίο επιλέγουμε μια κατάλληλη μονάδα –π.χ. min– και μια αρχική τιμή $t = 0$. Υποθέτουμε ακόμη ότι το περιβάλλον μέσον έχει αρκετά μεγάλο όγκο ώστε να μην μεταβάλλεται αισθητά η θερμοκρασία του συνεπεία της θερμότητας που ρέει προς αυτό από τη σούπα.

Έστω 15°C η σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος. Η διαφορά θερμοκρασίας είναι λοιπόν $H(t) - 15$. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, υπάρχει μια σταθερά αναλογίας $k > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

(*μείον* k για να είναι αρνητική η παράγωγος για $H > 15$).

Εφόσον $dH/dt = 0$ για $H = 15$, η θερμοκρασία 15°C είναι τιμή ισορροπίας. Αν $H > 15$, η Εξίσωση (1) μας λέει ότι $(H - 15) > 0$ και $dH/dt < 0$. Αν δηλαδή ένα σώμα είναι θερμότερο του περιβάλλοντος, θα ψυχθεί. Ομοίως, αν $H < 15$, τότε $(H - 15) < 0$ και $dH/dt > 0$. Δηλαδή ένα ψυχρότερο του περιβάλλοντος σώμα θα θερμανθεί. Έτσι, η συμπεριφορά που περιγράφεται από την Εξίσωση (1) συμφωνεί με την εμπειρία μας για τη θερμοκρασία. Οι παρατηρήσεις αυτές έχουν ενσωματωθεί στο αρχικό διάγραμμα φάσεων του Σχήματος 3.32.



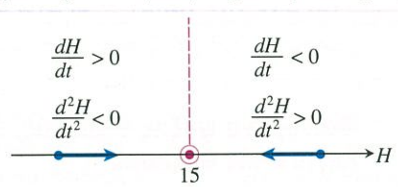
Σχημα 3.32 Το πρώτο στάδιο κατασκευής της ευθείας φάσεων για τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα στο Παράδειγμα 3. Καθώς ο χρόνος περνά, η θερμοκρασία πλησιάζει την τιμή ισορροπίας (τη θερμοκρασία περιβάλλοντος).

Παραγωγίζουμε ως προς t και τα δύο μέλη της Εξίσωσης (1), για να προσδιορίσουμε την κοιλότητα των καμπυλών λύσεων:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

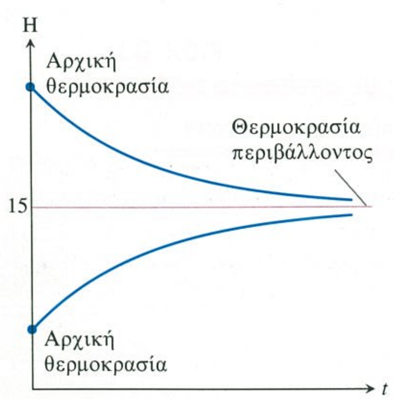
$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

Εφόσον το $-k$ είναι αρνητικό, η ποσότητα d^2H/dt^2 είναι θετική όταν $dH/dt < 0$ και αρνητική όταν $dH/dt > 0$. Η ευθεία φάσεων του Σχήματος 3.33 εμπεριέχει την πληροφορία αυτή.



Σχημα 3.33 Η πλήρης ευθεία φάσεων του Παραδείγματος 3.

Η πλήρης ευθεία φάσεων δείχνει ότι αν η θερμοκρασία ενός σώματος υπερβαίνει την τιμή ισορροπίας 15°C, η καμπύλη $H(t)$ θα είναι φθίνουσα και κυρτή (κοίλα άνω). Αν η θερμοκρασία είναι μικρότερη από 15°C (που είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος), τότε η καμπύλη $H(t)$ θα είναι αύξουσα και κοίλη (κοίλα κάτω). Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε πρόχειρα (αλλά ποιοτικώς σωστά) μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων (Σχήμα 3.34).



Σχημα 3.34 Θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου. Ασχέτως της αρχικής θερμοκρασίας του σώματος, η θερμοκρασία $H(t)$ τείνει να εξισωθεί με 15°C, δηλαδή με τη θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Όπως δείχνει η άνω καμπύλη του Σχήματος 3.34, καθώς το σώμα ψύχεται, ο ρυθμός ψύξεως επιβραδύνεται διότι η ποσότητα dH/dt τείνει στο μηδέν. Η παρατήρηση αυτή υπονοείται βέβαια στον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα και εμπεριέχεται στη διαφορική εξίσωση· ωστόσο η «εξομάλυνση» της καμπύλης για μεγάλο t αποτελεί μια άμεση οπτική αναπαράσταση του φαινομένου. Η ικανότητα να διακρίνετε τη φυσική συμπεριφορά που κωδικοποιεί μια γραφική παράσταση αποτελεί ισχυρό εργαλείο κατανόησης συστημάτων του πραγματικού κόσμου.

Παράδειγμα 4 Ανάλυση της πτώσης σώματος με δύναμη αντίστασης

Τόσο ο Γαλιλαίος όσο και ο Νεύτωνας παρατήρησαν ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κινούμενου σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Εκφρασμένο μαθηματικά, αυτό σημαίνει,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{2}$$

όπου F η δύναμη και m και v η μάζα και η ταχύτητα του σώματος. Αν η μάζα m μεταβάλλεται στον χρόνο, π.χ. αν μελετάμε έναν πύραυλο που καίει καύσιμα, το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (2) γίνεται

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

βάσει του τύπου παραγώγου γινομένου. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, η μάζα είναι σταθερή, $dm/dt = 0$, οπότε η Εξίσωση (2) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{ή} \qquad F = ma, \tag{3}$$

η οποία είναι γνωστή ως ο *δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση*.

Στην ελεύθερη πτώση, η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας συμβολίζεται με g και η μόνη δύναμη που έλκει προς τα κάτω το σώμα είναι η

$$F_p = mg,$$

δηλαδή η δύναμη της βαρύτητας. Αν, όμως, ένα σώμα πέφτει διαμέσου του αέρα –π.χ., ένα κέρμα από μεγάλο ύψος ή ένας αλεξιπτωτιστής από ακόμη μεγαλύτερο ύψος– τότε γνωρίζουμε καλά από την εμπειρία μας ότι από κάποιο σημείο κι έπειτα η αντίσταση του αέρα επηρεάζει την ταχύτητα της πτώσης. Ένα ρεαλιστικότερο μοντέλο της ελεύθερης πτώσης θα περιλαμβάνει λοιπόν την αντίσταση του αέρα, που στο Σχήμα 3.35 αναπαρίσταται ως η δύναμη F_r.

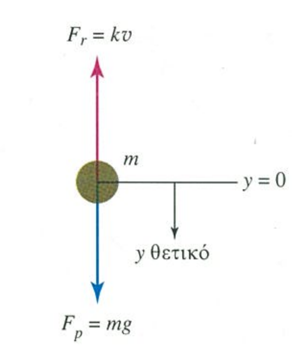
Για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του ήχου, έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η F_r είναι περίπου ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Έτσι, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα που πέφτει είναι

$$F = F_p - F_r,$$

οπότε

$$ma = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{4}$$



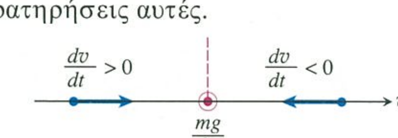
Σχημα 3.35 Σκαρίφημα πτώσης σώματος στο πεδίο βαρύτητας της Γης με αντίσταση που είναι ανάλογη της ταχύτητας.

Μπορούμε να αναλύσουμε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων ταχύτητας που ικανοποιούν τη διαφορική αυτή εξίσωση, κατασκευάζοντας την κατάλληλη ευθεία φάσεων.

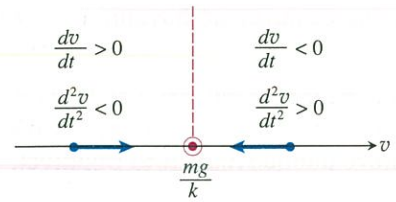
Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν αν εξισώσουμε το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (4) με το μηδέν. Βρίσκουμε

$$v = \frac{mg}{k}.$$

Αν η αρχική ταχύτητα υπερβαίνει την τιμή αυτή, η παράγωγος dv/dt είναι αρνητική και το σώμα επιβραδύνεται. Αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρότερη από mg/k, τότε $dv/dt > 0$ και το σώμα επιταχύνεται. Το αρχικό διάγραμμα φάσεων του Σχήματος 3.36 εμπεριέχει τις παρατηρήσεις αυτές.

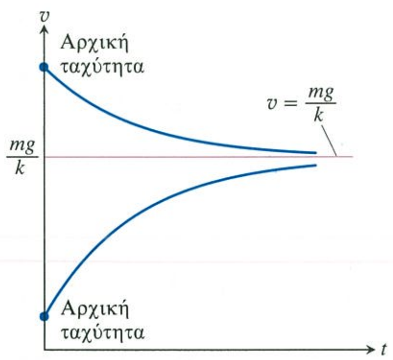


Σχημα 3.36 Η αρχική ευθεία φάσεων για το Παράδειγμα 4.



Σχημα 3.37 Η πλήρης ευθεία φάσεων για το Παράδειγμα 4.

Πριν ανοίξει το αλεξίπτωτό του, ένας αλεξιπτωτιστής μπορεί να μεταβάλλει κατά βούληση την οριακή του ταχύτητα από 150 km/h σε 290 km/h, μεταβάλλοντας τηνεπιφάνεια του σώματός του που εκτίθεται εγκάρσια προς την κατεύθυνση της πτώσης.



Σχημα 3.38 Αντιπροσωπευτικές καμπύλες ταχυτήτων για το Παράδειγμα 4. Η τιμή $v = mg/k$ είναι η τελική (οριακή) ταχύτητα.

Προσδιορίζουμε την κοιλότητα των καμπυλών λύσεως παραγωγίζοντας την Εξίσωση (4) ως προς τον χρόνο t:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}.$$

Βλέπουμε ότι είναι $d^2v/dt^2 < 0$ όταν $v < mg/k$ και $d^2v/dt^2 > 0$ όταν $v > mg/k$. Στην ευθεία φάσεων του Σχήματος 3.37 έχει προστεθεί η πληροφορία αυτή. Η ομοιότητα με την ευθεία φάσεων για τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα είναι εντυπωσιακή (Σχήμα 3.33). Οι καμπύλες λύσεων επίσης μοιάζουν (Σχήμα 3.38).

Το Σχήμα 3.38 δείχνει δυο αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων. Ανεξαρτήτως της αρχικής ταχύτητας, η ταχύτητα του σώματος συγκλίνει τελικά προς την οριακή τιμή $v = mg/k$. Η τιμή αυτή (τιμή ευσταθούς ισορροπίας, στο παράδειγμά μας) καλείται **τελική ταχύτητα.**

Παράδειγμα 5 Ανάλυση της πληθυσμιακής αύξησης σε περιοριστικό περιβάλλον

Παριστάνουμε με $P = P(t)$ το πλήθος των ατόμων ενός συγκεκριμένου πληθυσμού τη στιγμή t. Για παράδειγμα, το P μπορεί να αντιπροσωπεύει τον αριθμό κυττάρων μαγιάς σε ένα θρεπτικό υγρό, ή τον πληθυσμό της λευκής κουκουβάγιας στις δυτικές Η.Π.Α. Έστω ότι κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt, ένα ποσοστό του πληθυσμού γεννιέται και ένα άλλο πεθαίνει. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού P στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$ θα είναι τότε

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP(t), \tag{5}$$

όπου $k > 0$ είναι το ποσοστό γεννήσεων μείον το ποσοστό θανάτων ανά άτομο ανά μονάδα χρόνου.

Δεδομένου ότι το φυσικό περιβάλλον έχει πεπερασμένα αποθέματα τροφής, αναμένουμε ότι μόνο ένας μέγιστος αριθμός ατόμων M θα είναι βιώσιμος. Καθώς ο πληθυσμός προσεγγίζει αυτόν τον **οριακό πληθυσμό** ή **φέρουσα ικανότητα,** τα αποθέματα τροφής ολοένα και σπανίζουν και ο ρυθμός αύξησης k μειώνεται. Η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται από μια απλή σχέση του τύπου

$$k = r(M - P),$$

όπου $r > 0$ είναι μια σταθερά. Βλέπουμε ότι το k μειώνεται καθώς το P κινείται προς το M απο μικρότερες τιμές, και ότι το k γίνεται αρνητικό μόλις το P υπερβεί το M. Αντικαθιστώντας $r(M - P)$ όπου k στην Εξίσωση (5) και παίρνοντας το όριο καθώς $\Delta t \to 0$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση

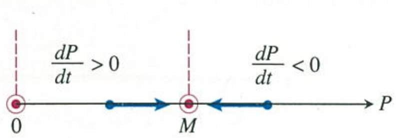
$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2. \tag{6}$$

Η Εξίσωση (6) αποτελεί το μοντέλο της **λογιστικής αύξησης.**

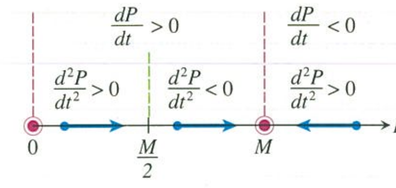
Μπορούμε να προβλέψουμε τη χρονική εξέλιξη του πληθυσμού αναλύοντας την ευθεία φάσεων της Εξίσωσης (6). Οι τιμές ισορροπίας είναι $P = M$ και $P = 0$, και όπως μπορούμε να δούμε θα ισχύει $dP/dt > 0$ για $0 < P < M$ και $dP/dt < 0$ για $P > M$. Οι παρατηρήσεις αυτές αποδίδονται στο Σχήμα 3.39.

Προσδιορίζουμε την κοιλότητα των πληθυσμιακών καμπυλών παραγωγίζοντας την Εξίσωση (6) ως προς t:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}. \end{aligned} \tag{7}$$



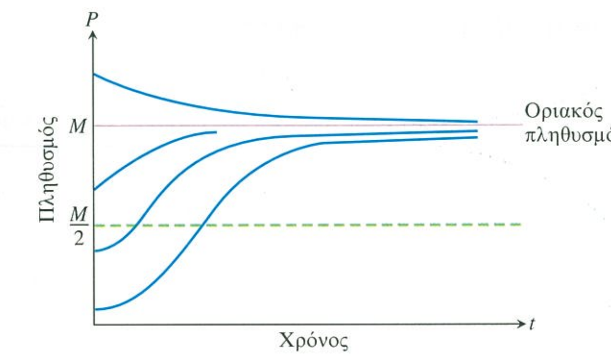
Σχημα 3.39 Η αρχική ευθεία φάσεων της Εξίσωσης (6).



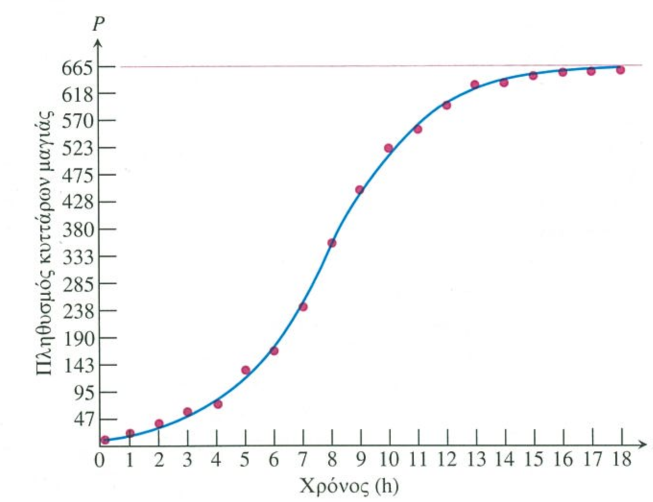
Σχημα 3.40 Η πλήρης ευθεία φάσεων για τη λογιστική αύξηση. (Εξίσωση (6))

Για $P = M/2$, είναι $d^2P/dt^2 = 0$. Για $P < M/2$, οι ποσότητες $(M - 2P)$ και dP/dt είναι θετικές και $d^2P/dt^2 > 0$. Για $M/2 < P < M$, είναι $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$, και $d^2P/dt^2 < 0$. Για $P > M$, οι ποσότητες $(M - 2P)$ και dP/dt είναι ταυτόχρονα αρνητικές και $d^2P/dt^2 > 0$. Μεταφέρουμε τις πληροφορίες αυτές στην ευθεία φάσεων (Σχήμα 3.40).

Οι ευθείες $P = M/2$ και $P = M$ διαμερίζουν το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου tP σε οριζόντιες ζώνες για καθεμία εκ των οποίων γνωρίζουμε τα πρόσημα των dP/dt και d^2P/dt^2. Σε κάθε ζώνη, γνωρίζουμε πόσο απότομα ανέρχονται ή κατέρχονται οι καμπύλες λύσεων και πώς κάμπτονται στο πέρασμα του χρόνου. Οι ευθείες ισορροπίας $P = 0$ και $P = M$ αποτελούν πληθυσμιακές καμπύλες (καμπύλες λύσεων). Οι πληθυσμιακές καμπύλες που τέμνουν την ευθεία $P = M/2$ παρουσιάζουν σημείο καμπής στο σημείο τομής, αποκτώντας **σιγμοειδές** σχήμα (είναι δηλαδή λυγισμένες σαν το γράμμα S). Στο Σχήμα 3.41 φαίνονται μερικές αντιπροσωπευτικές τέτοιες καμπύλες. Στο Σχήμα 3.42 φαίνεται η αύξηση του πληθυσμού των κυττάρων μιας καλλιέργειας μαγιάς από εργαστηριακές παρατηρήσεις.



Σχημα 3.41 Πληθυσμιακές καμπύλες για το Παράδειγμα 5.



Σχημα 3.42 Λογιστική καμπύλη που δείχνει την αύξηση των κυττάρων μαγιάς σε μια καλλιέργεια. Τα σημεία παριστάνουν εργαστηριακές μετρήσεις και προέρχονται από το άρθρο του R. Pearl, "Growth of Population." *Quart. Rev. Biol.* 2 (1927): 532-548.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.4

Ευθείες φάσεων και καμπύλες λύσεων

Στις Ασκήσεις 1-8,

(α) Βρείτε τις τιμές ισορροπίας. Ποιες από αυτές αντιστοιχούν σε ευσταθή και ποιες σε ασταθή ισορροπία;

(β) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y''.

(γ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές καμπύλες λύσεων.

1. $\dfrac{dy}{dx} = (y+2)(y-3)$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y^3 - y$ **4.** $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$ **6.** $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$ **8.** $y' = y^3 - y^2$

Μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης

Οι αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 9-12 αποτελούν μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης. Χρησιμοποιήστε την ευθεία φάσεων σε κάθε άσκηση για να σχεδιάσετε ποιοτικά τις καμπύλες λύσεων του πληθυσμού $P(t)$, επιλέγοντας διάφορες αρχικές τιμές $P(0)$ (όπως στο Παράδειγμα 5). Ποια σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή και ποια ασταθή;

9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$ **10.** $\dfrac{dP}{dt} = P(1-2P)$

11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P-3)$ **12.** $\dfrac{dP}{dt} = 3P(1-P)\left(P - \dfrac{1}{2}\right)$

13. *Καταστροφική συνέχιση του Παραδείγματος 5* Ένας υγιής πληθυσμός κάποιου είδους ζει σε περιοριστικό περιβάλλον. Η τρέχουσα τιμή του πληθυσμού P_0 πλησιάζει τη φέρουσα ικανότητα M_0. Φανταστείτε, για παράδειγμα, τον πληθυσμό των ψαριών μιας λίμνης σε μια απόμακρη περιοχή. Ξαφνικά συμβαίνει μια φυσική καταστροφή σαν την έκρηξη του ηφαιστείου της Αγ. Ελένης και το νερό της λίμνης μολύνεται, οπότε χάνεται μεγάλο μέρος των αποθεμάτων τροφής και οξυγόνου που χρειάζονται τα ψάρια. Προκύπτει έτσι ένα νέο οικοσύστημα με φέρουσα ικανότητα M_1 αισθητά μικρότερη της M_0 και πάντως μικρότερη από την απαιτούμενη για τον τρέχοντα πληθυσμό P_0. Παίρνοντας ως αφετηρία κάποια στιγμή πριν την καταστροφή, σχεδιάστε μια ποιοτική καμπύλη του πληθυσμού έναντι του χρόνου, που να δείχνει πώς προσαρμόζεται ο πληθυσμός των ψαριών στην περιβαλλοντική αλλαγή.

14. *Έλεγχος πληθυσμού* Οι αρχές μιας περιοχής εξετάζουν το ενδεχόμενο έκδοσης κυνηγετικών αδειών ώστε να ελεγχθεί ο πληθυσμός των ελαφιών (ένα ελάφι ανά άδεια). Είναι γνωστό ότι αν ο πληθυσμός των ελαφιών πέσει κάτω από ένα ελάχιστο όριο m, το είδος θα εξαφανιστεί. Είναι γνωστό επίσης ότι αν ο πληθυσμός υπερβεί προς στιγμήν τη φέρουσα ικανότητα M, οι ασθένειες και η έλλειψη τροφής θα τον επαναφέρουν στην οριακή τιμή M.

(α) Εξετάστε κατά πόσο είναι εύλογο το ακόλουθο μοντέλο του ρυθμού αύξησης του πληθυσμού των ελαφιών συναρτήσει του χρόνου:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m),$$

όπου P ο πληθυσμός των ελαφιών και r μια θετική σταθερά αναλογίας. Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων.

(β) Εξηγήστε σε τι διαφέρει το μοντέλο αυτό από το λογιστικό μοντέλο $dP/dt = rP(M-P)$. Ποιο από τα δύο είναι καλύτερο;

(γ) Δείξτε ότι αν $P > M$ για κάθε t, τότε $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

(δ) Τι συμβαίνει αν $P < m$ για κάθε t;

(ε) Συζητήστε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας του μοντέλου; Εξηγήστε την εξάρτηση της οριακής τιμής του πληθυσμού P από τις αρχικές τιμές P. Πόσες περίπου κυνηγετικές άδειες θα πρέπει να εκδοθούν;

Εφαρμογές και παραδείγματα

15. *Ελεύθερη πτώση* Όταν ένα σώμα μάζας m που αρχικά ηρεμεί αφήνεται να πέσει λόγω βαρύτητας, υφίσταται μια αντίσταση από τον αέρα που είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, οπότε η ταχύτητα του σώματος μετά από t sec ικανοποιεί την εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

όπου k σταθερά που εξαρτάται από τις αεροδυναμικές ιδιότητες του σώματος και την πυκνότητα του αέρα. (Υποθέτουμε ότι η πτώση είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζεται από μεταβολές στην πυκνότητα του αέρα.)

(α) Σχεδιάστε την ευθεία φάσεων της εξίσωσης.

(β) Σχεδιάστε ποιοτικά μια αντιπροσωπευτική καμπύλη ταχύτητας.

(γ) Για έναν αλεξιπτωτιστή που πέφτει ελεύθερα (προτού ανοίξει το αλεξίπτωτο) και έχει βάρος 70 kg ($mg = 686$), μια τυπική τιμή του k είναι 0,24 (χρόνος σε sec και απόσταση σε m). Ποια είναι η τελική του ταχύτητα;

16. *Αντίσταση ανάλογη του $\sqrt{v}$* Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα και προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα v_0. Υποθέστε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της ταχύτητας και βρείτε την τελική ταχύτητα με γραφική ανάλυση.

17. *Ιστιοπλοΐα* Ένα ιστιοφόρο ακολουθεί ευθεία πορεία, με τον άνεμο να δημιουργεί μια σταθερή δύναμη πρόωσης μέτρου 25 N. Η μόνη άλλη δύναμη που δρα στο ιστιοφόρο είναι η αντίσταση από το νερό κατά την κίνησή του. Η δύναμη αντίστασης έχει μέτρο που ισούται με το πενταπλάσιο της ταχύτητας του ιστιοφόρου· η αρχική ταχύτητα είναι 1 m/sec. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα σε m ανά sec που μπορεί να αναπτύξει το σκάφος με τέτοιο άνεμο;

18. *Διάδοση πληροφορίας* Οι κοινωνιολόγοι κάνουν λόγο για ένα φαινόμενο που αποκαλούν **κοινωνική διάχυση**· πρόκειται για τη διάδοση στον πληθυσμό κάποιας πληροφορίας, π.χ. μιας τεχνολογικής καινοτομίας, ή μιας νέας μόδας. Ο πληθυσμός μπορεί να χωριστεί σε δύο κατηγορίες: σε αυτούς που κατέχουν ήδη την πληροφορία και στους υπόλοιπους. Σε έναν δεδομένο σταθερό πληθυσμό είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός διαχύσεως είναι ανάλογος του αριθμού των κατεχόντων την πληροφορία επί τον αριθμό των μη κατεχόντων. Αν X είναι το πλήθος των ατόμων που έχουν λάβει την πληροφορία σε συνολικό πληθυσμό N, τότε το μαθηματικό μοντέλο της κοινωνικής διάχυσης δίδεται από την εξίσωση

$$\frac{dX}{dt} = kX(N-X),$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες και k μια θετική σταθερά.

(α) Συζητήστε πόσο εύλογο θεωρείτε το μοντέλο.

(β) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων αναγράφοντας τα πρόσημα των X' και X''.

(γ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων.

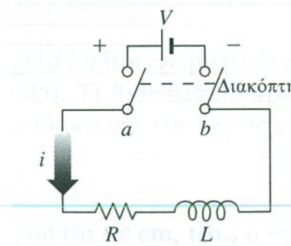
(δ) Προβλέψτε την τιμή X της ταχύτερης διάδοσης της πληροφορίας. Πόσα άτομα τελικά λαμβάνουν την πληροφορία;

19. *Ρεύμα σε κύκλωμα RL* Το παρατιθέμενο σχήμα παριστάνει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με σταθερή ολική αντίσταση R Ω και σταθερή αυτεπαγωγή (πηνίο) L Henry. Ένας διακόπτης στις θέσεις a και b επιτρέπει τη σύνδεση με ηλεκτρική πηγή V Volt.

Ο νόμος του Ohm, $V = Ri$, θα πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να ληφθεί υπ' όψιν η αυτεπαγωγή. Η τροποποιημένη μορφή είναι

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

όπου i η ένταση του ρεύματος σε Ampère και t ο χρόνος σε sec. Επιλύοντας την εξίσωση αυτή μπορούμε να βρούμε το ρεύμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Χρησιμοποιώντας την ευθεία φάσεων σχεδιάστε ποιοτικά την καμπύλη λύσεως δεδομένου ότι κλείνουμε τον διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 0$. Πόσο γίνεται το ρεύμα για $t \to \infty$; Η τιμή αυτή καλείται **λύση χρονοανεξάρτητης κατάστασης.**

20. *Μαργαριτάρι σε σαμπουάν* Υποθέστε ότι ένα μαργαριτάρι βυθίζεται σε παχύρρευστο υγρό (π.χ. σαμπουάν) και υφίσταται μια δύναμη αντίστασης λόγω τριβών ανάλογη της ταχύτητάς του. Υποθέστε ακόμη ότι υπάρχει μια δύναμη άνωσης που επίσης δρα ενάντια στη βύθιση. Σύμφωνα με την **αρχή του Αρχιμήδη,** η άνωση ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το μαργαριτάρι. Αν m η μάζα του μαργαριταριού και P η εκτοπιζόμενη μάζα του υγρού, ακολουθήστε τις παρακάτω υποδείξεις:

(α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δρουν στο μαργαριτάρι καθώς αυτό βυθίζεται, όπως κάναμε στο Σχήμα 3.35.

(β) Αν $v(t)$ είναι η ταχύτητα του μαργαριταριού συναρτήσει του χρόνου t, γράψτε τη διαφορική εξίσωση-μοντέλο της ταχύτητας βύθισης του μαργαριταριού.

(γ) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων αναγράφοντας τα πρόσημα των v' και v''.

(δ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων.

(ε) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του μαργαριταριού;

3.5 Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση

Παραδείγματα από το εμπόριο και τη βιομηχανία • Παραδείγματα από τα μαθηματικά και τη φυσική • Η αρχή του Fermat και ο νόμος του Snell • Παραδείγματα από τα οικονομικά • Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ως μοντέλα διάκριτων φαινομένων

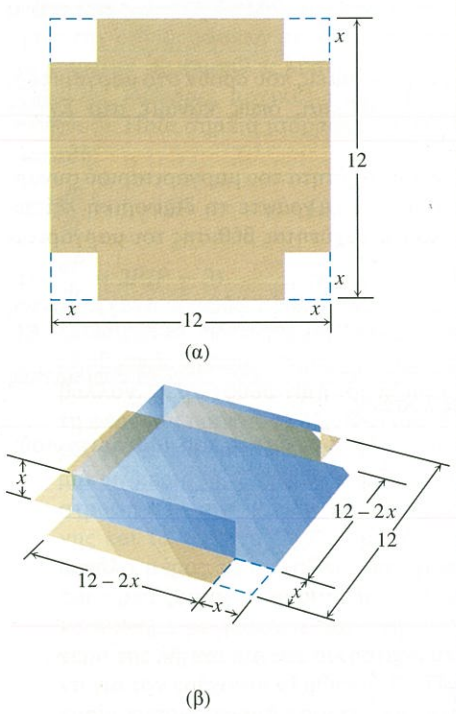
Βελτιστοποίηση κάποιου μεγέθους σημαίνει μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση κάποιας από τις παραμέτρους του. Ποιο το επίπεδο παραγωγής που εξασφαλίζει μέγιστο κέρδος; Ποιο είναι το ελάχιστου κόστους σχήμα ενός δοχείου λαδιού; Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει ένα δοκάρι που παράγεται από κορμό διαμέτρου 12 cm για να παρουσιάζει μέγιστη δυσκαμψία; Στα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε προβλήματα που μας ενδιαφέρουν, η απάντηση σε ερωτήματα σαν αυτά που μόλις διατυπώθηκαν περιλαμβάνει συνήθως την εύρεση μιας ελάχιστης ή μιας μέγιστης τιμής κάποιας συναρτήσεως.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας επιπλοποιός χρησιμοποιεί εξωτικά υλικά για να κατασκευάσει έπιπλα κατά παραγγελία. Πρέπει να παράγει 5 κομμάτια την ημέρα, που είναι και η μέγιστη ημερήσια παραγωγή που μπορεί να φέρει εις πέρας. Για κάθε εξωτικό υλικό που χρησιμοποιεί, πρέπει να καθορίσει την *ποσότητα* και την *συχνότητα* των παραγγελιών του. Για κάθε παραγγελία που κάνει πληρώνει ένα πάγιο κόστος παράδοσης, ανεξαρτήτως της ποσότητας που παραλαμβάνει. Μπορεί να νοικιάσει όσο χώρο αποθήκευσης χρειαστεί μέχρι να καταναλώσει την εκάστοτε ποσότητα που παραλαμβάνει. Σκέφτεται λοιπόν ότι αν το κόστος παράδοσης ενός υλικού είναι υψηλό και το κόστος αποθήκευσης χαμηλό, θα πρέπει να παραγγέλνει σπάνια και σε μεγάλες ποσότητες καθε φορά. Από την άλλη, αν το κόστος παράδοσης είναι χαμηλό και το κόστος αποθήκευσης υψηλό, τότε συμφέρει περισσότερο να παραγγέλνει συχνότερα και σε μικρότερες ποσότητες. Αλλά ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος παράδοσης και αποθήκευσης για κάθε υλικό; Σε αυτή την ενότητα απαντούμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα.

Παραδείγματα από το εμπόριο και τη βιομηχανία

Παράδειγμα 1 Κατασκευή κουτιού

Ένα κουτί ανοιχτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετράγωνο φύλλο κασσίτερου, διαστάσεων 12 × 12 cm, αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει μέγιστη χωρητικότητα το κουτί;



ΣΧΗΜΑ 3.43 Αν αποκόψουμε τις γωνίες ενός τετραγωνικού φύλλου κασσίτερου και το διπλώσουμε κατάλληλα, φτιάχνουμε ένα ανοιχτό κουτί. (Παράδειγμα 1)

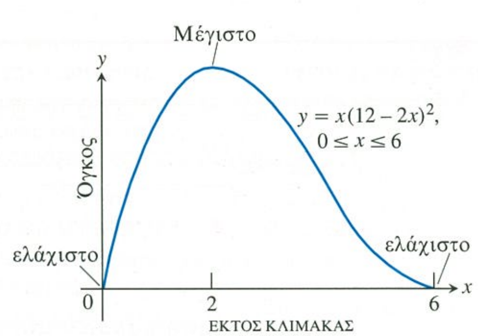
Λύση Στο Σχήμα 3.43 τα αποκοπτόμενα τετράγωνα έχουν μήκος πλευράς x cm. Ο όγκος λοιπόν του κουτιού είναι συνάρτηση του x:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3.$$

Εφόσον οι πλευρές του φύλλου κασσίτερου έχουν μήκος 12 cm, θα έχουμε $x \le 6$ και πεδίο ορισμού του V θα είναι το διάστημα $0 \le x \le 6$.

Από τη γραφική παράσταση του V (Σχήμα 3.44) βλέπουμε ότι προκύπτει ελάχιστη τιμή 0 για $x = 0$ και $x = 6$, και μέγιστη τιμή περίπου για $x = 2$. Εξετάζουμε την πρώτη παράγωγο του V ως προς x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$



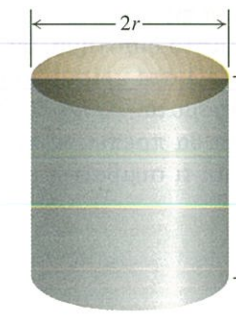
ΣΧΗΜΑ 3.44 Ο όγκος του κουτιού στο Σχήμα 3.43, συναρτήσει του x.

Από τις δύο ρίζες της παραγώγου, $x = 2$ και $x = 6$, μόνο το σημείο $x = 2$ είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως και αποτελεί συνεπώς κρίσιμο σημείο. Ο όγκος V παίρνει τις ακόλουθες τιμές στο κρίσιμο αυτό σημείο και στα άκρα του πεδίου ορισμού:

Τιμή στο κρίσιμο σημείο: $V(2) = 128$

Τιμές στα άκρα: $V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$

Ο μέγιστος όγκος είναι 128 cm^3. Έτσι τα αποκοπτόμενα τετράγωνα θα πρέπει να έχουν μήκος πλευράς 2 cm.



ΣΧΗΜΑ 3.45 Αυτό το δοχείο του 1 L απαιτεί την ελάχιστη ποσότητα υλικού για $h = 2r$. (Παράδειγμα 2)

Παράδειγμα 2 Σχεδίαση δοχείου λαδιού

Πρόκειται να σχεδιάσετε ένα δοχείο λαδιού χωρητικότητας 1 L και κυλινδρικού σχήματος (Σχήμα 3.45). Τι διαστάσεις πρέπει να έχει ώστε να καταναλωθεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του;

Λύση

Όγκος δοχείου: Αν τα r και h μετρώνται σε cm, τότε ο όγκος του δοχείου σε κυβικά εκατοστά ισούται με

$$\pi r^2 h = 1000. \qquad \text{1 λίτρο} = 1000 \text{ cm}^3$$

Εμβαδόν επιφάνειας δοχείου: $A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{κυκλικές βάσεις}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{πλευρικό τοίχωμα}}$

Τι σημαίνει «ελάχιστο υλικό»; Μία σκέψη είναι να αγνοήσουμε το πάχος του υλικού, καθώς και τα τετράγωνα κομμάτια που πάνε χαμένα κατά την παραγωγή, και να υπολογίσουμε για ποιες τιμές των r και h θα γίνει ελάχιστη η συνολική επιφάνεια, υπό τον προφανή πάντα περιορισμό ότι $\pi r^2 h = 1000$. (Στην Άσκηση 15 εξετάζεται ένας τρόπος να ληφθεί υπ' όψιν και η απώλεια των αποκοπτόμενων τετραγώνων.)

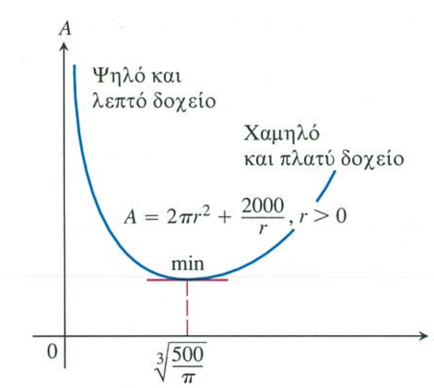
Μοντέλο

Προκειμένου να εκφράσουμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας συναρτήσει μίας μεταβλητής, λύνουμε την $\pi r^2 h = 1000$ ως προς τη μία μεταβλητή και αντικαθιστούμε στον τύπο του εμβαδού. Η αντικατάσταση του h είναι ευκολότερη:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 3.46 Η γραφική παράσταση της $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Αναλυτική επίλυση

Σκοπός μας είναι να βρούμε μια τιμή του $r > 0$ που ελαχιστοποιεί το εμβαδόν A. Το Σχήμα 3.46 μας πείθει ότι τέτοια τιμή όντως υπάρχει.

Από την καμπύλη του γραφήματος αξίζει να προσέξετε ότι για μικρό r (ψηλό και λεπτό δοχείο, στο σχήμα αγωγού), υπερισχύει ο όρος $2000/r$ και το εμβαδόν A είναι μεγάλο. Για μεγάλο r (χαμηλό και πλατύ δοχείο, σαν τηγάνι), υπερισχύει ο όρος $2\pi r^2$ και το εμβαδόν παίρνει και πάλι μεγάλες τιμές.

Εφόσον η συνάρτηση εμβαδού A είναι διαφορίσιμη για $r > 0$, δηλαδή σε διάστημα όπου δεν υπάρχουν άκρα, η μόνη δυνατή τιμή ελαχίστου θα προκύπτει στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \\ 0 &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{Θέτουμε } dA/dr = 0. \\ 4\pi r^3 &= 2000 && \text{Πολλαπλασιάζουμε με } r^2. \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42 && \text{Λύνουμε ως προς } r. \end{aligned}$$

Κάτι λοιπόν συμβαίνει για $r = \sqrt[3]{500/\pi}$, αλλά τι;

Αν το πεδίο ορισμού του A ήταν ένα κλειστό διάστημα, θα απαντούσαμε στο ερώτημα αυτό υπολογίζοντας το A στο κρίσιμο σημείο και στα άκρα, και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα. Αλλά το πεδίο ορισμού είναι ένα ανοιχτό διάστημα, κι έτσι θα πρέπει να αποτανθούμε στη γραφική παράσταση για να βρούμε τι συμβαίνει στο σημείο $r = \sqrt[3]{500/\pi}$. Η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού του A. Δηλαδή η γραφική παράσταση είναι κυρτή καμπύλη (κοίλα άνω) και η τιμή του A για $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ είναι λοιπόν ένα ολικό ελάχιστο.

Μετά από λίγες απλές αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη τιμή του h είναι

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Ερμηνεία

Το δοχείο χωρητικότητας 1 L που απαιτεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο, όπου $r \approx 5{,}42$ cm και $h \approx 10{,}84$ cm.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Marin Mersenne
(1588-1648)

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων ελάχιστων-μέγιστων τιμών

Βήμα 1. *Κατανοούμε το πρόβλημα* Διαβάζουμε προσεκτικά την εκφώνηση του προβλήματος. Εντοπίζουμε ποιες πληροφορίες μας χρειάζονται για την επίλυση. Ποιοι είναι οι άγνωστοι; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι τα ζητούμενα;

Βήμα 2. *Κατασκευάζουμε ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος* Σχεδιάζουμε σχήματα όπου καταγράφουμε όποια στοιχεία έχουν σημασία για το πρόβλημα. Ορίζουμε μια συνάρτηση η οποία παριστά την ποσότητα που πρόκειται να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί, και γράφουμε τη μαθηματική της έκφραση.

Βήμα 3. *Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως* Προσδιορίζουμε ποιες τιμές της συναρτήσεως έχουν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση αν είναι δυνατόν.

Βήμα 4. *Εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του πεδίου ορισμού* Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού ή μη ύπαρξης της παραγώγου, αξιοποιώντας όποιες γνώσεις του σχήματος του γραφήματος και της φυσικής του προβλήματος διαθέτουμε. Χρησιμοποιούμε πρώτες και δεύτερες παραγώγους για να εντοπίσουμε και να χαρακτηρίσουμε κρίσιμα σημεία (όπου είτε $f' = 0$ είτε δεν υπάρχει η παράγωγος).

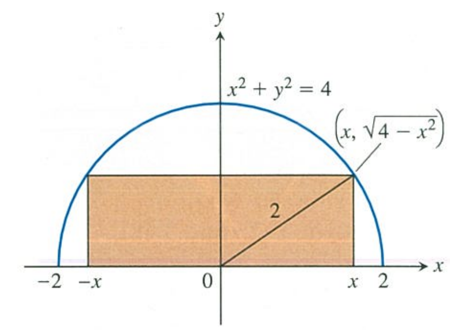
Βήμα 5. *Λύνουμε το μαθηματικό μοντέλο* Αν δεν είμαστε βέβαιοι για τη λύση μας, την επαληθεύουμε με κάποια άλλη μέθοδο.

Βήμα 6. *Ερμηνεύουμε τη λύση* Ερμηνεύουμε τη μαθηματική μας λύση στο πλαίσιο του υπό εξέταση προβλήματος και κρίνουμε αν είναι εύλογη ή όχι.

Παραδείγματα από τα μαθηματικά και τη φυσική

Παράδειγμα 3 Εγγεγραμμένο ορθογώνιο

Θέλουμε να εγγράψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ημικύκλιο ακτίνας 2. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου, και ποιες οι διαστάσεις του;



ΣΧΗΜΑ 3.47 Το ορθογώνιο και το ημικύκλιο του Παραδείγματος 3.

Λύση

Μοντέλο

Έστω $(x, \sqrt{4 - x^2})$ οι συντεταγμένες των κορυφών του εγγεγραμμένου στο ημικύκλιο ορθογωνίου (Σχήμα 3.47). Το μήκος, το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου μπορούν στην περίπτωση αυτή να γραφούν συναρτήσει της θέσης x της κάτω δεξιά κορυφής:

Μήκος: $2x$, Πλάτος: $\sqrt{4 - x^2}$, Εμβαδόν: $2x \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

Σημειώνουμε ότι το x παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \le x \le 2$.

Ζητάμε λοιπόν να βρούμε το ολικό μέγιστο της συνεχούς συναρτήσεως

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

στο πεδίο ορισμού $[0, 2]$.

Ταυτοποίηση κρίσιμων και ακραίων σημείων

Η παράγωγος

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

δεν ορίζεται για $x = 2$ και μηδενίζεται όταν

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0 \qquad \text{Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με } \sqrt{4 - x^2}.$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Από τις δύο αυτές ρίζες, $x = \sqrt{2}$ και $x = -\sqrt{2}$, μόνο η $x = \sqrt{2}$ είναι εσωτερική του πεδίου ορισμού του A και συνεπώς αποτελεί κρίσιμο σημείο. Οι τιμές του A στα άκρα και στο κρίσιμο αυτό σημείο είναι

Τιμή στο κρίσιμο σημείο: $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$
Τιμές στα άκρα: $A(0) = 0$, $A(2) = 0$.

Ερμηνεία

Το εμβαδόν έχει μέγιστη τιμή 4 όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει ~~μήκος~~ $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ και ~~πλάτος~~ $2x = 2\sqrt{2}$.
πλάτος μήκος

Η αρχή του Fermat και ο νόμος του Snell

Η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και συνήθως μειώνεται καθώς το μέσο γίνεται πυκνότερο. Στο κενό, το φως ταξιδεύει με $c = 3 \times 10^8$ m/sec, αλλά στη γήινη ατμόσφαιρα η ταχύτητά του είναι μικρότερη, και στο γυαλί ακόμα μικρότερη (περίπου δύο τρίτα της τιμής στο κενό).

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat στην οπτική, το φως ταξιδεύει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο επιλέγοντας πάντα τη συντομότερη διαδρομή (ελαχίστου χρόνου). Η παρατήρηση αυτή μάς επιτρέπει να προβλέψουμε την πορεία του φωτός κατά τη διέλευσή του από ένα μέσο διάδοσης (π.χ. αέρας) σε ένα άλλο μέσο (π.χ. γυαλί ή νερό).

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Willebrod Snell van Royen (1580-1626)

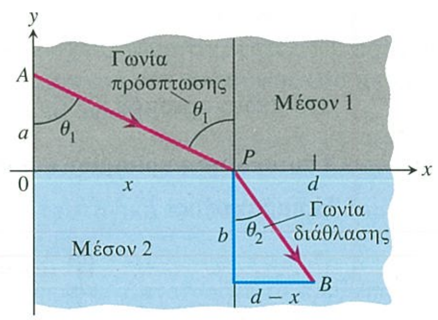
Παράδειγμα 4 Εύρεση πορείας φωτεινής ακτίνας

Να βρεθεί η πορεία που θα ακολουθήσει μια φωτεινή ακτίνα από σημείο A ενός μέσου με ταχύτητα διάδοσης c_1 σε σημείο B ενός άλλου μέσου ταχύτητας διάδοσης c_2. Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων είναι λεία.

Λύση Εφόσον η διαδρομή από το A στο B θα είναι η συντομότερη, αναζητούμε μια διαδρομή που θα ελαχιστοποιήσει τον χρόνο.

Μοντέλο

Θεωρούμε ότι τα A και B βρίσκονται στο επίπεδο xy και ότι η διαχωριστική ευθεία των δύο μέσων είναι ο άξονας x (Σχήμα 3.48).



Σχήμα 3.48 Μια φωτεινή ακτίνα διαθλάται (αποκλίνει από την αρχική της πορεία) καθώς περνά τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων. (Παράδειγμα 4)

Σε ένα ομοιόμορφο μέσο διάδοσης, όπου η ταχύτητα του φωτός παραμένει σταθερή, «ελάχιστος χρόνος» σημαίνει «ελάχιστη διαδρομή» και άρα η ακτίνα κινείται σε μια ευθεία. Συνεπώς η διαδρομή από το A στο B θα απαρτίζεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το A με κάποιο σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας P, και από ένα δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των P και B. Από τον τύπο της ταχύτητας, έχουμε

$$\text{Χρόνος} = \text{απόσταση} / \text{ταχύτητα}.$$

Ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδρομή από το A στο P είναι λοιπόν

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

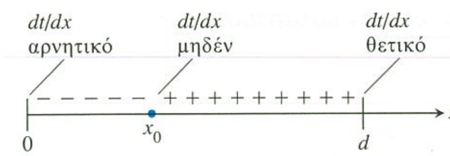
Ομοίως, από το P στο B απαιτείται χρόνος

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

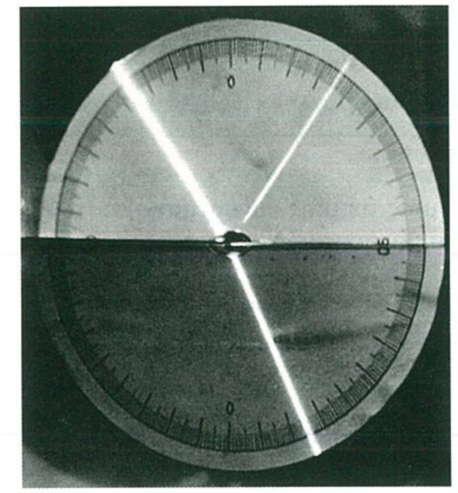
Ο χρόνος από το A στο B είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Στην εξίσωση αυτή, ο χρόνος t έχει εκφραστεί ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x στο πεδίο ορισμού $[0, d]$· ζητάμε το ολικό ελάχιστο του t σε αυτό το κλειστό διάστημα.



Σχήμα 3.49 Τα πρόσημα της παραγώγου dt/dx για το Παράδειγμα 4.



Σχήμα 3.50 Για αέρα και νερό σε θερμοκρασία δωματίου, ο λόγος των ταχυτήτων του φωτός είναι 1,33 και ο νόμος του Snell γίνεται $\sin\theta_1 = 1{,}33 \sin\theta_2$. Σε αυτή την εργαστηριακή φωτογραφία, $\theta_1 = 35{,}5°$, $\theta_2 = 26°$ και $(\sin 35{,}5° / \sin 26°) \approx 0{,}581/0{,}438 \approx 1{,}33$, όπως προβλέπει η θεωρία.
Η ισότητα μεταξύ των γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι στη φωτογραφία εμφανής. (Άσκηση 40)

Ταυτοποίηση κρίσιμων και ακραίων σημείων

Βρίσκουμε

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}. \tag{1}$$

Εκφράζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα συναρτήσει των γωνιών θ_1 και θ_2 του Σχήματος 3.48,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$

Όπως βλέπουμε από την Εξίσωση (1), $dt/dx < 0$ για $x = 0$ και $dt/dx > 0$ για $x = d$. Συνεπώς, θα ισχύει $dt/dx = 0$ για κάποιο x_0 ενδιάμεσα (Σχήμα 3.49). Τέτοιο σημείο υπάρχει μόνο ένα, διότι η dt/dx είναι αύξουσα συνάρτηση του x (Άσκηση 58). Στο σημείο αυτό λοιπόν,

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ο **νόμος του Snell** ή αλλιώς ο **νόμος της διάθλασης.**

Ερμηνεία

Συμπεραίνουμε ότι η φωτεινή ακτίνα ακολουθεί τη διαδρομή που περιγράφεται από τον νόμο του Snell. Το Σχήμα 3.50 δείχνει τη διάθλαση μεταξύ αέρα και νερού.

Παραδείγματα από τα οικονομικά

Θέλουμε να αναδείξουμε άλλες δύο περιοχές χρησιμότητας του απειροστικού λογισμού στην οικονομική θεωρία. Η πρώτη εξ αυτών έχει να κάνει με τη μεγιστοποίηση του κέρδους· η δεύτερη με την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους.

Έστω

$r(x)$ = το εισόδημα από την πώληση x προϊόντων
$c(x)$ = το κόστος παραγωγής x προϊόντων
$p(x) = r(x) - c(x)$ = το κέρδος από την πώληση x προϊόντων.

Το **οριακό εισόδημα**, το **οριακό κόστος** και το **οριακό κέρδος** για τη συγκεκριμένη ποσότητα παραγωγής (x προϊόντα) είναι, αντίστοιχα,

$$\frac{dr}{dx} = \text{οριακό εισόδημα}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{οριακό κόστος}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{οριακό κέρδος}.$$

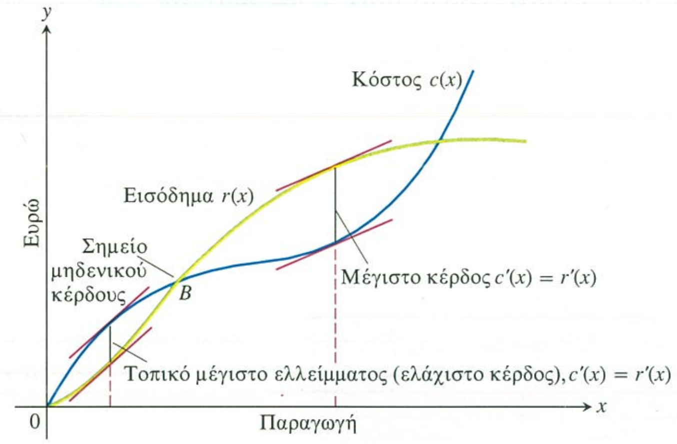
Η πρώτη παρατήρηση αφορά τη σχέση του p με τις παραγώγους αυτές.

Θεώρημα 6 Μέγιστο κέρδος
Όταν η παραγωγή αποδίδει μέγιστο κέρδος, το οριακό εισόδημα ισούται με το οριακό κόστος.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι οι $r(x)$ και $c(x)$ είναι διαφορίσιμες για κάθε $x > 0$, οπότε αν η $p(x) = r(x) - c(x)$ εμφανίζει μέγιστο, αυτό προκύπτει για $p'(x) = 0$. Εφόσον $p'(x) = r'(x) - c'(x)$, η πρόταση $p'(x) = 0$ σημαίνει ότι

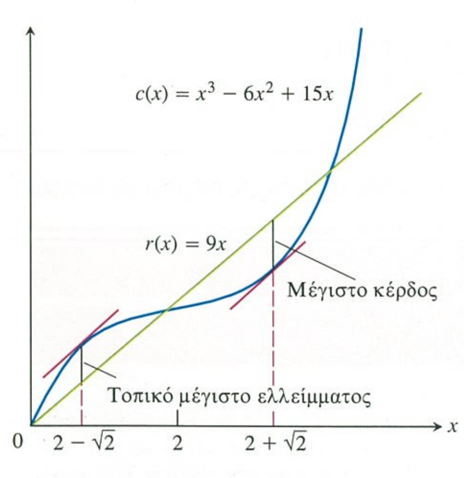
$$r'(x) - c'(x) = 0 \quad \text{ή} \quad r'(x) = c'(x).$$

Το Σχήμα 3.51 διασαφηνίζει περαιτέρω την κατάσταση.



Σχημα 3.51 Η γραφική παράσταση μιας τυπικής συνάρτησης κόστους ξεκινά όντας κοίλη (κοίλα κάτω) και εν συνεχεία γίνεται κυρτή (κοίλα άνω). Τέμνει την καμπύλη εισοδήματος στο σημείο μηδενικού κέρδους B. Στα αριστερά του B, η επιχείρηση παρουσιάζει έλλειμμα. Στα δεξιά του B, παρουσιάζει πλεόνασμα και το μέγιστο κέρδος προκύπτει για $c'(x) = r'(x)$. Ακόμα δεξιότερα, το κόστος υπερβαίνει πάλι το εισόδημα (ενδεχομένως λόγω αυξήσεως κόστους εργατικών και υλικών, αλλά και λόγω κορεσμού της αγοράς) και η παραγωγή γίνεται πάλι ασύμφορη.

Τι πρακτικά συμπεράσματα εξάγουμε παρατηρώντας το σχήμα αυτό; Γνωρίζουμε ότι αν για κάποιο επίπεδο παραγωγής ικανοποιείται η σχέση $p'(x) = 0$, το κέρδος δεν μεγιστοποιείται απαραιτήτως· μπορεί να ελαχιστοποιείται, για παράδειγμα. Παρ' όλα αυτά, όταν μελετούμε τα οικονομικά μιας επιχείρησης, μας ενδιαφέρουν τα επίπεδα παραγωγής στα οποία το οριακό κόστος ισούται με το οριακό εισόδημα. Μόνο για τέτοια επίπεδα παραγωγής μπορεί να υπάρχει μέγιστο κέρδος.



Σχημα 3.52 Οι καμπύλες κόστους και εισοδήματος για το Παράδειγμα 5.

Παράδειγμα 5 Μεγιστοποίηση κέρδους

Έστω ότι $r(x) = 9x$ και $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, όπου το επίπεδο παραγωγής x μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Υπάρχει κάποιο επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος, κι αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Λύση Έχουμε $r'(x) = 9$ και $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \quad \text{Θέτουμε } c'(x) = r'(x).$$

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Οι δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

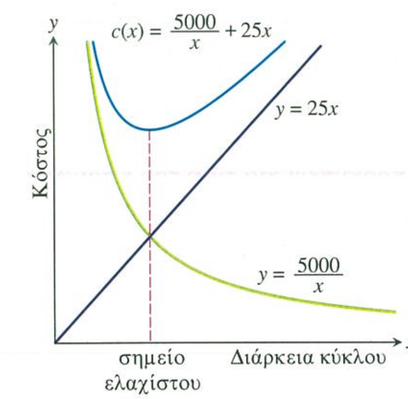
$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414.$$

Τα πιθανά επίπεδα παραγωγής για μέγιστο κέρδος είναι $x \approx 0{,}586$ χιλιάδες τεμάχια και $x \approx 3{,}414$ χιλιάδες τεμάχια. Όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 3.52, το μέγιστο κέρδος προκύπτει περίπου για $x = 3{,}414$ (όπου το εισόδημα υπερβαίνει το κόστος) ενώ το μέγιστο έλλειμμα προκύπτει περίπου για $x = 0{,}586$.

Παράδειγμα 6 Ελαχιστοποίηση κόστους

Στην εισαγωγή της ενότητας αυτής κάναμε λόγο για τον επιπλοποιό που χρησιμοποιεί πρώτες ύλες για να κατασκευάσει 5 έπιπλα ημερησίως. Έστω ότι κάθε παράδοση μιας δεδομένης πρώτης ύλης τού στοιχίζει 5000 €, ενώ το ημερήσιο κόστος αποθήκευσης είναι 10 € ανά μονάδα, όπου ως μονάδα θεωρούμε την ποσότητα υλικού που χρειάζεται για ένα έπιπλο. Πόσο υλικό πρέπει να παραγγέλνει και κάθε πότε, ούτως ώστε να ελαχιστοποιήσει το μέσο ημερήσιο κόστος κάθε κύκλου παραγωγής;



Σχημα 3.53 Το μέσο ημερήσιο κόστος $c(x)$ είναι το άθροισμα μιας υπερβολής και μιας γραμμικής συνάρτησης. (Παράδειγμα 6)

Λύση

Μοντέλο

Αν κάθε x ημέρες γίνεται μία παράδοση, τότε ο επιπλοποιός πρέπει να παραγγείλει $5x$ μονάδες ώστε να του φτάσει η πρώτη ύλη για τον συγκεκριμένο κύκλο παράδοσης. Ως *μέση* ποσότητα που βρίσκεται στην αποθήκη ανά κύκλο μπορούμε να πάρουμε το ήμισυ της παραληφθείσας ποσότητας, δηλαδή $5x/2$. Συνεπώς, το κόστος παράδοσης και αποθήκευσης ανά κύκλο θα ισούται περίπου με

Κόστος ανά κύκλο = κόστος παράδοσης + κόστος αποθήκευσης

$$\text{Κόστος ανά κύκλο} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{κόστος}\\ \text{παράδοσης}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{μέση ποσότητα}\\ \text{που αποθηκεύεται}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{αριθμ. ημερών}\\ \text{αποθήκευσης}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{ημερήσιο κόστος}\\ \text{αποθήκευσης}}}$$

Υπολογίζουμε το *μέσο ημερήσιο κόστος* $c(x)$ διαιρώντας το κόστος ανά κύκλο με τον αριθμό ημερών x σε έναν κύκλο (δείτε το Σχήμα 3.53).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \qquad x > 0.$$

Για $x \to 0$ ή $x \to \infty$, το μέσο ημερήσιο κόστος είναι μεγάλο. Είναι εύλογο λοιπόν να περιμένουμε ένα ελάχιστο κάπου, αλλά πού; Ο σκοπός μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε για ποιον αριθμό ημερών x μεταξύ δυο διαδοχικών παραδόσεων ελαχιστοποιείται (ολικά) το κόστος.

Ταυτοποίηση κρίσιμων σημείων

Εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία προσδιορίζοντας τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14{,}14.$$

Από τα δύο κρίσιμα σημεία, μόνο το $\sqrt{200}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $c(x)$. Η αντίστοιχη τιμή του μέσου ημερήσιου κόστους είναι τότε

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx 707{,}11\ €.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $c(x)$ είναι ορισμένη στο ανοιχτό διάστημα $(0, \infty)$ με $c''(x) = 10000/x^3 > 0$. Έτσι, υπάρχει ένα ολικό ελάχιστο για $x = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ ημέρες.

Ερμηνεία

Ο επιπλοποιός θα πρέπει να προγραμματίσει παράδοση ποσότητας $5(14) = 70$ μονάδων της συγκεκριμένης πρώτης ύλης κάθε 14 ημέρες.

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ως μοντέλα διάκριτων φαινομένων

Αν σας έχει δημιουργηθεί η απορία πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $c(x)$ και $r(x)$ για την περιγραφή του κόστους και του εισοδήματος, αντίστοιχα, που προκύπτουν από την παραγωγή x τεμαχίων, όπου x ακέραιος αριθμός, ιδού το σκεπτικό.

Για μεγάλα x, μπορούμε εύλογα να περιγράφουμε το κόστος και το εισόδημα με τις λείες καμπύλες $c(x)$ και $r(x)$, ορισμένες όχι μόνο για ακέραιες αλλά και για ενδιάμεσες τιμές του x. Έχοντας στη διάθεσή μας αυτές τις διαφορίσιμες συναρτήσεις, που υποτίθεται ότι εκφράζουν το κόστος και το εισόδημα για ακέραιο x, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απειροστικό λογισμό και να εξαγάγουμε διάφορα συμπεράσματα για τις τιμές τους. Στη συνέχεια, «μεταφράζουμε» τα μαθηματικά αποτελέσματα σε πορίσματα που αφορούν τον πραγματικό κόσμο, ελπίζοντας ότι αυτά θα έχουν κάτι χρήσιμο να μας διδάξουν. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, όπως στα παραδείγματα της θεωρίας των οικονομικών που μόλις είδαμε, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις αποτελούν ένα καλό μοντέλο της πραγματικότητας.

Τι κάνουμε όταν η βέλτιστη λύση προκύπτει για τιμή του x που δεν είναι ακέραια; Στο Παράδειγμα 6, εάν ο αριθμός των ημερών μεταξύ παραδόσεων πρέπει να είναι ακέραιος και οι πρώτες ύλες να διακινούνται και να αποθηκεύονταισε παρτίδες, θα πρέπει να στρογγυλοποιήσουμε τις απαντήσεις μας. Η στρογγυλοποίηση πρέπει να γίνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω; Με άλλα λόγια, πόσο *ευαίσθητη* είναι η μεταβολή του κόστους σε μια μικρή αύξηση ή ελάττωση του χρόνου μεταξύ δυο διαδοχικών παραδόσεων;

Παράδειγμα 7 Ευαισθησία του ελάχιστου κόστους

Αφού βρήκαμε τη μαθηματική λύση στο Παράδειγμα 6, πρέπει να τη στρογγυλοποιήσουμε προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Λύση

Αν στρογγυλοποιήσουμε από 14,14 στις 14 ημέρες, το μέσο ημερήσιο κόστος θα αυξηθεί κατά περίπου 0,03 €:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25(14) = 707{,}14\ €$$

και

$$c(14) - c(14{,}14) = 707{,}14\ € - 707{,}11\ € = 0{,}03\ €.$$

Από την άλλη, $c(15) = 708{,}33$ €, κι έτσι το κόστος θα αυξηθεί $708{,}33 - 707{,}11 = 1{,}22$ €αν στρογγυλοποιήσουμε προς τα πάνω. Άρα εδώ είναι συμφερότερο να στρογγυλοποιήσουμε το x προς τα κάτω, στις 14 ημέρες. Στην Άσκηση 49, θα σας ζητηθεί να εξαγάγετε έναν γενικό τύπο για τη βέλτιστη χρονική διάρκεια μεταξύ παραδόσεων, όταν δίδονται τα κόστη παράδοσης και αποθήκευσης μιας πρώτης ύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.5

Όποτε μεγιστοποιείτε ή ελαχιστοποιείτε μια συνάρτηση μίας μεταβλητής, είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα κατάλληλο για το πρόβλημα που σας ενδιαφέρει. Το γράφημα θα σας δώσει μια καλή αίσθηση του πού να ψάξετε για τα ακρότατα προτού αρχίσετε τους υπολογισμούς· αλλά και μετά από αυτούς, θα αποτελέσει ένα οπτικό πλαίσιο ερμηνείας των αποτελεσμάτων σας.

Γεωμετρικές εφαρμογές

1. *Ελαχιστοποίηση περιμέτρου* Ποια η ελάχιστη δυνατή περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου εμβαδού 16 cm^2, και ποιες είναι τότε οι διαστάσεις του;

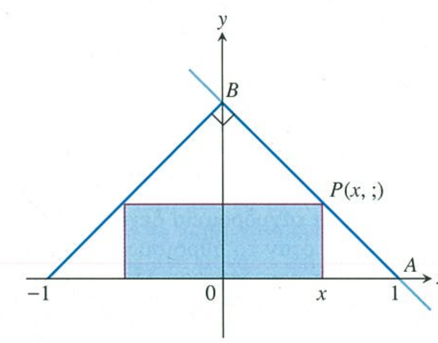
2. *Εύρεση εμβαδού* Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα περιμέτρου 8 m, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

3. *Εγγεγραμμένα ορθογώνια* Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους 2 μονάδων.

(α) Εκφράστε τη συντεταγμένη y του σημείου P συναρτήσει του x. (*Υπόδειξη:* Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία AB.)

(β) Εκφράστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου συναρτήσει του x.

(γ) Ποιο το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και ποιες είναι τότε οι διαστάσεις του;



4. *Μέγιστο ορθογώνιο* Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τη βάση του στον άξονα x και τις άνω κορυφές του επί της παραβολής $y = 12 - x^2$. Ποιο το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και ποιες οι διαστάσεις του;

5. *Βέλτιστες διαστάσεις* Από ένα κομμάτι χαρτόνι διαστάσεων 8×15 cm πρόκειται να φτιάξετε ένα κουτί ανοιχτό από πάνω, αποκόβοντας ίσα τετράγωνα από κάθε γωνία και διπλώνοντας μετά τις πλευρές που προεξέχουν. Ποιες είναι οι διαστάσεις του κουτιού για μέγιστο όγκο (χωρητικότητα) και ποιος ο όγκος του;

6. *Αποκόβοντας τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου* Σχεδιάζετε να αποκόψετε ένα τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 20 μονάδων, που εκτείνεται από το σημείο $(a, 0)$ στο $(0, b)$. Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τους άξονες και το ευθύγραμμο τμήμα είναι μέγιστο όταν $a = b$.

7. *Βέλτιστη περίφραξη* Από μεγάλη αγροτική έκταση θέλουμε να απομονώσουμε μια περιοχή σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου που συνορεύει στη μία πλευρά με ποτάμι. Τις άλλες τρεις πλευρές πρόκειται να τις περιφράξουμε με μονό ηλεκτρικό σύρμα. Έχοντας 800 m καλωδίου στη διάθεσή μας, ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορούμε να περιφράξουμε, και ποιες οι διαστάσεις του παραλληλογράμμου;

8. *Η ελάχιστη περίφραξη* Ένα χωράφι αρακά έκτασης 216 m^2 και σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου πρόκειται να περιφραχτεί και κατόπιν να μοιραστεί στα δύο, πάλι με φράχτη, παράλληλο στις δύο πλευρές του. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του εξωτερικού παραλληλογράμμου για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μήκος περίφραξης; Πόση περίφραξη θα χρειαστεί τότε;

9. *Σχεδίαση κιβωτίου* Η επιχείρησή σας έχει αναλάβει να σχεδιάσει και να κατασκευάσει για λογαριασμό μιας εταιρείας χαρτιού ένα ορθογώνιο ατσάλινο κιβώτιο, χωρητικότητας 500 m^3, τετράγωνης βάσης, ανοιχτό από πάνω. Το κιβώτιο θα κατασκευαστεί συγκολλώντας τις πλευρές πέντε λεπτών ατσάλινων πλακών. Η δουλειά σας ως μηχανικός παραγωγής είναι να βρείτε τις διαστάσεις της βάσης και του ύψους ώστε το βάρος της κατασκευής να είναι ελάχιστο.

(α) Ποιες διαστάσεις επιλέγετε;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε με λίγα λόγια πώς κάνατε τον υπολογισμό σας.

10. *Συγκέντρωση βρόχινου νερού* Μια ορθογώνια δεξαμενή χωρητικότητας 1125 m^3, με τετράγωνη βάση πλευράς x m και βάθος y m, πρόκειται να κατασκευαστεί έτσι ώστε η πάνω (ανοιχτή) πλευρά της να είναι ισεπίπεδη με το έδαφος, για να μπορεί να συγκεντρώνει βρόχινο νερό. Το έξοδα περιλαμβάνουν όχι μόνο το υλικό κατασκευής αλλά και την εκσκαφή του χώματος, το κόστος της οποίας είναι ανάλογο του γινομένου xy.

(α) Αν το συνολικό κόστος είναι

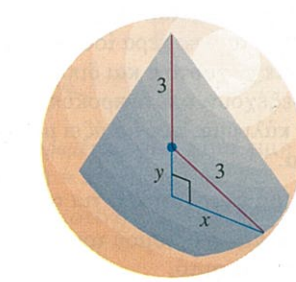
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

βρείτε τις τιμές των x και y που το ελαχιστοποιούν.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Δώστε μια πιθανή εξήγηση για τη μορφή της συναρτήσεως κόστους του ερωτήματος (α).

11. *Σχεδίαση αφίσας* Σχεδιάζετε μια ορθογώνια αφίσα, χρήσιμης επιφάνειας 50 cm^2, με περιθώριο 4 cm πάνω και κάτω, και 2 cm δεξιά και αριστερά. Για ποιες εξωτερικές διαστάσεις ελαχιστοποιείται η ποσότητα χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί;

12. *Εγγεγραμμένος κώνος* Βρείτε τον όγκο του μεγαλύτερου ορθού κυκλικού κώνου που μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας 3.



13. *Εύρεση γωνίας* Δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη a και b, ενώ η γωνία που περικλείουν είναι θ. Για ποια τιμή της θ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου; (*Υπόδειξη:* $A = (1/2)ab \sin \theta$.)

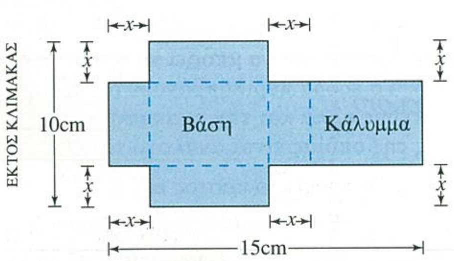
14. *Σχεδίαση δοχείου* Ποιες είναι οι διαστάσεις του ελαφρύτερου κυλινδρικού δοχείου που είναι ανοιχτό από πάνω και έχει χωρητικότητα 1000 cm^3; Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το Παράδειγμα 2.

15. *Σχεδίαση δοχείου* Σας ζητείται να σχεδιάσετε κυλινδρικό δοχείο αλουμινίου χωρητικότητας 1000 cm^3 με διαστάσεις που εξασφαλίζουν το μικρότερο κόστος, δεδομένου ότι και τα αποκόμματα αλουμινίου που περισσεύουν και πετιώνται, πληρώνονται. Το πλευρικό τοίχωμα του δοχείου έχει επιφάνεια ορθογωνίου και συνεπώς μπορεί να κοπεί χωρίς απώλειες, όμως οι δύο κυκλικές βάσεις ακτίνας r θα κοπούν από τετράγωνα κομμάτια πλευράς $2r$. Η συνολική ποσότητα αλουμινίου που δεσμεύεται για την κατασκευή του δοχείου είναι συνεπώς

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

και όχι $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ όπως στο Παράδειγμα 2. Στο Παράδειγμα 2, η οικονομικότερη αναλογία του h προς το r ήταν 2 προς 1. Ποια αναλογία είναι οικονομικότερη τώρα;

T **16.** *Σχεδίαση κουτιού με κάλυμμα* Ένα κομμάτι χαρτόνι έχει διαστάσεις 10 cm επί 15 cm. Δύο ίσα τετράγωνα αποκόπτονται από τις κορυφές τής μιας πλευράς 10 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Δύο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα αποκόπτονται από τις άλλες δύο κορυφές έτσι ώστε, όταν διπλώνονται, οι πλευρές που προκύπτουν να σχηματίζουν ορθογώνιο κουτί με κάλυμμα.



(α) Γράψτε μια έκφραση $V(x)$ για τον όγκο του κουτιού.

(β) Βρείτε το πεδίο ορισμού του V και σχεδιάστε το V στο διάστημα αυτό.

(γ) Με γραφικές μεθόδους βρείτε τον μέγιστο όγκο και την αντίστοιχη τιμή του x.

(δ) Επαληθεύστε αναλυτικά το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (γ).

T **17.** *Σχεδίαση κασετίνας* Ένα χαρτόνι διαστάσεων 24 × 36 cm διπλώνεται στα δύο σχηματίζοντας ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 24 × 18 cm όπως φαίνεται στο παρατιθέμενο σχήμα. Από τις κορυφές του διπλωμένου χαρτονιού αποκόπτονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x. Ξεδιπλώνουμε το χαρτόνι και διπλώνουμε τις έξι πλευρές που προεξέχουν, οπότε προκύπτει ένα κουτί με τοιχώματα και κάλυμμα, που μοιάζει με κασετίνα ή με μικρή βαλίτσα.

(α) Γράψτε μια έκφραση $V(x)$ για τον όγκο του κουτιού.

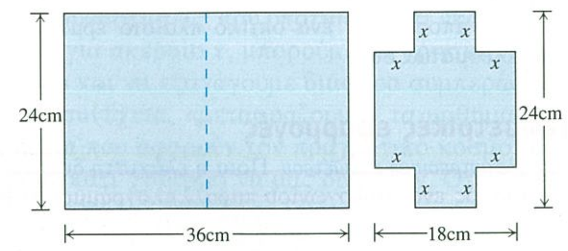
(β) Βρείτε το πεδίο ορισμού του V και σχεδιάστε το V στο διάστημα αυτό.

(γ) Με γραφικές μεθόδους βρείτε τον μέγιστο όγκο και την αντίστοιχη τιμή του x.

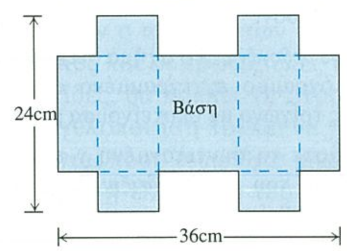
(δ) Επαληθεύστε αναλυτικά το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (γ).

(ε) Βρείτε την τιμή x που αντιστοιχεί σε όγκο 1120 cm^3.

(στ) *Μάθετε γράφοντας* Γράψτε μια παράγραφο παραθέτοντας τα ζητήματα που προκύπτουν στο ερώτημα (β).



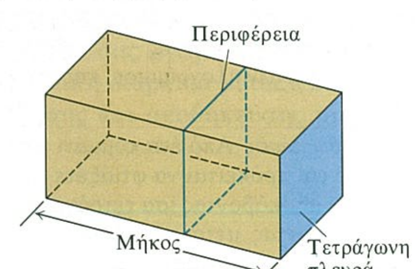
Κατόπιν ξεδιπλώνουμε το χαρτόνι



18. *Εγγεγραμμένο ορθογώνιο* Θέλουμε να εγγράψουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην καμπύλη $y = 4\cos(0{,}5x)$ από το $x = -\pi$ έως το $x = \pi$. Για ποιες διαστάσεις μεγιστοποιείται το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και πόσο γίνεται τότε;

19. *Μεγιστοποίηση όγκου* Βρείτε τις διαστάσεις κυλίνδρου μέγιστου όγκου που εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας 10 cm. Ποιος είναι ο μέγιστος αυτός όγκος;

20. (α) Έστω ότι τα ταχυδρομεία δέχονται δέματα εσωτερικού μόνο όταν το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας του δέματος δεν υπερβαίνει τα 108 cm. Δεδομένου ότι έχουμε ένα δέμα με δυο τετράγωνες πλευρές, ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει αυτό για μέγιστη χωρητικότητα;

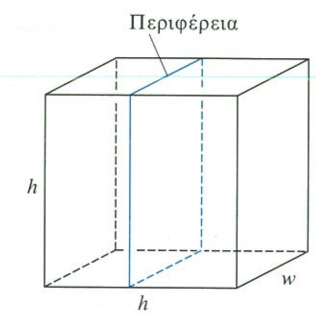


T (β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του όγκου ενός δέματος 108 cm (μήκος συν περιφέρεια ίσον 108 cm) έναντι του μήκους και συγκρίνετε το γράφημά σας με την απάντηση που δώσατε στο (α).

21. *(Συνέχεια της Άσκησης 20)*

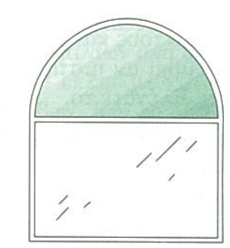
(α) Έστω ότι αντί για δέμα με δύο τετράγωνες πλευρές, είχατε ένα άλλο με τέσσερις τετράγωνες πλευρές,

του οποίου συνεπώς οι διαστάσεις είναι h επί h επί w και η περιφέρεια ισούται με $2h + 2w$. Ποιες διαστάσεις θα δώσουν τώρα στο δέμα τη μέγιστη χωρητικότητα;



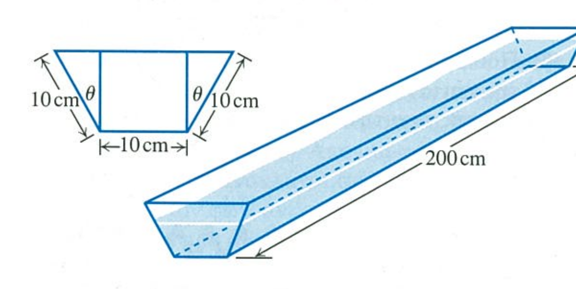
T (β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του όγκου έναντι του μήκους h και συγκρίνετε το γράφημά σας με την απάντηση που δώσατε στο (α).

22. *Σχεδίαση παραθύρου* Ένα παράθυρο έχει σχήμα ορθογωνίου στο οποίο επικάθεται ημικύκλιο. Το ορθογώνιο τμήμα του παραθύρου αποτελείται από καθαρό γυαλί, ενώ το γυαλί του ημικυκλίου έχει απόχρωση που αφήνει να περάσει μόνο το μισό φως ανά μονάδα επιφάνειας σε σχέση με το καθαρό γυαλί. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου είναι σταθερή. Να βρεθούν οι διαστάσεις του παραθύρου που θα αφήνουν να περάσει το περισσότερο φως. Αγνοήστε το πάχος του πλαισίου.



23. *Κατασκευή σιλό* Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα σιλό (χωρίς τη βάση του) που θα έχει τη μορφή κυλίνδρου πάνω στον οποίο θα «κάθεται» ένα ημισφαίριο. Το κόστος κατασκευής ανά μονάδα επιφάνειας είναι διπλάσιο για το ημισφαίριο απ' ό,τι για το κυλινδρικό τμήμα. Προσδιορίστε τις βέλτιστες διαστάσεις αν ο όγκος του σιλό είναι δεδομένος και θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος κατασκευής. Αγνοήστε το πάχος του υλικού και το κόστος των περισσευμάτων που προκύπτουν κατά την κατασκευή, τα οποία πετιούνται.

24. *Εύρεση γωνίας* Η σκάφη του σχήματος θα κατασκευαστεί με τις διαστάσεις που σημειώνονται. Μονάχα τη γωνία θ μπορούμε να μεταβάλλουμε. Για ποια τιμή της θ μεγιστοποιείται ο όγκος της σκάφης;

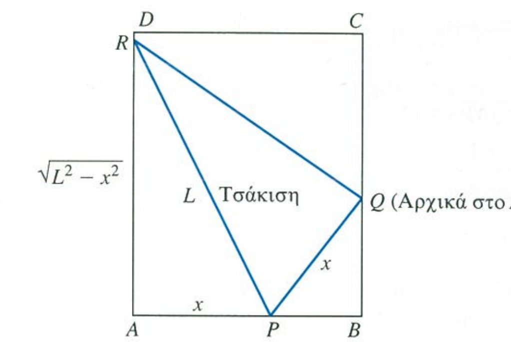


25. *Χαρτί που διπλώνει* (*Εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*) Ένα ορθογώνιο χαρτί διαστάσεων 8,5cm× 11 cm τοποθετείται σε επίπεδη επιφάνεια. Τσακίζουμε το χαρτί με τρόπο ώστε η μία κορυφή να πέσει πάνω στην απέναντι μεγάλη πλευρά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πρόβλημα που τίθεται είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της τσάκισης, το οποίο καλούμε L. Δοκιμάστε το με μια κόλλα χαρτί.

(α) Δείξτε ότι $L^2 = 2x^3/(2x - 8{,}5)$.

(β) Για ποια τιμή του x ελαχιστοποιείται το L^2;

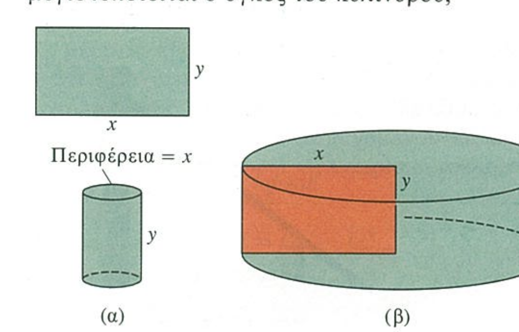
(γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του L;



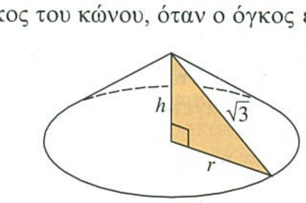
26. *Κατασκευή κυλίνδρων* Συγκρίνετε τις απαντήσεις στα ακόλουθα προβλήματα κατασκευής.

(α) Ένα ορθογώνιο φύλλο περιμέτρου 36 cm και διαστάσεων x cm επί y cm τυλίγεται σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος;

(β) Το ίδιο φύλλο περιστρέφεται γύρω από τη μια του πλευρά μήκους y διαγράφοντας τον κύλινδρο που φαίνεται στο σχήμα (β). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;



27. *Κατασκευή κώνων* Ένα ορθογώνιο τρίγωνο υποτείνουσας $\sqrt{3}$ m περιστρέφεται γύρω από τη μία κάθετη πλευρά του, διαγράφοντας κώνο. Να βρεθεί η ακτίνα, το ύψος, και ο όγκος του κώνου, όταν ο όγκος του είναι μέγιστος.



28. *Εύρεση τιμών παραμέτρου* Για ποια τιμή του a αποκτά η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a/x)$

(α) τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$;

(β) σημείο καμπής στο $x = 1$;

29. *Εύρεση τιμών παραμέτρου* Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a/x)$ δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο για καμία τιμή του a.

30. *Εύρεση τιμών παραμέτρου* Για ποιες τιμές του a και b αποκτά η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

(α) τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$;

(β) τοπικό ελάχιστο στο $x = 4$ και σημείο καμπής στο $x = 1$;

Φυσικές εφαρμογές

31. *Κατακόρυφη κίνηση* Το ύψος ενός σώματος που κινείται κατακόρυφα δίδεται από την εξίσωση

$$s = -16t^2 + 96t + 112,$$

όπου s σε m και t σε sec. Βρείτε

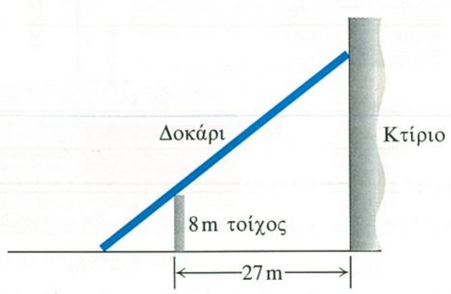
(α) την ταχύτητα του σώματος για $t = 0$

(β) το μέγιστο ύψος του και πότε αυτό προκύπτει

(γ) την ταχύτητα του σώματος για $s = 0$.

32. *Γρηγορότερη διαδρομή* Η Άννα βρίσκεται σε μια βάρκα 2 km ανοιχτά μιας ευθύγραμμης ακτής και θέλει να φθάσει σε παραθαλάσσιο χωριό που απέχει 6 km από το εγγύτερο στη βάρκα σημείο της ακτής. Κωπηλατώντας μπορεί να διανύσει 2 km/h, ενώ περπατώντας 5 km/h. Σε ποιο σημείο της ακτής θα πρέπει να κατευθύνει τη βάρκα ώστε να φθάσει στο χωριό στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;

33. *Κοντύτερο δοκάρι* Ο τοίχος ύψους 8 m του παρατιθέμενου σχήματος απέχει 27 m από το κτίριο. Να βρεθεί το μήκος του κοντύτερου δοκαριού που «πατάει» στα αριστερά του τοίχου και φθάνει μέχρι το κτίριο.



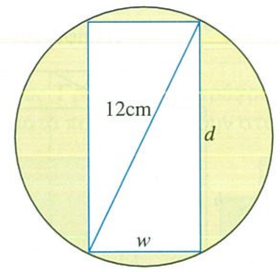
T 34. *Αντοχή δοκαριού* Η αντοχή S ["strengh"] ενός ξύλινου δοκαριού ορθογώνιας διατομής είναι ανάλογη του γινομένου της μικρής εγκάρσιας διαστάσεώς του, w, επί το τετράγωνο της μεγάλης εγκάρσιας διαστάσεως, d. (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.)

CD-ROM Ιστοτόπος

(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός δοκαριού μέγιστης αντοχής που παράγεται από κυλινδρικό κορμό διαμέτρου 12 cm.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε το S συναρτήσει της διαστάσεως w, υποθέτοντας ότι η σταθερά αναλογίας είναι $k = 1$. Συμβαδίζει το γράφημα αυτό με την απάντησή σας στο (α);

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Στο ίδιο σχήμα που κάνατε στο (β), σχεδιάστε το S ως προς την άλλη διάσταση, d, υποθέτοντας και πάλι ότι $k = 1$. Συγκρίνετε τα γραφήματα μεταξύ τους και με την απάντησή σας στο (α). Τι θα συμβεί αν η σταθερά αναλογίας k πάρει άλλες τιμές; Ελέγξτε το.



T 35. *Δυσκαμψία δοκαριού* Η δυσκαμψία S ("stiffness") ενός ξύλινου δοκαριού ορθογώνιας διατομής είναι ανάλογη του γινομένου της μικρής εγκάρσιας διαστάσεώς του, w, επί τον κύβο της μεγάλης εγκάρσιας διαστάσεως, d.

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις δοκαριού μέγιστης δυσκαμψίας που παράγεται από κυλινδρικό κορμό διαμέτρου 12 cm.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε το S συναρτήσει της διαστάσεως w, υποθέτοντας ότι η σταθερά αναλογίας είναι $k = 1$. Συμβαδίζει το γράφημα αυτό με την απάντησή σας στο (α);

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Στο ίδιο σχήμα που κάνατε στο (β), σχεδιάστε το S ως προς την άλλη διάσταση, d, υποθέτοντας και πάλι ότι $k = 1$. Συγκρίνετε τα γραφήματα μεταξύ τους και με την απάντησή σας στο (α). Τι θα συμβεί αν η σταθερά αναλογίας k πάρει άλλες τιμές; Ελέγξτε το.

36. *Κίνηση σε ευθεία* Οι συναρτήσεις θέσεως δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1 = \sin t$ και $s_2 = \sin(t + \pi/3)$, όπου s_1 και s_2 σε m και t σε sec.

(α) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \le t \le 2\pi$ συναντώνται τα σωματίδια;

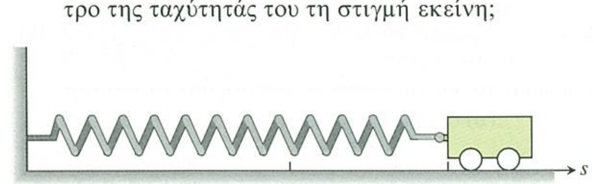
(β) Ποια η μέγιστη μεταξύ τους απόσταση;

(γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \le t \le 2\pi$ μεταβάλλεται με μέγιστο ρυθμό η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων;

37. *Καρότσι χωρίς τριβές* Ένα μικρό καρότσι που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και συνδέεται μέσω ελατηρίου με τον τοίχο, απομακρύνεται 10 cm από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να ταλαντωθεί ελεύθερα για 4 sec. Η θέση του τη στιγμή t είναι $s = 10 \cos \pi t$.

(α) Ποια είναι η μέγιστη (κατά μέτρο) ταχύτητα του καροτσιού και πότε προκύπτει αυτή; Σε ποια θέση βρίσκεται τότε και με πόση επιτάχυνση (κατά μέτρο) κινείται το καρότσι;

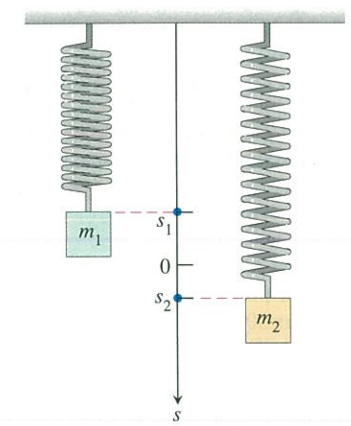
(β) Πού βρίσκεται το καρότσι τη στιγμή που το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο; Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητάς του τη στιγμή εκείνη;



38. *Ταλαντούμενες μάζες* Δύο μάζες που κρέμονται από ελατήρια η μια δίπλα στην άλλη έχουν συναρτήσεις θέσεως $s_1 = 2 \sin t$ και $s_2 = \sin 2t$, αντίστοιχα.

(α) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 < t$ έχουν οι μάζες το ίδιο ύψος; (*Υπόδειξη:* $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.)

(β) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \le t \le 2\pi$ γίνεται μέγιστη η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των μαζών; Ποια είναι η απόσταση αυτή; (*Υπόδειξη:* $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$.)



39. *Απόσταση μεταξύ δυο πλοίων* Το μεσημέρι, το πλοίο A βρισκόταν 12 ναυτικά μίλια βόρεια του πλοίου B. Το πλοίο A έπλεε τότε με κατεύθυνση νότια και ταχύτητα 12 κόμβων (ναυτικών μιλίων ανά ώρα· 1 ναυτικό μίλι ≈ 1852 m). Το πλοίο B έπλεε με κατεύθυνση ανατολικά και ταχύτητα 8 κόμβων. Και τα δύο πλοία διατήρησαν σταθερή την ταχύτητά τους κατά τη διάρκεια της ημέρας.

(α) Με σημείο χρονικής αφετηρίας ($t = 0$) το μεσημέρι εκφράστε την απόσταση s μεταξύ των πλοίων συναρτήσει του t.

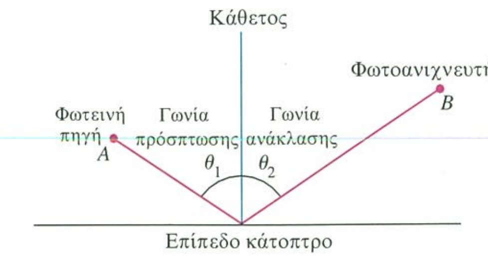
(β) Πόσο γρήγορα μεταβαλλόταν η απόσταση μεταξύ των πλοίων το μεσημέρι; Πόσο μια ώρα αργότερα;

(γ) Εκείνη την ημέρα η ορατότητα ήταν 5 ναυτικά μίλια. Αντίκρυσε ποτέ το ένα πλοίο το άλλο;

T (δ) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τα s και ds/dt συναρτήσει του t για $-1 \le t \le 3$, με διαφορετικά χρώματα αν είναι δυνατόν. Συγκρίνετε τα γραφήματα και συσχετίστε τα με τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα (β) και (γ).

(ε) Το γράφημα του ds/dt δείχνει να έχει μια οριζόντια ασύμπτωτη στο πρώτο τεταρτημόριο. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι το ds/dt προσεγγίζει μια οριακή τιμή καθώς $t \to \infty$. Ποια είναι η τιμή αυτή; Ποια η σχέση της με τις ταχύτητες των δύο πλοίων;

40. *Η αρχή του Fermat στην οπτική* Η αρχή του Fermat στην οπτική λέει ότι καθώς το φως ταξιδεύει μεταξύ δύο σημείων, επιλέγει πάντα τη συντομότερη διαδρομή (που ελαχιστοποιεί τον χρόνο). Από μια φωτεινή πηγή A εκπέμπεται φως που ανακλάται σε επίπεδο κάτοπτρο και φτάνει έτσι στον φωτοανιχνευτή B, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δείξτε πως η αρχή του Fermat συνεπάγεται ότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης, όπως αυτές μετρώνται από την κάθετο στην επιφάνεια του κατόπτρου. (Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να παραχθεί και χωρίς απειροστικό λογισμό, με καθαρά γεωμετρικά επιχειρήματα.)



41. *Λοιμός του κασσιτέρου* Σε θερμοκρασία κάτω των 13,2°C ο μεταλλικός κασσίτερος βαθμιαία γίνεται εύθραυστος και θρυμματίζεται αφήνοντας μια γκρίζα σκόνη. Αντικείμενα από κασσίτερο που υπόκεινται σε κρύες θερμοκρασίες για μερικά χρόνια θρυμματίζονται τελικά αυθορμήτως. Οι Ευρωπαίοι που έβλεπαν τους σωλήνες από κασσίτερο των εκκλησιαστικών τους οργάνων να θρυμματίζονται τους προηγούμενους αιώνες, ονόμασαν το φαινόμενο αυτό *λοιμό του κασσιτέρου* («*tin pest*») γιατί φαινόταν μεταδοτικό, και όντως έτσι ήταν, αφού η γκρίζα σκόνη είναι καταλύτης του ίδιου του μηχανισμού σχηματισμού της.

Καταλύτης μιας χημικής αντίδρασης είναι μια ουσία που ελέγχει την ταχύτητα της αντίδρασης χωρίς η ίδια να υφίσταται κάποια μόνιμη μεταβολή. Μια αντίδραση είναι *αυτοκαταλυτική* όταν το ίδιο το προϊόν της καταλύει την αντίδραση. Μια αυτοκαταλυτική αντίδραση θα εξελίσσεται αργά στην αρχή, αφού η ποσότητα του καταλύτη είναι μικρή, αλλά και προς το τέλος, όταν η περισσότερη από την αντιδρώσα ουσία έχει αναλωθεί. Ενδιάμεσα, όμως, όταν τόσο η αντιδρώσα ουσία όσο και ο παραγόμενος καταλύτης υπάρχουν σε αφθονία, η αντίδραση εξελίσσεται με ταχύτερο ρυθμό.

Σε μερικές περιπτώσεις, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα της αντίδρασης $v = dx/dt$ είναι ανάλογη τόσο της ποσότητας της αντιδρώσας ουσίας όσο και της ποσότητας του παραγόμενου καταλύτη. Με άλλα λόγια, το v μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση μόνο του x και να γράψουμε

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2,$$

όπου

x = η ποσότητα του προϊόντος

a = η αρχική ποσότητα της αντιδρώσας ουσίας

k = μια θετική σταθερά.

Για ποια τιμή του x γίνεται μέγιστη η ταχύτητα; Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του v;

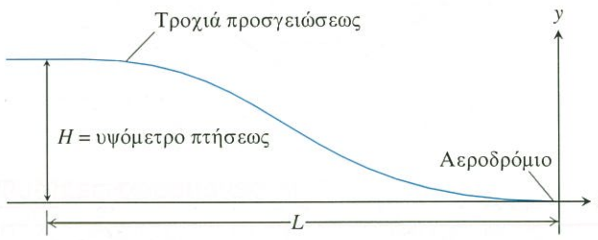
42. *Τροχιά προσεγγιώσεως αεροπλάνου* Αεροπλάνο πετά σε υψόμετρο H όταν αρχίζει την κάθοδο για να προσγειωθεί σε ειδικό διάδρομο που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση L από το αεροσκάφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι η τροχιά προσεγγιώσεως του αεροσκάφους είναι η καμπύλη του πολυωνύμου τρίτου βαθμού $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, όπου $y(-L) = H$ και $y(0) = 0$.

(α) Ποια η τιμή του dy/dx για $x = 0$;

(β) Ποια η τιμή του dy/dx για $x = -L$;

(γ) Χρησιμοποιήστε τις τιμές των dy/dx για $x = 0$ και $x = -L$ καθώς και τις τιμές $y(0) = 0$ και $y(-L) = H$ για να δείξετε ότι

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$



Επιχειρήσεις και οικονομικά

43. *Πώληση εκδρομικών σακκιδίων* Το κόστος παραγωγής και διανομής εκδρομικών σακκιδίων είναι c € ανά τεμάχιο. Αν η τιμή λιανικής πωλήσεως είναι x €, ο αριθμός των πωληθέντων σακκιδίων είναι

$$n = \frac{a}{x-c} + b(100 - x),$$

όπου a και b είναι θετικές σταθερές. Ποια τιμή λιανικής πωλήσεως θα αποφέρει μέγιστο κέρδος;

44. *Γραφείο ταξιδίων* Οργανώνετε μια εκδρομή με τις ακόλουθες τιμές συμμετοχής:

200 € το άτομο αν 50 άτομα συμμετάσχουν (που είναι και ο ελάχιστος αριθμός για να γίνει η εκδρομή)

Για κάθε επιπλέον άτομο, και για μέχρι 80 συνολικά επιβαίνοντες, η τιμή μειώνεται κατά €2 ανά άτομο.

Το κόστος της εκδρομής είναι 6000 € (πάγιο) συν 32 € ανά άτομο. Για πόσους επιβάτες μεγιστοποιείται το κέρδος;

45. *Τύπος του Wilson* Σύμφωνα με έναν από τους μαθηματικούς τύπους διαχείρισης απογραφής, το μέσο εβδομαδιαίο κόστος παραγγελίας, πληρωμής, και διατήρησης εμπορεύματος είναι

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

όπου q η ποσότητα που παραγγέλνεται όταν τελειώνει το εμπόρευμα (παπούτσια, ραδιόφωνα, σκούπες, ή οτιδήποτε άλλο), k είναι το κόστος παραγγελίας (ίδιο κάθε φορά, ανεξαρτήτως του πόσο συχνά γίνονται παραγγελίες), c είναι το κόστος του ενός τεμαχίου (σταθερό), m ο αριθμός των τεμαχίων που πωλήθηκαν σε μια εβδομάδα (σταθερός), και h το εβδομαδιαίο κόστος διατήρησης ανά τεμάχιο (μια σταθερά που περιλαμβάνει π.χ. τα έξοδα συντήρησης, ασφάλισης, φύλαξης του καταστήματος κ.λπ.).

(α) Η αποστολή σας, ως διευθυντής του τμήματος απογραφής, είναι να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους $A(q)$. (Ο τύπος που παίρνετε τότε λέγεται *τύπος του Wilson*.)

(β) Το κόστος παραγγελίας (που περιλαμβάνει έξοδα μεταφοράς) εξαρτάται μερικές φορές από το μέγεθος της παραγγελίας. Στην περίπτωση αυτή είναι ρεαλιστικότερο να αντικαταστήσετε το k με το $k + bq$, δηλαδή με το άθροισμα του k και ενός σταθερού πολλαπλασίου του q. Πόση ποσότητα συμφέρει περισσότερο να παραγγείλετε τώρα;

46. *Ποσότητα παραγωγής* Δείξτε ότι, αν υπάρχει τιμή της ποσότητας παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος, αυτή είναι τέτοια ώστε το μέσο κόστος να ισούται με το οριακό κόστος.

47. *Ποσότητα παραγωγής* Δείξτε ότι αν $r(x) = 6x$ και $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ είναι οι συναρτήσεις σας εισοδήματος και κόστους αντίστοιχα, τότε στην καλύτερη περίπτωση το εισόδημά σας απλώς θα ισοφαρίσει το κόστος.

48. *Ποσότητα παραγωγής* Έστω ότι $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20.000x$ είναι το κόστος παραγωγής x τεμαχίων. Βρείτε την ποσότητα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος της παραγωγής x τεμαχίων.

49. *Μέσο ημερήσιο κόστος* Στο Παράδειγμα 6, υποθέστε ότι για μια πρώτη ύλη το πάγιο κόστος παράδοσης είναι d, το κόστος αποθήκευσης είναι s ευρώ ανά τεμάχιο ανά ημέρα, και ο ρυθμός παραγωγής είναι p τεμάχια την ημέρα.

(α) Αν η παράδοση γίνεται κάθε x ημέρες, πόση ποσότητα πρέπει να παραδίδεται;

(β) Δείξτε ότι το

$$\text{κόστος ανά κύκλο} = d + \frac{px}{2}sx.$$

(γ) Βρείτε τον βέλτιστο χρόνο x^* μεταξύ δύο παραδόσεων καθώς και την παραδοτέα ποσότητα που ελαχιστοποιούν το *μέσο ημερήσιο κόστος* της παράδοσης και αποθήκευσης.

(δ) Δείξτε ότι η τιμή x^* προκύπτει στο σημείο τομής της υπερβολής $y = d/x$ και την ευθείας $y = psx/2$.

50. *Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους* Έστω ότι $c(x) = 2000 + 96x + 4x^{3/2}$, όπου το x μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Υπάρχει κάποια ποσότητα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος; Αν ναι, ποια είναι αυτή;

Ιατρική

51. *Ευαισθησία σε φάρμακο* (*Συνέχεια του Παραδείγματος 7 της Ενότητας 2.3*) Βρείτε την ποσότητα φαρμακευτικής ουσίας στην οποία παρουσιάζει μέγιστη ευαισθησία ο οργανισμός υπολογίζοντας την τιμή M που μεγιστοποιεί την παράγωγο dR/dM, όπου

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

και C είναι μια σταθερά.

52. *Πώς βήχουμε*

(α) Όταν βήχουμε, η τραχεία συστέλλεται για να αυξήσει την ταχύτητα εξόδου του εκπνεόμενου αέρα. Αυτό γεννά τα ερωτήματα, πρώτον, πόσο πρέπει να συσταλεί η τραχεία για να μεγιστοποιηθεί η ταχύτητα του αέρα, και δεύτερον, αν όντως συστέλλεται τόσο η τραχεία όταν βήχουμε.

Κάνοντας μερικές εύλογες υποθέσεις για την ελαστικότητα του τραχειακού τοιχώματος και για το πώς επιβραδύνεται ο αέρας κοντά στα τοιχώματα, λόγω τριβής, η μέση ταχύτητα ροής v του αέρα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/sec}, \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0,$$

όπου r_0 είναι η ακτίνα ηρεμίας της τραχείας σε cm και c είναι μια θετική σταθερά της οποίας η τιμή εξαρτάται εν μέρει από το μήκος της τραχείας.

Δείξτε ότι η ταχύτητα v είναι μέγιστη όταν $r = (2/3)r_0$, δηλαδή όταν η τραχεία έχει συσταλλεί κατά 33%. Το αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι, όπως επαληθεύεται από ακτινογραφίες, κατά τη διάρκεια του βήχα η τραχεία όντως συστέλλεται περίπου όσο υπολογίσαμε.

Τ (β) Δώστε στο r_0 την τιμή 0,5 και στο c την τιμή 1 και παραστήστε γραφικά την ταχύτητα v στο διάστημα $0 \le r \le 0{,}5$. Επαληθεύει το γράφημα την πρόταση ότι η ταχύτητα v μεγιστοποιείται όταν $r = (2/3)r_0$;

Θεωρία και παραδείγματα

53. *Μια ανισότητα θετικών ακεραίων* Δείξτε ότι αν οι a, b, c, και d είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \ge 16.$$

54. *Η παράγωγος dt/dx στο Παράδειγμα 4*

(α) Δείξτε ότι η

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του x.

(β) Δείξτε ότι η

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

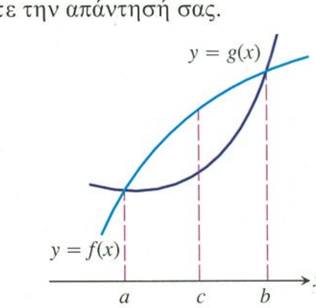
είναι φθίνουσα συνάρτηση του x.

(γ) Δείξτε ότι η

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του x.

55. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f(x)$ και $g(x)$ οι διαφορίσιμες συναρτήσεις που σχεδιάζονται στο ακόλουθο σχήμα. Στο σημείο c η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των καμπυλών είναι μέγιστη. Υπάρχει τίποτε το αξιοσημείωτο σχετικά με τις εφαπτομένες των δύο καμπυλών στο c; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



56. *Μάθετε γράφοντας* Σας ζητείται να προσδιορίσετε αν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές η συνάρτηση $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$.

(α) Εξηγήστε γιατί σας αρκεί να μελετήσετε τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(β) Είναι ποτέ αρνητική η f; Εξηγήστε.

57. *Ολικό μέγιστο*

(α) Η συνάρτηση $y = \cot x - \sqrt{2}\csc x$ εμφανίζει ολικό μέγιστο στο διάστημα $0 < x < \pi$. Βρείτε το.

Τ (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση και συγκρίνετε το γράφημα με την απάντησή σας στο (α).

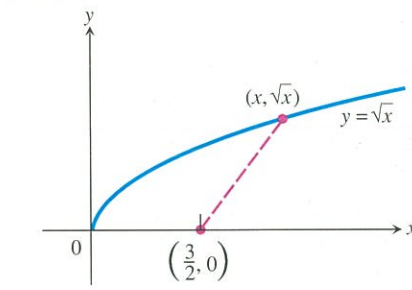
58. *Ολικό ελάχιστο*

(α) Η συνάρτηση $y = \tan x + 3\cot x$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο διάστημα $0 < x < \pi/2$. Βρείτε το.

Τ (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση και συγκρίνετε το γράφημα με την απάντησή σας στο (α).

59. *Απειροστικός λογισμός και γεωμετρία*

(α) Πόσο κοντά στο σημείο $(3/2, 0)$ διέρχεται η καμπύλη $y = \sqrt{x}$; (*Υπόδειξη:* Ελαχιστοποιώντας το *τετράγωνο* της απόστασης, αποφεύγετε τις τετραγωνικές ρίζες.)



Τ (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση της απόστασης και την $y = \sqrt{x}$ σε κοινό σχήμα, και επαληθεύστε έτσι την απάντησή σας στο (α).

60. *Απειροστικός λογισμός και γεωμετρία*

(α) Πόσο κοντά στο σημείο $(1, \sqrt{3})$ διέρχεται το ημικύκλιο $y = \sqrt{16 - x^2}$;

Τ (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση της απόστασης και την $y = \sqrt{16 - x^2}$ σε κοινό σχήμα, και επαληθεύστε έτσι την απάντησή σας στο (α).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

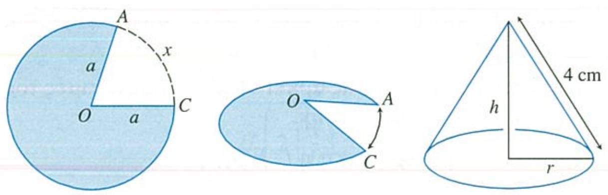
Στις Ασκήσεις 61 και 62, κάνετε χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας.

61. *Γενικευμένο πρόβλημα του κώνου* Κώνος ύψους h και ακτίνας r κατασκευάζεται από επίπεδο κυκλικό δίσκο ακτίνας a cm αν αποκόψουμε έναν κυκλικό τομέα AOC με μήκος τόξου x cm και κατόπιν ενώσουμε τις δυο άκρες OA και OC.

(α) Να βρεθεί ένας τύπος για τον κωνικό όγκο V συναρτήσει των x και a.

(β) Να βρεθούν τα r και h για τον κώνο μέγιστου όγκου αν $a = 4, 5, 6, 8$.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Για τον κώνο μέγιστου όγκου, βρείτε μια απλή σχέση μεταξύ των r και h που να μην περιέχει το a. Εξηγήστε πώς φθάσατε στην έκφραση αυτή.

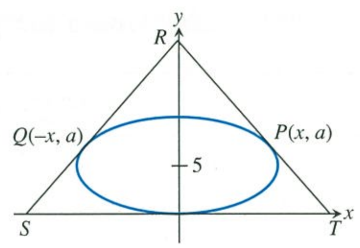


ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

62. *Περιγεγραμμένο τρίγωνο σε έλλειψη* Έστω $P(x, a)$ και $Q(-x, a)$ δύο σημεία στο άνω ήμισυ της ελλείψεως

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

με κέντρο το $(0, 5)$. Φέρνουμε τις εφαπτομένες της έλλειψης στα σημεία Q και P και ορίζουμε έτσι το τρίγωνο RST όπως δείχνεται στο σχήμα.



(α) Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει εμβαδόν

$$A(x) = -f'(x)\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2,$$

όπου $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση με γραφική παράσταση το άνω ήμισυ της έλλειψης.

(β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εμβαδού A; Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του A. Πώς σχετίζονται οι ασύμπτωτες του γραφήματος με το πρόβλημα που εξετάζουμε;

(γ) Προσδιορίστε το ύψος του τριγώνου ελαχίστου εμβαδού. Πώς σχετίζεται αυτό με τη συντεταγμένη y του κέντρου της έλλειψης;

(δ) Επαναλάβετε τα (α) έως και (γ) για την έλλειψη

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y-B)^2}{B^2} = 1$$

με κέντρο το $(0, B)$. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν το ύψος του είναι $3B$.

3.6 Γραμμικοποίηση και διαφορικά

Γραμμικοποίηση • Διαφορικά • Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών • Απόλυτη, σχετική, και ποσοστιαία μεταβολή • Ευαισθησία σε μεταβολές • Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης • Μετατροπή μάζας σε ενέργεια

Μερικές φορές μπορούμε να προσεγγίζουμε περίπλοκες συναρτήσεις με άλλες απλούστερες, οι οποίες παρουσιάζουν την απαιτούμενη ακρίβεια για τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν και είναι ευκολότερες στον χειρισμό τους από τις αρχικές. Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις που θα δούμε εδώ καλούνται *γραμμικοποιήσεις* και βασίζονται στις εφαπτόμενες ευθείες. Άλλου είδους προσεγγιστικές συναρτήσεις θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 8.

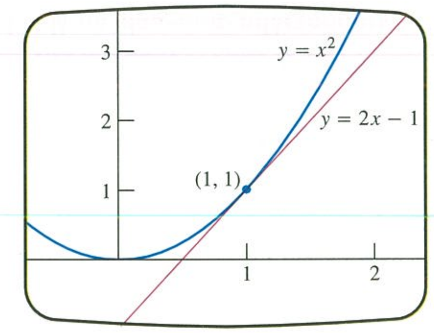
Θα εισαγάγουμε νέες μεταβλητές dx και dy, ορίζοντάς τις με τρόπο που δίνει νέο νόημα στον συμβολισμό του Leibniz dy/dx. Θα συμβολίσουμε με dy το σφάλμα σε μια μέτρηση, ή την ευαισθησία μιας συνάρτησης σε συνθήκες που μεταβάλλονται.

Γραμμικοποίηση

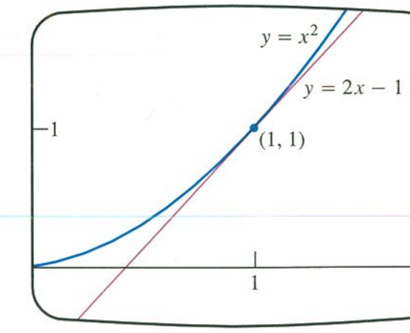
CD-ROM Δικτυότοπος

Όπως βλέπετε στο Σχήμα 3.54, η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2$ πλησιάζει την καμπύλη κοντά στο σημείο επαφής. Για ένα μικρό διάστημα εκατέρωθεν του σημείου επαφής, οι συντεταγμένες y των σημείων της εφαπτομένης προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις συντεταγμένες y των σημείων της καμπύλης. Το φαινόμενο φαίνεται καθαρότερα αν μεγεθύνουμε το γράφημα στο σημείο επαφής ή αν εξετάσουμε πίνακες τιμών της κατακόρυφης απόστασης σημείων της καμπύλης και σημείων της εφαπτομένης κοντά στο σημείο επαφής. Σε τοπική κλίμακα, κάθε διαφορίσιμη καμπύλη συμπεριφέρεται ως ευθεία.

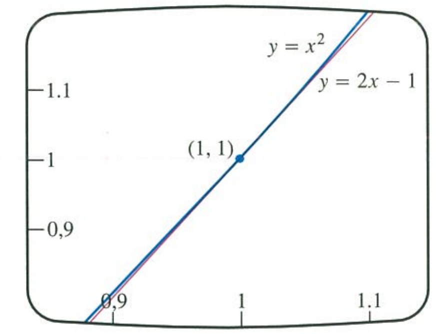
Γενικά, η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε σημείο $x = a$, όπου η f είναι διαφορίσιμη (Σχήμα 3.55), διέρχεται από το σημείο $(a, f(a))$, και έτσι



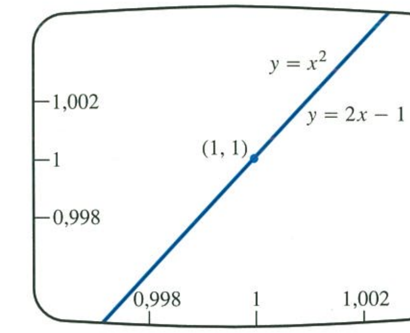
Φαίνεται η $y = x^2$ και η εφαπτομένη της $y = 2x - 1$ στο $(1, 1)$.



Κοντά στο σημείο $(1, 1)$ η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.

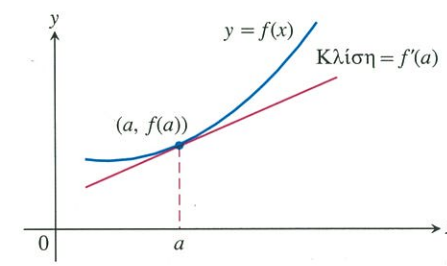


Σε όλο το διάστημα που φαίνεται, η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.



Σε ακόμα μικρότερη περιοχή σχεδίασης, η εφαπτομένη πλησιάζει τόσο πολύ την καμπύλη, ώστε δεν ξεχωρίζει η μια από την άλλη.

ΣΧΗΜΑ 3.54 Όσο περισσότερο μεγεθύνουμε το γράφημα μιας συνάρτησης σε διαφορίσιμο σημείο της, τόσο εξομαλύνεται η καμπύλη μοιάζοντας όλο και περισσότερο με την εφαπτομένη της στο εν λόγω σημείο.



ΣΧΗΜΑ 3.55 Η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = a$ είναι η ευθεία $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

η εξίσωση σημείου-κλίσεως γίνεται

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη είναι η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Για όσο διάστημα παραμένει κοντά στο γράφημα της f, η $L(x)$ αποτελεί καλή προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Ορισμός **Γραμμικοποίηση**

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (1)$$

είναι η **γραμμικοποίηση** της f στο a.

Η προσέγγιση $f(x) \approx L(x)$ είναι η **κανονική γραμμική προσέγγιση** της f στο a. Το σημείο $x = a$ είναι το **κέντρο** της προσέγγισης.

Παράδειγμα 1 Εύρεση γραμμικοποίησης

Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1+x}$ στο $x = 0$ (Σχήμα 3.56).

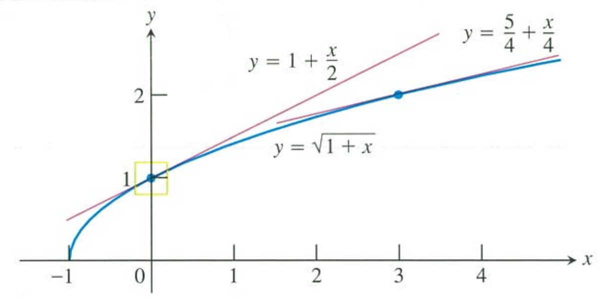
Λύση Εφόσον

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},$$

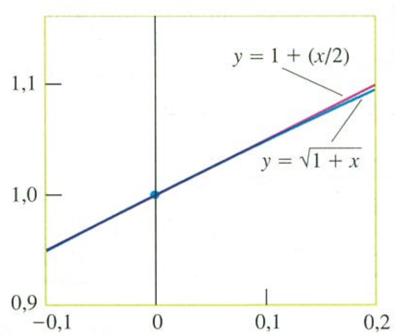
θα έχουμε $f(0) = 1, f'(0) = 1/2$, και

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Δείτε το Σχήμα 3.56.



Σχημα 3.56 Γραφική παράσταση της $y = \sqrt{1+x}$ και των γραμμικοποιήσεών της στα σημεία $x = 0$ και $x = 3$. Το Σχήμα 3.57 δείχνει μια μεγέθυνση του τετραγώνου γύρω από το σημείο 1 του άξονα y.



Σχημα 3.57 Μεγέθυνση του τετραγώνου του Σχήματος 3.56.

Ας δούμε πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ για τιμές του x κοντά στο 0.

Προσέγγιση	|Πραγματική τιμή − προσέγγιση|
$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{0{,}2}{2} = 1{,}10$	$<10^{-2}$
$\sqrt{1{,}05} \approx 1 + \frac{0{,}05}{2} = 1{,}025$	$<10^{-3}$
$\sqrt{1{,}005} \approx 1 + \frac{0{,}005}{2} = 1{,}00250$	$<10^{-5}$

Καθώς απομακρυνόμαστε από το μηδέν, η ακρίβεια της προσέγγισης μειώνεται. Για παράδειγμα, για $x = 2$, η γραμμικοποίηση δίνει το 2 ως προσέγγιση του $\sqrt{3}$, αποτέλεσμα που δεν είναι ακριβές ούτε καν στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο.

Μην παρασυρθείτε από τους υπολογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος και νομίσετε ότι ο ρόλος της γραμμικοποίησης τελειώνει μόλις προμηθευτούμε έναν υπολογιστή τσέπης. Στην πράξη δεν θα εφαρμόζαμε ποτέ γραμμικοποίηση για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας κάποιου αριθμού. Η χρησιμότητα της γραμμικοποίησης έγκειται στη δυνατότητα που μας παρέχει να αντικαθιστούμε έναν περίπλοκο τύπο με κάποιον απλούστερο σε όλη την έκταση ενός διαστήματος τιμών. Για παράδειγμα, αν πρέπει να εργαστούμε με τη συνάρτηση $\sqrt{1+x}$ για x κοντά στο 0 και μας επιτρέπεται ένα μικρό σφάλμα, τότε αντ' αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα $1 + (x/2)$. Φυσικά, θα πρέπει να γνωρίζουμε πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα που υπεισέρχεται έτσι στους υπολογισμούς μας. Το ζήτημα αυτό θα το εξετάσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 8.

Μια γραμμική προσέγγιση γίνεται συνήθως λιγότερο ακριβής καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της. Όπως δείχνει το Σχήμα 3.56, η προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ παραείναι χονδροειδής για να είναι χρήσιμη κοντά στο $x = 3$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να γραμμικοποιήσουμε στο $x = 3$.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
François Viète
(1540-1603)

Παράδειγμα 2 Εύρεση δεύτερης γραμμικοποίησης

Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1+x}$ στο $x = 3$.

Λύση Από την Εξίσωση (1), βρίσκουμε τη γραμμικοποίηση της f στο $x = 3$. Θέτοντας

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

παίρνουμε

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Για $x = 3{,}2$, η γραμμικοποίηση του Παραδείγματος 2 δίνει

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3{,}2}{4} = 1{,}250 + 0{,}800 = 2{,}050,$$

αποτέλεσμα που διαφέρει λιγότερο του ενός χιλιοστού από την ακριβή τιμή $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}04939$. Η γραμμικοποίηση του Παραδείγματος 1 δίνει

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx 1 + \frac{3{,}2}{2} = 1 + 1{,}6 = 2{,}6,$$

το οποίο απέχει από την ακριβή τιμή περισσότερο από 25%.

Παράδειγμα 3 Εύρεση ριζών και δυνάμεων

Η σημαντικότερη γραμμική προσέγγιση για ρίζες και δυνάμεις είναι

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ κοντά στο } 0\text{· } k \text{ τυχών αριθμός}) \quad (2)$$

(Άσκηση 7). Η προσέγγιση αυτή, που ισχύει για τιμές του x κοντά στο μηδέν, έχει ευρύ πεδίο εφαρμογών.

Συνήθεις γραμμικές προσεγγίσεις, $x \approx 0$

$\sin x \approx x$

$\cos x \approx 1$

$\tan x \approx x$

$(1+x)^k \approx 1 + kx$

(Ασκήσεις 6 και 7)

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του Παραδείγματος 3

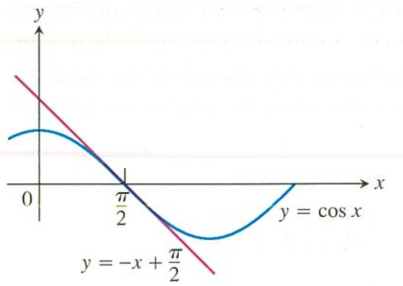
Οι ακόλουθες προσεγγίσεις απορρέουν από το Παράδειγμα 3.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$
$k = 1/2$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x$$
$k = -1$· αντικαθιστούμε το x με το $-x$.

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4$$
$k = 1/3$· αντικαθιστούμε το x με το $5x^4$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$
$k = -1/2$· αντικαθιστούμε το x με το $-x^2$.



Σχημα 3.58 Το γράφημα της $f(x) = \cos x$ και η γραμμικοποίησή της στο $x = \pi/2$. Κοντά στο $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$. (Παράδειγμα 5)

Παράδειγμα 5 Εύρεση γραμμικοποίησης

Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ στο $x = \pi/2$ (Σχήμα 3.58).

Λύση Εφόσον $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$, και $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, έχουμε

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Διαφορικά

Μερικές φορές συμβολίζουμε με dy/dx την παράγωγο του y ως προς x. Το σύμβολο αυτό, παρότι μοιάζει με λόγο δυο ποσοτήτων, δεν είναι κάτι τέτοιο. Εισάγουμε τώρα δυο νέες μεταβλητές dx και dy που έχουν την ιδιότητα ότι αν υπάρχει ο λόγος τους, θα ισούται με την παράγωγο.

Ορισμός Διαφορικά

Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Το **διαφορικό dx** είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Το **διαφορικό dy** ισούται με

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Σε αντίθεση με την ανεξάρτητη μεταβλητή dx, η μεταβλητή dy είναι πάντα εξαρτημένη. Εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το dx.

Παράδειγμα 6 Εύρεση του διαφορικού dy

Να βρεθεί το dy αν

(α) $y = x^5 + 37x$ **(β)** $y = \sin 3x$.

Λύση

(α) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$ **(β)** $dy = (3\cos 3x)\,dx$

Αν $dx \neq 0$, τότε το πηλίκο του διαφορικού dy προς το διαφορικό dx ισούται με την παράγωγο $f'(x)$ διότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x).$$

Συνηθίζεται να γράφουμε

$$df = f'(x)\,dx$$

αντί για $dy = f'(x)\,dx$, οπότε καλούμε το df **διαφορικό της f.** Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2 - 6$, τότε

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Κάθε τύπος παραγώγισης, π.χ. ο

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{ή} \quad \text{ο} \quad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

έχει μια αντίστοιχη διαφορική μορφή, π.χ. την

$$d(u+v) = du + dv \quad \text{ή} \quad \text{την} \quad d(\sin u) = \cos u\,du.$$

Το νόημα των dx και dy

Τις περισσότερες φορές, το διαφορικό dx της ανεξάρτητης μεταβλητής ισούται με τη μεταβολή Δx, αλλά εμείς δεν επιβάλαμε στον ορισμό τέτοιον περιορισμό.

Σε αντίθεση με την ανεξάρτητη μεταβλητή dx, η μεταβλητή dy είναι πάντοτε εξαρτημένη. Εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το dx.

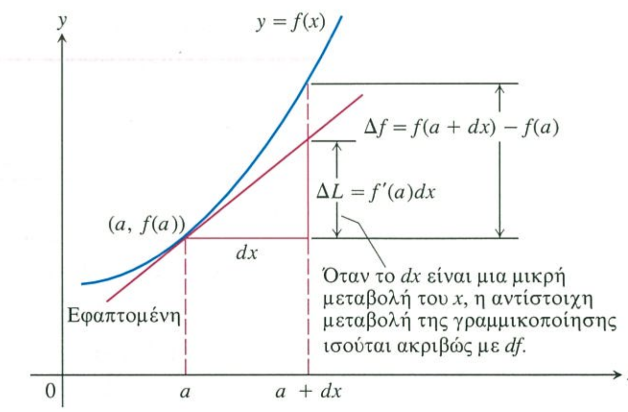
Παράδειγμα 7 Εύρεση διαφορικού συναρτήσεως

(α) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(β) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$

Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών

Έστω ότι γνωρίζουμε την τιμή μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως $f(x)$ σε ένα σημείο a και επιθυμούμε να προβλέψουμε πόσο θα μεταβληθεί η συγκεκριμένη τιμή της αν μετακινηθούμε στο γειτονικό σημείο $a + dx$. Αν το dx είναι μικρό, τόσο η f όσο και η γραμμικοποίησή της L στο a θα μεταβληθούν κατά την ίδια περίπου ποσότητα (Σχήμα 3.59). Και αφού οι τιμές της L υπολογίζονται εύκολα, η εύρεση της μεταβολής της L θα δίνει μια πρακτικά καλή εκτίμηση της μεταβολής της f.



Σχημα 3.59 Προσεγγίζουμε τη μεταβολή της συνάρτησης f με τη μεταβολή της γραμμικοποίησης της f.

Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του Σχήματος 3.59, η μεταβολή της f είναι

$$\Delta f = f(a + dx) - f(a).$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της L είναι

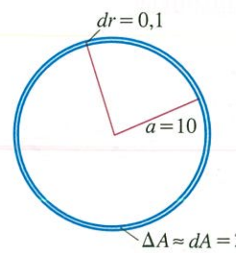
$$\begin{aligned} \Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \\ &= f'(a)\,dx. \end{aligned}$$

Έτσι, το διαφορικό $df = f'(x)\,dx$ αποκτά μια γεωμετρική ερμηνεία: Η τιμή του df στο $x = a$ ισούται με ΔL, που είναι η μεταβολή της γραμμικοποίησης της f που αντιστοιχεί στη μεταβολή dx.

Διαφορική εκτίμηση μεταβολής

Έστω ότι η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$. Η κατά προσέγγιση μεταβολή της τιμής της f καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο $a + dx$ είναι

$$df = f'(a)\,dx.$$



Σχημα 3.60 Όταν το dr είναι μικρό συγκριτικά με το a, για παράδειγμα όταν $dr = 0,1$ και $a = 10$, το διαφορικό $dA = 2\pi a\, dr$ προσεγγίζει ικανοποιητικά το ΔA. (Παράδειγμα 8)

Παράδειγμα 8 Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών

Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνει από $a = 10$ m σε $a = 10,1$ m (Σχήμα 3.60). Αν μια πρώτη εκτίμηση της αύξησης του εμβαδού A του κυκλικού δίσκου δίδεται από το διαφορικό dA, να συγκρίνετε την εκτίμηση αυτή με την πραγματική μεταβολή ΔA.

Λύση Εφόσον $A = \pi r^2$, η εκτιμώμενη μεταβολή ισούται με

$$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0,1) = 2\pi\ \mathrm{m}^2.$$

Η πραγματική μεταβολή είναι

$$\Delta A = \pi(10,1)^2 - \pi(10)^2 = (102,01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0,01\pi}_{\text{σφάλμα}})\ \mathrm{m}^2.$$

Απόλυτη, σχετική, και ποσοστιαία μεταβολή

Καθώς μετακινούμαστε από το a στο γειτονικό σημείο $a + dx$, μπορούμε να περιγράψουμε τη μεταβολή της f με τρεις τρόπους:

	Πραγματική	**Εκτιμώμενη**
Απόλυτη μεταβολή	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\, dx$
Σχετική μεταβολή	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Ποσοστιαία μεταβολή	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Παράδειγμα 9 Υπολογισμός ποσοστιαίας μεταβολής

Η εκτιμώμενη ποσοστιαία μεταβολή του εμβαδού του κύκλου στο Παράδειγμα 8 είναι

$$\frac{dA}{A(a)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\%.$$

Η πραγματική ποσοστιαία μεταβολή είναι

$$\frac{\Delta A}{A(a)} \times 100 = \frac{2,01\pi}{100\pi} \times 100 = 2,01\%.$$

Παράδειγμα 10 Έμφραξη αρτηριών

Στα τέλη της δεκαετίας του 1830, ο Γάλλος φυσιολόγος Jean Poiseuille (Πουαζόι) ανακάλυψε έναν μαθηματικό τύπο που περιγράφει πόσο πρέπει να διασταλεί η ακτίνα μιας μερικώς εμφραγμένης αρτηρίας για να αποκατασταθεί η κανονική ροή του αίματος. Ο τύπος του Poiseuille, που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα, είναι

$$V = kr^4,$$

και μας λέει ότι ο όγκος V του υγρού που διέρχεται από μικρό σωλήνα ανά μονάδα χρόνου υπό σταθερή πίεση είναι ανάλογος της τέταρτης δύναμης της ακτίνας r του σωλήνα. Πώς θα επηρεάσει τον όγκο V μια αύξηση της ακτίνας r κατά 10%;

Λύση Τα διαφορικά των r και V συνδέονται μέσω της εξίσωσης

$$dV = \frac{dV}{dr}\, dr = 4kr^3\, dr.$$

Αγγειογράφηση
Αδιαφανής χρωστική ουσία εγχέεται στη μερικώς εμφραγμένη αρτηρία, καθιστώντας δυνατή την παρατήρησή της με ακτίνες Χ. Έτσι εντοπίζεται το ακριβές σημείο της έμφραξης και διαπιστώνεται η σοβαρότητα του προβλήματος.

Αγγειοπλαστική
Στο εσωτερικό της αρτηρίας εισάγεται καθετήρας και το μπαλονάκι που βρίσκεται στην απόληξή του διογκώνεται, διευρύνοντας την αρτηρία στο σημείο έμφραξης.

Η σχετική μεταβολή του V είναι

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\, dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}.$$

Η σχετική μεταβολή του V είναι τετραπλάσια της σχετικής μεταβολής του r, κι έτσι μια αύξηση κατά 10% του r θα οδηγήσει σε αύξηση της ροής κατά 40%.

Ευαισθησία σε μεταβολές

Η εξίσωση $df = f'(x)\, dx$ μας λέει πόσο *ευαίσθητη* είναι η τιμή εξόδου της f σε μεταβολές των τιμών εισόδου, για διάφορα x. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της f' στο x, τόσο μεγαλύτερες συνέπειες προκαλεί μια δεδομένη μεταβολή dx.

Παράδειγμα 11 Εύρεση του βάθους πηγαδιού

Σας ζητείται να υπολογίσετε το βάθος πηγαδιού κάνοντας χρήση της εξίσωσης $s = 4,9t^2$ και χρονομετρώντας πόσο κάνει να ακουστεί ο παφλασμός μιας πέτρας από τη στιγμή που την αφήνετε να πέσει στο πηγάδι. Πόση ευαισθησία εμφανίζουν οι υπολογισμοί σας σε σφάλμα 0,1 sec στη χρονομέτρηση;

Λύση Το ds στην εξίσωση

$$ds = 9,8t\, dt$$

εξαρτάται από τον χρόνο t. Για $t = 2$ sec και $dt = 0,1$, το σφάλμα στον υπολογισμό είναι

$$ds = 9,8(2)(0,1) = 1,96\ \mathrm{m}.$$

Τρία δευτερόλεπτα αργότερα, για $t = 5$ sec, το ίδιο dt δίνει σφάλμα

$$ds = 9,8(5)(0,1) = 4,9\ \mathrm{m}.$$

Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης

Έστω συνάρτηση $f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και έστω Δx μια μεταβολή του x. Υπάρχουν δύο τρόποι περιγραφής της μεταβολής της f καθώς το x μεταβάλλεται από a σε $a + \Delta x$:

Η πραγματική μεταβολή: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Η διαφορική εκτίμηση: $df = f'(a)\, \Delta x$.

Πόσο αξιόπιστα προσεγγίζει το διαφορικό df τη μεταβολή Δf;

Μετράμε το σφάλμα προσέγγισης αφαιρώντας το df από το Δf:

$$\begin{aligned}\text{Προσεγγιστικό σφάλμα} &= \Delta f - df\\ &= \Delta f - f'(a)\,\Delta x\\ &= f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\,\Delta x\\ &= \underbrace{\left(\overbrace{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}^{\Delta f} - f'(a)\right)}_{\text{Έστω } \epsilon \text{ η ποσότητα αυτή}}\Delta x\\ &= \epsilon\cdot\Delta x.\end{aligned}$$

Καθώς $\Delta x \to 0$, το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

τείνει στο $f'(a)$ (θυμηθείτε τον ορισμό της παραγώγου $f'(a)$), και η ποσότητα εντός της παρενθέσεως γίνεται ένας πολύ μικρός αριθμός (που τον ονομάζουμε συνεπώς ϵ). Ουσιαστικά, $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Για μικρό Δx, το προσεγγιστικό σφάλμα $\epsilon\,\Delta x$ είναι ακόμη μικρότερο.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{πραγματική}\\ \text{μεταβολή}}} = \underbrace{f'(a)\,\Delta x}_{\substack{\text{εκτιμώμενη}\\ \text{μεταβολή}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{σφάλμα}}$$

Παρόλο που δεν ξέρουμε ακριβώς πόσο μικρό είναι το σφάλμα, και ούτε μπορούμε να πούμε περισσότερα επί του θέματος προτού μελετήσουμε το Κεφάλαιο 8, υπάρχει κάτι που αξίζει της προσοχής μας στο σημείο αυτό: η *μορφή* της τελευταίας εξίσωσης.

Μεταβολή της $y = f(x)$ κοντά στο $x = a$

Αν η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$ και το x μεταβάλλεται από a σε $a + \Delta x$, η μεταβολή Δy της f δίδεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad (3)$$

όπου $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$.

Μετατροπή μάζας σε ενέργεια

Παράδειγμα 12 Χρήση προσεγγίσεων στη φυσική του Einstein

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma,$$

εμπεριέχει την υπόθεση ότι η μάζα είναι σταθερή, αλλά γνωρίζουμε ότι αυτό δεν είναι αυστηρά σωστό εφόσον η μάζα ενός σώματος αυξάνεται με την ταχύτητά του. Στον ορθότερο τύπο του Einstein, η μάζα έχει την τιμή

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

όπου η «μάζα ηρεμίας» m_0 παριστάνει τη μάζα ακίνητου σώματος και c είναι η ταχύτητα του φωτός που ισούται με 300.000 km/sec περίπου. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (4)$$

από το Παράδειγμα 4 για να εκτιμήσετε τη μεταβολή της μάζας Δm εξαιτίας της κίνησης με ταχύτητα v.

Λύση

Όταν το v είναι πολύ μικρότερο του c, η ποσότητα v^2/c^2 είναι σχεδόν μηδενική και είναι ικανοποιητική η χρήση της προσέγγισης

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

[Εξίσωση (4) με $x = v/c$], οπότε

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

δηλαδή

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \qquad (5)$$

Η Εξίσωση (5) εκφράζει την αύξηση της μάζας λόγω αύξησης της ταχύτητας v.

Ερμηνεία

Στη νευτώνεια φυσική, $(1/2)m_0v^2$ είναι η κινητική ενέργεια (ΚΕ) του σώματος, οπότε αν ξαναγράψουμε την Εξίσωση (5) στη μορφή

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2,$$

βλέπουμε ότι

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{ΚΕ}),$$

δηλαδή

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{ΚΕ}). \qquad (6)$$

Με άλλα λόγια, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας Δ(ΚΕ) καθώς το σώμα μεταβαίνει από ταχύτητα 0 σε ταχύτητα v ισούται κατά προσέγγιση με $(\Delta m)c^2$.

Αντικαθιστώντας το c με την αριθμητική του τιμή 3×10^8 m/sec, η Εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή

$$\Delta(\text{ΚΕ}) \approx 90.000.000.000.000.000\ \Delta m \text{ Joule} \qquad \text{Η μάζα σε kg}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι μια μικρή μεταβολή στη μάζα προξενεί μεγάλη μεταβολή στην ενέργεια. Η ενέργεια που απελευθερώνει μια ατομική βόμβα 20 κιλοτόνων, για παράδειγμα, προκύπτει από τη μετατροπή ενός, μόλις, γραμμαρίου μάζας σε ενέργεια. Τα προϊόντα δηλαδή της έκρηξης ζυγίζουν μόλις 1 g λιγότερο από το αρχικό υλικό προ της έκρηξης. Ένα κέρμα του ενός λεπτού ζυγίζει περίπου 3 g!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.6

CD-ROM Δικτυότοπος

Εύρεση γραμμικοποιήσεων

Στις Ασκήσεις 1-5, βρείτε τη γραμμικοποίηση $L(x)$ της συναρτήσεως $f(x)$ στο $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$
6. *Συνήθεις γραμμικές προσεγγίσεις στο $x = 0$* Να βρεθούν οι γραμμικοποιήσεις των ακόλουθων συναρτήσεων στο $x = 0$.

   (α) $\sin x$ **(β)** $\cos x$ **(γ)** $\tan x$

Γραμμικοποιήσεις για δυνάμεις και ρίζες

CD-ROM Δικτυότοπος

7. Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1 + x)^k$ στο $x = 0$ είναι $L(x) = 1 + kx$.

CD-ROM Δικτυότοπος

8. Χρησιμοποιήστε τη γραμμική προσέγγιση $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ για να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο μηδέν.

(α) $f(x) = (1 - x)^6$ (β) $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

(γ) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ (δ) $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

(ε) $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$

(στ) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2 + x}\right)^2}$

Η γραμμικοποίηση ως προσέγγιση

Στις Ασκήσεις 9-12, επιλέξτε μια γραμμικοποίηση με κέντρο όχι το $x = a$ αλλά ένα κοντινό σημείο όπου η συνάρτηση και η παράγωγος υπολογίζονται εύκολα. Δηλώστε ποια γραμμικοποίηση κάνατε και ποιο το κέντρο της.

9. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad a = -0{,}9$

10. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8{,}5$

11. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad a = 1{,}3$

12. $f(x) = \cos x, \quad a = 1{,}7$

13. *Γρηγορότερα κι από κομπιουτεράκι* Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ για να εκτιμήσετε τις ακόλουθες ποσότητες.

(α) $(1{,}0002)^{50}$ (β) $\sqrt[3]{1{,}009}$

14. *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sin x$ στο $x = 0$. Πώς σχετίζεται αυτή με τις επιμέρους γραμμικοποιήσεις των ποσοτήτων $\sqrt{x + 1}$ και $\sin x$ στο $x = 0$;

Παράγωγοι σε διαφορική μορφή

Στις Ασκήσεις 15-24, βρείτε το dy.

15. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$ **16.** $y = x\sqrt{1 - x^2}$

17. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ **18.** $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

19. $2y^{3/2} + xy - x = 0$ **20.** $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

21. $y = \sin(5\sqrt{x})$ **22.** $y = \cos(x^2)$

23. $y = 4\tan(x^3/3)$ **24.** $y = \sec(x^2 - 1)$

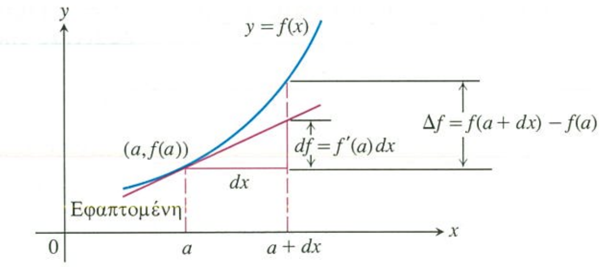
Προσεγγιστικό σφάλμα

Στις Ασκήσεις 25-28, η συνάρτηση f μεταβάλλεται καθώς το x μεταβαίνει από το a στο $a + dx$. Βρείτε

(α) την απόλυτη μεταβολή $\Delta f = f(a + dx) - f(a)$

(β) την εκτιμώμενη μεταβολή $df = f'(a)\,dx$

(γ) το προσεγγιστικό σφάλμα $|\Delta f - df|$.



25. $f(x) = x^2 + 2x, \quad a = 0, \quad dx = 0{,}1$

26. $f(x) = x^3 - x, \quad a = 1, \quad dx = 0{,}1$

27. $f(x) = x^{-1}, \quad a = 0{,}5, \quad dx = 0{,}05$

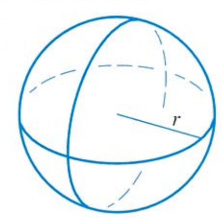
28. $f(x) = x^4, \quad a = 1, \quad dx = 0{,}01$

Διαφορικές εκτιμήσεις μεταβολών

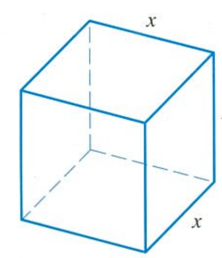
Στις Ασκήσεις 29-32, γράψτε έναν διαφορικό τύπο που να εκτιμά την εκάστοτε μεταβολή όγκου ή εμβαδού επιφανείας.

29. *Όγκος* Η μεταβολή του όγκου σφαίρας $V = (4/3)\pi r^3$ όταν η ακτίνα της μεταβάλλεται από a σε $a + dr$

30. *Εμβαδόν επιφανείας* Η μεταβολή του εμβαδού επιφάνειας σφαίρας $S = 4\pi r^2$ όταν η ακτίνα της μεταβάλλεται από a σε $a + dr$



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$



$V = x^3, \quad S = 6x^2$

31. *Όγκος* Η μεταβολή του όγκου κύβου $V = x^3$ όταν τα μήκη των ακμών του μεταβάλλονται από a σε $a + dx$

32. *Εμβαδόν επιφανείας* Η μεταβολή του εμβαδού επιφάνειας κύβου $S = 6x^2$ όταν τα μήκη των ακμών του μεταβάλλονται από a σε $a + dx$

Εφαρμογές

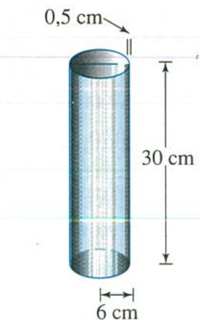
33. *Κύκλος που διαστέλλεται* Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται από 2,00 σε 2,02 m.

(α) Εκτιμήστε την προκύπτουσα μεταβολή του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

(β) Εκφράστε την εκτίμηση αυτή ως ποσοστό του αρχικού εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

34. *Δέντρο που μεγαλώνει* Ένα δέντρο είχε κορμό διαμέτρου 10 cm. Το επόμενο έτος, η περιφέρεια του κορμού αυξήθηκε κατά 2 cm. Πόσο περίπου αυξήθηκε η διάμετρος καθώς και το εμβαδόν διατομής του κορμού;

35. *Εκτίμηση όγκου* Εκτιμήστε πόσος όγκος περιέχεται σε κυλινδρικό κέλυφος ύψους 30 cm, ακτίνας 6 cm, και πάχους 0,5 cm.



36. *Εκτίμηση ύψους* Ένας τεχνικός που στέκεται σε απόσταση 30 m από τη βάση ενός κτιρίου, μετρά τη γωνία με την οποία φαίνεται η κορυφή του κτιρίου, και τη βρίσκει ίση με 75°. Αν θέλουμε το σφάλμα στην εκτίμηση του ύψους του κτιρίου να μην υπερβαίνει το 4%, τότε με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η γωνία αυτή;

37. *Επιτρεπτό σφάλμα* Το ύψος ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου ισούται με την ακτίνα του, οπότε ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi h^3$. Ο όγκος πρέπει να υπολογιστεί με σφάλμα το πολύ 1% της πραγματικής τιμής του. Υπολογίστε κατά προσέγγιση το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη μέτρηση του h, και εκφράστε το ως ποσοστό επί της πραγματικής τιμής του h.

38. *Επιτρεπτό σφάλμα*

(α) Με πόση περίπου ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η εσωτερική διάμετρος μιας κυλινδρικής δεξαμενής ύψους 10 m, έτσι ώστε ο υπολογισμός της χωρητικότητάς της να έχει σφάλμα μικρότερο του 1%;

(β) Με πόση περίπου ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η εξωτερική διάμετρος της ίδιας δεξαμενής έτσι ώστε αν υπολογίσουμε την απαιτούμενη ποσότητα μπογιάς για να βαφτεί η πλευρική επιφάνεια της δεξαμενής, να μην κάνουμε σφάλμα μεγαλύτερο του 5%;

39. *Έκδοση νομισμάτων* Το νομισματοκοπείο πρόκειται να εκδόσει μια σειρά νομισμάτων. Περίπου πόσο σφάλμα dr στην ακτίνα των νομισμάτων είναι επιτρεπτό, ώστε κάθε νόμισμα να μην αποκλίνει περισσότερο από 1/1000 από το ιδανικό του βάρος; Υποθέστε ότι το πάχος κάθε νομίσματος δεν μεταβάλλεται.

40. *Σχεδιάζοντας τη μεταβολή του όγκου ενός κύβου* Ο όγκος $V = x^3$ ενός κύβου με μήκη πλευρών x αυξάνεται κατά ΔV όταν το x αυξηθεί κατά Δx. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να δείξετε πώς η μεταβολή ΔV μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά ως το άθροισμα των όγκων

(α) τριών πλακών με διαστάσεις x επί x επί Δx, και

(β) τριών ράβδων με διαστάσεις x επί Δx επί Δx, και

(γ) ενός κύβου με διαστάσεις Δx επί Δx επί Δx.

Ο διαφορικός τύπος $dV = 3x^2\,dx$ περιλαμβάνει μονάχα τη συνεισφορά των τριών πλακών.

41. *Η επίδραση που ασκούν στην καρδιά οι ελιγμοί πτήσεως* Το μηχανικό έργο που παράγεται κατά τη λειτουργία της κυριότερης αντλίας της καρδιάς, της αριστερής κοιλίας, δίδεται από την εξίσωση

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

όπου W είναι το έργο ανά μονάδα χρόνου, P είναι η μέση πίεση του αίματος, V είναι ο όγκος του αίματος που αντλείται σε μοναδιαίο χρόνο, δ είναι το ειδικό βάρος του αίματος, v η μέση ταχύτητα του αίματος καθώς εξέρχεται από την κοιλία, και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για σταθερά P, V, δ, και v, το W γίνεται συνάρτηση του g, και η εξίσωση παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ σταθερές}).$$

Ως μέλος της ιατρικής ομάδας της NASA, θέλετε να ξέρετε πόσο ευαίσθητο είναι το W σε φαινομενικές μεταβολές του g εξαιτίας των ελιγμών πτήσεως, αλλά η μεταβολή αυτή του W εξαρτάται και από την αρχική τιμή του g. Αποφασίζετε να συγκρίνετε την επίδραση που έχει στο W μια δεδομένη μεταβολή dg στη Σελήνη, όπου $g = 1{,}6$ m/sec², με την επίδραση που η ίδια μεταβολή dg θα είχε στη Γη, όπου $g = 9{,}8$ m/sec². Χρησιμοποιήστε την απλοποιημένη εξίσωση που δίδεται παραπάνω για να βρείτε τον λόγο $dW_{\text{Σελήνη}}$ προς $dW_{\text{Γη}}$.

42. *Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας* Όταν κρατάμε σταθερό το μήκος L ενός ρολογιού με εκκρεμές ελέγχοντας τη θερμοκρασία, η περίοδος T του εκκρεμούς εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Συνεπώς, αν μετακινούμε το εκκρεμές από τόπο σε τόπο στη γήινη επιφάνεια, η περίοδος θα μεταβάλλεται εξαιτίας της μεταβολής του g. Μετρώντας και καταγράφοντας το ΔT, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή του g από την εξίσωση $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ που συσχετίζει τα T, g, και L.

(α) Με το L σταθερό και το g ως ανεξάρτητη μεταβλητή, υπολογίστε το dT και χρησιμοποιήστε το στα (β) και (γ).

(β) *Μάθετε γράφοντας* Αν αυξηθεί το g, τότε το T θα αυξηθεί ή θα μειωθεί; Το ρολόι θα πηγαίνει τότε πιο γρήγορα ή πιο αργά; Εξηγήστε.

(γ) Ένα ρολόι με εκκρεμές μήκους 100 cm μετακινείται από τοποθεσία όπου $g = 980$ cm/sec² σε μια νέα τοποθεσία. Η μετακίνηση αυτή προκαλεί μια αύξηση της περιόδου κατά $dT = 0{,}001$ sec. Βρείτε το dg και εκτιμήστε την τιμή του g στη νέα τοποθεσία.

T **43.** *Μεγεθύνοντας για να «δούμε» τη διαφορισιμότητα* Είναι καμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις διαφορίσιμη στο $x = 0$;

$$f(x) = |x| + 1, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 0{,}0001} + 0{,}99$$

(α) Ξέρουμε ήδη ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$, όπου το γράφημά της εμφανίζει γωνιώδη χαρακτήρα. Σχεδιάστε την f και μεγεθύνετε αρκετές φορές το γράφημα στο σημείο $(0, 1)$. Δείχνει καθόλου ίχνη «εξομάλυνσης» το γωνιακό σημείο;

(β) Κάνετε το ίδιο με τη συνάρτηση g. Δείχνει καθόλου ίχνη «εξομάλυνσης» το γράφημα της g; Γνωρίζουμε ότι η g *είναι* διαφορίσιμη στο $x = 0$ και μάλιστα έχει οριζόντια εφαπτομένη εκεί.

(γ) Πόσες μεγεθύνσεις απαιτούνται για να φαίνεται το γράφημα της g ακριβώς σαν μια οριζόντια ευθεία;

(δ) Σχεδιάστε τώρα την f και την g *μαζί*, δηλαδή σε ενιαίο σχήμα. Οι δυο καμπύλες μοιάζουν ταυτόσημες προτού αρχίσετε τις μεγεθύνσεις. Η διαφορίσιμη συνάρτηση τελικά εξομαλύνεται, ενώ η μη διαφορίσιμη συνάρτηση παραμένει εντυπωσιακά αμετάβλητη.

Τ **44.** *Μέτρηση της παραγώγου από το γράφημα* Η ιδέα ότι οι διαφορίσιμες καμπύλες εξομαλύνονται όταν μεγεθυνθούν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τις τιμές των παραγώγων συναρτήσεων σε διάφορα σημεία τους. Μεγεθύνουμε την καμπύλη στο σημείο που μας ενδιαφέρει μέχρις ότου το τμήμα της που βλέπουμε να μοιάζει με ευθεία, και κατόπιν μετράμε πάνω στο γράφημα την κλίση της εξομαλυνθείσας καμπύλης.

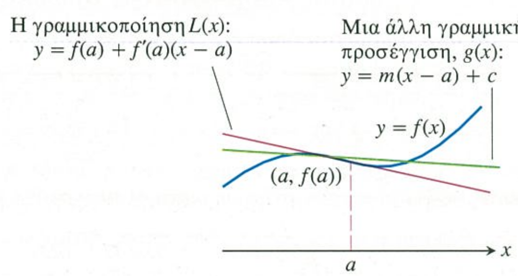
(α) Για να δείτε πώς εξελίσσεται η διαδικασία, κάντε μια πρώτη δοκιμή με τη συνάρτηση $y = x^2$ στο $x = 1$. Η κλίση που μετράτε θα πρέπει να ισούται με 2.

(β) Κατόπιν, εφαρμόστε τη διαδικασία στην καμπύλη $y = e^x$ στα σημεία $x = 1$, $x = 0$, και $x = -1$. Συγκρίνετε την εκτίμηση της παραγώγου που κάνατε με την τιμή τής e^x στο εκάστοτε σημείο. Διακρίνετε κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά; Δοκιμάστε και με άλλες τιμές του x.

45. *Η γραμμικοποίηση είναι η καλύτερη γραμμική προσέγγιση* (Γι' αυτό και τη χρησιμοποιούμε.) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x=a$ και ότι η $g(x)=m(x-a)+c$ είναι μια γραμμική συνάρτηση, όπου m και c σταθερές. Αν το σφάλμα $E(x) = f(x) - g(x)$ ήταν ικανοποιητικά μικρό στο $x = a$, θα θέλαμε να επιλέξουμε την g ως γραμμική προσέγγιση της f, αντί της γραμμικοποίησης $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Δείξτε ότι αν επιβάλουμε στην g τους περιορισμούς

1. $E(a) = 0$ — Το προσεγγιστικό σφάλμα μηδενίζεται για $x = a$.
2. $\lim_{x\to a} \dfrac{E(x)}{x-a} = 0$ — Το σφάλμα είναι ασήμαντο συγκρινόμενο με το $x - a$.

τότε $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Συνεπώς, η γραμμικοποίηση $L(x)$ αποτελεί τη μόνη γραμμική προσέγγιση της οποίας το σφάλμα και μηδενίζεται στο $x = a$ και είναι αμελητέο σε σύγκριση με την ποσότητα $x - a$.



46. *Δευτεροβάθμιες προσεγγίσεις*

(α) Έστω $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ μια δευτεροβάθμια προσέγγιση της $f(x)$ στο $x = a$ με τις ιδιότητες:

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$

Προσδιορίστε τους συντελεστές b_0, b_1, και b_2.

(β) Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $f(x) = 1/(1 - x)$ στο $x = 0$.

Τ **(γ)** Παραστήστε γραφικά την $f(x) = 1/(1 - x)$ και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της στο $x = 0$. Κατόπιν μεγεθύνετε και τα δύο γραφήματα στο σημείο $(0, 1)$. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

Τ **(δ)** Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $g(x) = 1/x$ στο $x = 1$. Παραστήστε γραφικά σε κοινό σχήμα την g και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

Τ **(ε)** Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $h(x) = \sqrt{1 + x}$ στο $x = 0$. Παραστήστε γραφικά σε κοινό σχήμα την h και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

(στ) Ποιες είναι οι γραμμικοποιήσεις των f, g, και h στα αντίστοιχα σημεία των (β), (δ), και (ε);

47. Η προσέγγιση της $\sqrt{1 + x}$ από τη γραμμικοποίησή της στην αρχή των αξόνων θα πρέπει να βελτιώνεται καθώς $x \to 0$. Υποστηρίξτε την πρόταση αυτή δείχνοντας ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1 + (x/2)} = 1.$$

48. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ έχει μια οριζόντια εφαπτομένη στο $x = a$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη γραμμικοποίηση της f στο $x = a$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Τ **49.** *Γραμμικοποιήσεις σε σημεία καμπής* Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.58, οι γραμμικοποιήσεις αποβαίνουν ιδιαίτερα ικανοποιητικές σε σημεία καμπής. Το γιατί θα το καταλάβετε στο Κεφάλαιο 8. Ως ένα άλλο παράδειγμα, σχεδιάστε την *σφιοειδή του Νεύτωνα*, $f(x) = 4x/(x^2+1)$, σε κοινό σχήμα με τις γραμμικοποιήσεις της στα σημεία $x = 0$ και $x = \sqrt{3}$.

50. *Μάθετε γράφοντας: Επαναλαμβανόμενος υπολογισμός ρίζας*

(α) Αφού πληκτρολογήσετε τον αριθμό 2 στο κομπιουτεράκι σας, υπολογίστε διαδοχικές τετραγωνικές ρίζες πατώντας κατ' επανάληψη το πλήκτρο της τετραγωνικής ρίζας (ή υψώνοντας εις την 0,5 τον εκάστοτε αριθμό που βλέπετε στην οθόνη σας). Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά παρατηρείτε; Εξηγήστε τι συμβαίνει. Τι θα συμβεί αν υπολογίσετε κατ' επανάληψη διαδοχικές δέκατες ρίζες;

(β) Επαναλάβετε τη διαδικασία με αρχικό αριθμό τον 0,5 αντί του 2. Τι προκύπτει τώρα; Δοκιμάστε με οποιονδήποτε θετικό αριθμό x αντί του 2. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σύγκριση συναρτήσεων με τις γραμμικοποιήσεις τους

Στις Ασκήσεις 51-54, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτιμήσετε το μέτρο του σφάλματος που προκύπτει αν χρησιμοποιήσετε τη γραμμικοποίηση αντί της ίδιας της συνάρτησης στο καθορισμένο διάστημα I. Εκτελέστε τα ακόλουθα.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση f στο I.

(β) Βρείτε τη γραμμικοποίηση L της συναρτήσεως στο σημείο a.

(γ) Σχεδιάστε την f και την L σε ενιαίο σχήμα.

(δ) Παραστήστε γραφικά το απόλυτο σφάλμα $|f(x) - L(x)|$ στο διάστημα I και βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

(ε) Από το σχήμα σας του ερωτήματος (δ), εκτιμήστε το μεγαλύτερο δυνατόν $\delta > 0$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

για $\epsilon = 0{,}5$, $0{,}1$, και $0{,}01$. Κατόπιν ελέγξτε γραφικά τις εκτιμήσεις του δ που κάνατε για να δείτε αν είναι σωστές.

51. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $[-1, 2]$, $a = 1$

52. $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+1}$, $[-3/4, 1]$, $a = \dfrac{1}{2}$

53. $f(x) = x^{2/3}(x - 2)$, $[-2, 3]$, $a = 2$

54. $f(x) = \sqrt{x} - \sin x$, $[0, 2\pi]$, $a = 2$

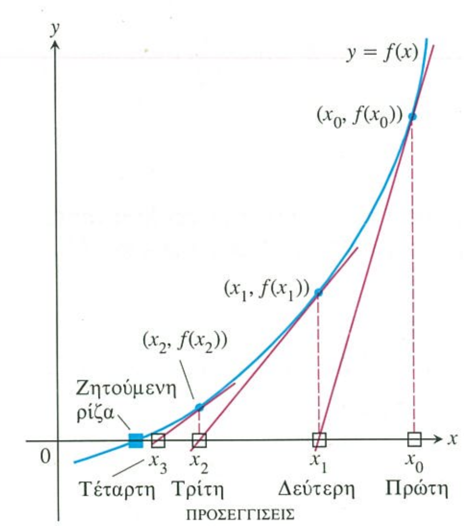
3.7 Μέθοδος του Νεύτωνα

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα • Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου • Συνήθως η μέθοδος συγκλίνει • Όμως κάτι μπορεί να πάει στραβά • Μορφοκλασματικές λεκάνες και η μέθοδος του Νεύτωνα

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Neils Henrik Abel
(1802-1829)

Έχουμε στη διάθεσή μας απλούς τύπους επίλυσης γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ενώ για εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού υπάρχουν άλλοι πιο περίπλοκοι τύποι. Κάποτε οι επιστήμονες πίστευαν ότι θα μπορούσαν να βρεθούν παρόμοιοι τύποι για εξισώσεις βαθμού πέμπτου και άνω, αλλά ο Νορβηγός μαθηματικός Neils Henrik Abel έδειξε ότι αυτό είναι αδύνατο για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από τέσσερα.

Όταν δεν διαθέτουμε ακριβείς τύπους επίλυσης της εξίσωσης $f(x)=0$, μπορούμε να προστρέξουμε σε αριθμητικές μεθόδους του απειροστικού λογισμού για να προσεγγίσουμε τις λύσεις που αναζητούμε. Μία από τις τεχνικές αυτές είναι η *μέθοδος του Νεύτωνα* (Newton), ή, ακριβέστερα, η *μέθοδος των Newton-Raphson*. Η βασική ιδέα της τεχνικής αυτής είναι να αντικαταστήσουμε την καμπύλη $y = f(x)$ σε σημεία μηδενισμού τής f, με εφαπτόμενες ευθείες. Και εδώ, όπως θα δούμε, η γραμμικοποίηση παίζει ουσιώδη ρόλο.



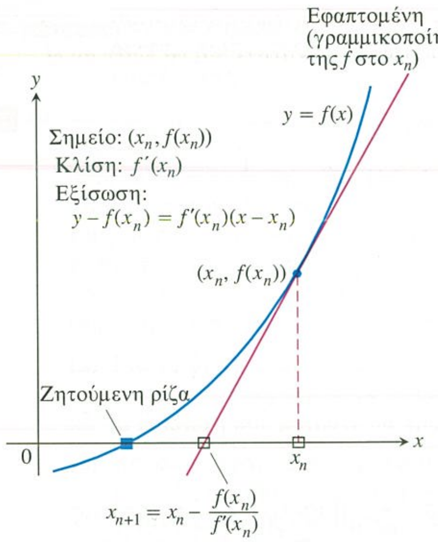
Σχημα 3.61 Η μέθοδος του Νεύτωνα ξεκινά με την επιλογή μιας τιμή εκκινήσεως x_0, την οποία (υπό ευνοϊκές συνθήκες) σταδιακά βελτιώνει.

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα

Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια αριθμητική μέθοδος που προσεγγίζει το σημείο μηδενισμού μιας συναρτήσεως με τα σημεία μηδενισμού διαδοχικών γραμμικοποιήσεών της. Αν οι συνθήκες είναι ευνοϊκές, οι ρίζες των γραμμικοποιήσεων *συγκλίνουν* ταχύτατα σε μια προσέγγιση ικανοποιητικής ακρίβειας. Επιπλέον, η μέθοδος εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα συναρτήσεων, και συνήθως αποδίδει καρπούς μετά από λίγα μόνο βήματα. Ας δούμε τώρα πώς δουλεύει.

Μπορούμε να επιλέξουμε μια τιμή εκκινήσεως, x_0, από το γράφημα της συναρτήσεως ή και απλώς στην τύχη. Κατόπιν η μέθοδος προσεγγίζει την καμπύλη $y = f(x)$ στο $(x_0, f(x_0))$ με την εφαπτομένη της, καλώντας x_1 το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα x (Σχήμα 3.61). Συνήθως ο αριθμός x_1 αποτελεί καλύτερη προσέγγιση της ρίζας απ' ό,τι ο x_0. Το σημείο x_2 όπου τέμνει τον άξονα x η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_1, f(x_1))$ είναι ο επόμενος όρος στην ακολουθία προσεγγίσεων. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας κάθε προσέγγιση για να παράγουμε την επόμενη μέχρι να έρθουμε σε ικανοποιητική απόσταση από τη ρίζα, οπότε σταματάμε.

Υπάρχει ένας τύπος που δίδει την $(n + 1)$-στή προσέγγιση x_{n+1} συναρτήσει της n-στής προσέγγισης x_n. Η εξίσωση σημείου-κλίσεως για



Σχημα 3.62 Η γεωμετρία των διαδοχικών προσεγγίσεων της μεθόδου του Νεύτωνα. Από το x_n κινούμαστε κατακόρυφα ώς την καμπύλη και μετά ακολουθούμε την εφαπτομένη προς τα κάτω μέχρι το x_{n+1}.

CD-ROM
Δικτυότοπος

την εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_n, f(x_n))$ είναι

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Μπορούμε να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα x θέτοντας $y = 0$ (Σχήμα 3.62).

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$
$$-f(x_n) = f'(x_n)\cdot x - f'(x_n)\cdot x_n$$
$$f'(x_n)\cdot x = f'(x_n)\cdot x_n - f(x_n)$$
$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Αν } f'(x_n) \neq 0$$

Η τιμή αυτή του x είναι η επόμενη προσέγγιση x_{n+1}. Συνοψίζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα στον πίνακα που ακολουθεί.

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα

1. Επιλέγουμε (αυθαίρετα) μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η επιλογή μας αυτή γίνεται ορθολογικότερα αν έχουμε το γράφημα της $y = f(x)$.
2. Από την πρώτη προσέγγιση βρίσκουμε τη δεύτερη, από τη δεύτερη την τρίτη, κ.ο.κ., μέσω του τύπου

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (1)$$

Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου

Ως πρώτο παράδειγμα, βρίσκουμε δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ προβαίνοντας σε διαδοχικά ακριβέστερες προσεγγίσεις της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

Παράδειγμα 1 Εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του 2

Βρείτε τη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Λύση Με $f(x) = x^2 - 2$ και $f'(x) = 2x$, η Εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Φέρνουμε την εξίσωση αυτή σε μορφή που περιλαμβάνει λιγότερες αριθμητικές πράξεις, για να μπορέσουμε να τη χειριστούμε καλύτερα με το κομπιουτεράκι μας:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$
$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Η εξίσωση

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

μας επιτρέπει να μεταβούμε από τη μία προσέγγιση στην επόμενη με λίγα μόνο βήματα. Με τιμή εκκινήσεως την $x_0 = 1$, παίρνουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που ακολουθεί. (Με ακρίβεια πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, $\sqrt{2} = 1{,}41421$.)

Αλγόριθμος και επανάληψη

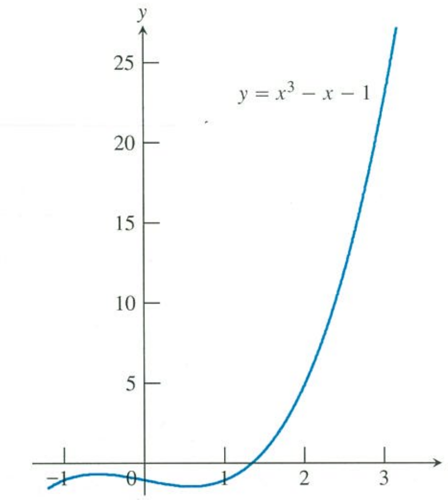
Συνηθίζεται να αποκαλούμε *αλγόριθμο* μια ακολουθία υπολογιστικών βημάτων όπως αυτά της μεθόδου του Νεύτωνα. Όταν ένας αλγόριθμος επαναλαμβάνει ένα δεδομένο σύνολο βημάτων ξανά και ξανά, τροφοδοτώντας με την απάντηση του προηγούμενου βήματος το επόμενο βήμα, τότε ο αλγόριθμος καλείται *επαναληπτικός* και κάθε «κύκλος» καλείται *επανάληψη*. Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια από τις γρηγορότερες επαναληπτικές μεθόδους εύρεσης ριζών.

	Σφάλμα	Αριθμός ορθών ψηφίων
$x_0 = 1$	$-0{,}41421$	1
$x_1 = 1{,}5$	$0{,}08579$	1
$x_2 = 1{,}41667$	$0{,}00246$	3
$x_3 = 1{,}41422$	$0{,}00001$	5

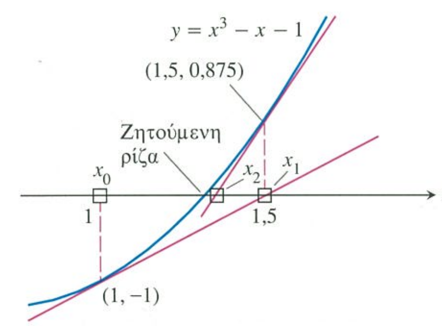
Οι περισσότεροι υπολογιστές τσέπης (κομπιουτεράκια) χρησιμοποιούν τη μέθοδο του Νεύτωνα για τον υπολογισμό ριζών λόγω της γρήγορης σύγκλισης της μεθόδου (περισσότερα για το ζήτημα αυτό θα πούμε αργότερα). Αν στο Παράδειγμα 1 θέλαμε ακρίβεια 13 ψηφίων αντί για 5, τότε στο επόμενο βήμα θα είχαμε ήδη μια έκφραση του $\sqrt{2}$ ορθή κατά περισσότερα από 10 δεκαδικά ψηφία.

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση της μεθόδου του Νεύτωνα

Βρείτε τη συντεταγμένη x του σημείου τομής της καμπύλης $y = x^3 - x$ με την οριζόντια ευθεία $y = 1$.



Σχημα 3.63 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 1$. (Παράδειγμα 2)



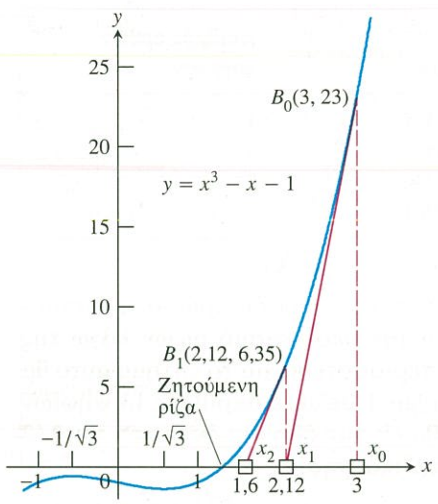
Σχημα 3.64 Οι τρεις πρώτες τιμές x του Πίνακα 3.1.

Λύση Η καμπύλη τέμνει την ευθεία όταν $x^3 - x = 1$ ή $x^3 - x - 1 = 0$. Πότε μηδενίζεται η $f(x) = x^3 - x - 1$; Το γράφημα της f (Σχήμα 3.63) δείχνει ότι υπάρχει μία ρίζα, μεταξύ των $x = 1$ και $x = 2$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα στη συνάρτηση f με τιμή εκκινήσεως τη $x_0 = 1$. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 3.64.

Για $n = 5$, έχουμε $x_6 = x_5 = 1{,}324717957$. Όταν όμως είναι $x_{n+1} = x_n$, η Εξίσωση (1) μας δίνει $f(x_n) = 0$. Έτσι βρήκαμε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων.

Πίνακας 3.1 Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα στην $f(x) = x^3 - x - 1$ με $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,3478 26087
2	1,3478 26087	0,1006 82173	4,4499 05482	1,3252 00399
3	1,3252 00399	0,0020 58362	4,2684 68292	1,3247 18174
4	1,3247 18174	0,0000 00924	4,2646 34722	1,3247 17957
5	1,3247 17957	−1,8672E-13	4,2646 32999	1,3247 17957



Σχημα 3.65 Κάθε τιμή εκκινήσεως x_0 μεγαλύτερη του $x = 1/\sqrt{3}$ θα οδηγήσει στη ρίζα.

Στο Σχήμα 3.65, εξετάζουμε τι θα συνέβαινε στο Παράδειγμα 2 αν ξεκινούσαμε από το σημείο $B_0(3, 23)$ της καμπύλης, με $x_0 = 3$. Το σημείο B_0 απέχει αρκετά από τον άξονα x, αλλά η εφαπτομένη στο B_0 τέμνει τον άξονα x περίπου στο σημείο $(2{,}12, 0)$, βελτιώνοντας σημαντικά την τιμή εκκινήσεως x_0. Κάνοντας επανειλημμένη χρήση της Εξίσωσης (1) όπως και πριν, με $f(x) = x^3 - x - 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 1$, ξαναβρίσκουμε τη λύση $x_7 = x_6 = 1{,}3247\ 17957$ σε επτά βήματα.

Η καμπύλη του Σχήματος 3.65 εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1/\sqrt{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = +1/\sqrt{3}$. Αν επιλέγαμε μια τιμή εκκινήσεως x_0 μεταξύ των δυο αυτών σημείων δεν θα αναμέναμε ικανοποιητικά αποτελέσματα από τη μέθοδο, ενώ οποιοδήποτε σημείο εκκινήσεως στα δεξιά του $x = 1/\sqrt{3}$ θα μας έδινε τελικά την ορθή απάντηση. Ακόμα κι αν ξεκινήσουμε πολύ δεξιότερα του B_0, για παράδειγμα από το $x_0 = 10$, η μέθοδος θα συγκλίνει (με λίγα περισσότερα βήματα) στην ίδια απάντηση όπως και πριν.

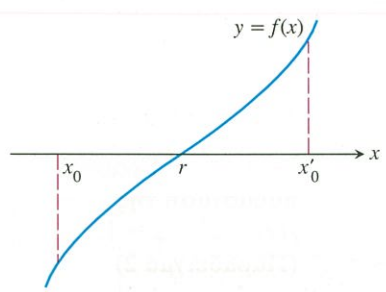
Συνήθως η μέθοδος συγκλίνει

Στην πράξη, η μέθοδος του Νεύτωνα συνήθως συγκλίνει με εντυπωσιακή ταχύτητα, αλλά δεν υπάρχει εγγύηση γι' αυτό. Ένας τρόπος να ελέγξουμε αν υπάρχει σύγκλιση είναι ο εξής: Κατ' αρχάς, παριστούμε γραφικά τη συνάρτηση και από το γράφημά της κάνουμε μια καλή επιλογή της τιμής εκκινήσεως x_0. Έπειτα υπολογίζουμε το $|f(x_n)|$ για να ελέγξουμε αν η συνάρτηση πλησιάζει στο μηδέν, ενώ υπολογίζοντας το $|x_n - x_{n+1}|$ ελέγχουμε αν η μέθοδος συγκλίνει.

Στο σημείο αυτό η θεωρία μπορεί να βοηθήσει την κατάσταση. Ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού λέει ότι αν ισχύει

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \qquad (2)$$

για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή τιμών γύρω από τη ρίζα r, τότε η μέθοδος θα συγκλίνει στο r για κάθε τιμή εκκίνησης x_0 που ανήκει στην περιοχή αυτή.



Σχημα 3.66 Η μέθοδος του Νεύτωνα θα συγκλίνει στο r από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης.

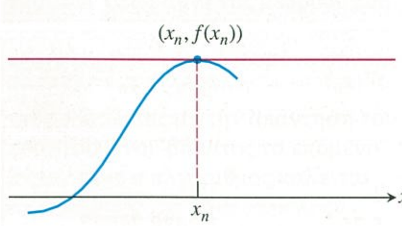
Η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει πάντοτε αν η $y = f(x)$ είναι κοίλη (κοίλα κάτω) για $x_0 < r$ και κυρτή (κοίλα άνω) για $x_0 > r$. (Δείτε το Σχήμα 3.66.)

Υπό ευνοϊκές συνθήκες, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα στη ρίζα r δίδεται από τον ακόλουθο τύπο του προχωρημένου απειροστικού λογισμού

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{σφάλμα } e_{n+1}} \leq \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}|x_n - r|^2 = \text{σταθερά} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{σφάλμα } e_n}, \qquad (3)$$

όπου οι όροι "max" και "min" αναφέρονται στις μέγιστες και στις ελάχιστες τιμές σε ένα διάστημα που περιέχει το r. Ο τύπος αυτός λέει ότι το σφάλμα στο βήμα $n + 1$ δεν είναι μεγαλύτερο από μια σταθερά επί το τετράγωνο του σφάλματος στο βήμα n. Αν αυτό δεν σας λέει πολλά, ξανασκεφτείτε το. Αν η σταθερά είναι μικρότερη ή ίση του 1 και $|x_n - r| < 10^{-3}$, τότε $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$. Δηλαδή *σε ένα μόνο βήμα*, η μέθοδος μεταβαίνει από ακρίβεια τριών σε ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων!

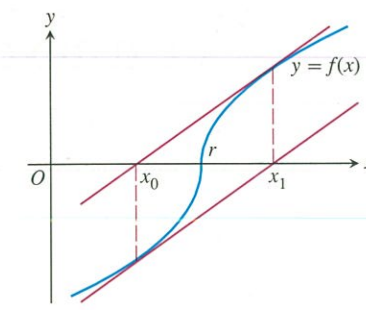
Οι Εξισώσεις (2) και (3) έχουν ως προϋπόθεση ότι η f είναι «καλά συμπεριφερόμενη». Για παράδειγμα, στην Εξίσωση (3), η r θεωρείται απλή ρίζα της f, οπότε $f'(r) \neq 0$. Αν όμως η r είναι πολλαπλή ρίζα της f, τότε η σύγκλιση μπορεί να γίνει με πιο αργό ρυθμό.



Σχημα 3.67 Αν $f'(x_n) = 0$, τότε η εφαπτομένη δεν τέμνει τον άξονα x και δεν ορίζεται το x_{n+1}.

Όμως κάτι μπορεί να πάει στραβά

Η μέθοδος του Νεύτωνα σταματά αν $f'(x_n) = 0$ (Σχήμα 3.67). Στην περίπτωση αυτή, δοκιμάστε με ένα νέο σημείο εκκινήσεως. Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση οι f και f' να έχουν μια κοινή ρίζα. Για να διαπιστώσετε αν αυτό όντως συμβαίνει, δεν έχετε παρά να βρείτε πρώτα τις ρίζες της $f'(x) = 0$ και κατόπιν να υπολογίσετε την f για τις τιμές αυτές, ή μπορείτε να παραστήσετε γραφικά σε κοινό σχήμα τις f και f'.



Σχημα 3.68 Εδώ η μεθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει. Απλώς ταλαντεύεται από το x_0 στο x_1 και πάλι πίσω στο x_0, χωρίς να πλησιάζει καθόλου στο r.

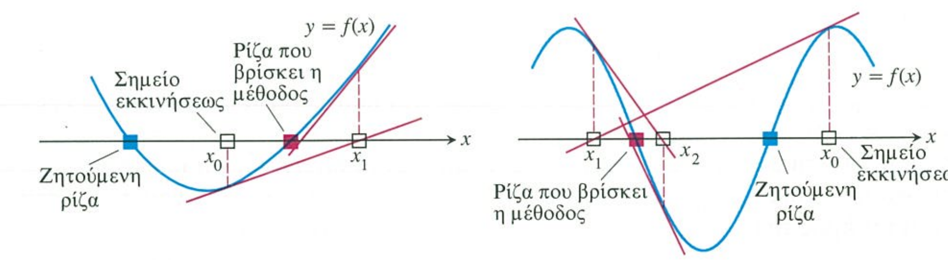
Η μέθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει πάντοτε. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \geq r, \end{cases}$$

τότε η γραφική παράσταση θα μοιάζει με αυτήν του Σχήματος 3.68. Αν ξεκινήσουμε από την τιμή $x_0 = r - h$, παίρνουμε $x_1 = r + h$, και οι διαδοχικές προσεγγίσεις ταλαντεύονται μεταξύ των δυο αυτών τιμών. Όσες φορές και να επαναλάβουμε, δεν πλησιάζουμε καθόλου τη ρίζα.

Όταν η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει, συγκλίνει αναγκαστικά σε μια ρίζα. Όμως προσέξτε! Υπάρχουν περιπτώσεις που η μέθοδος δείχνει να συγκλίνει κάπου όπου όμως δεν υπάρχει ρίζα. Ευτυχώς, αυτές οι περιπτώσεις είναι σπάνιες.

Όταν η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει σε μια ρίζα, αυτή μπορεί να μην είναι η ρίζα που ζητάτε. Το Σχήμα 3.69 δείχνει δύο δυνατούς τρόπους για να συμβεί αυτό.



Σχημα 3.69 Αν ξεκινήσετε πολύ μακριά από την περιοχή που σας ενδιαφέρει, η μέθοδος του Νεύτωνα ενδέχεται να μη βρει τη ρίζα που ζητάτε, αλλά μια άλλη ρίζα.

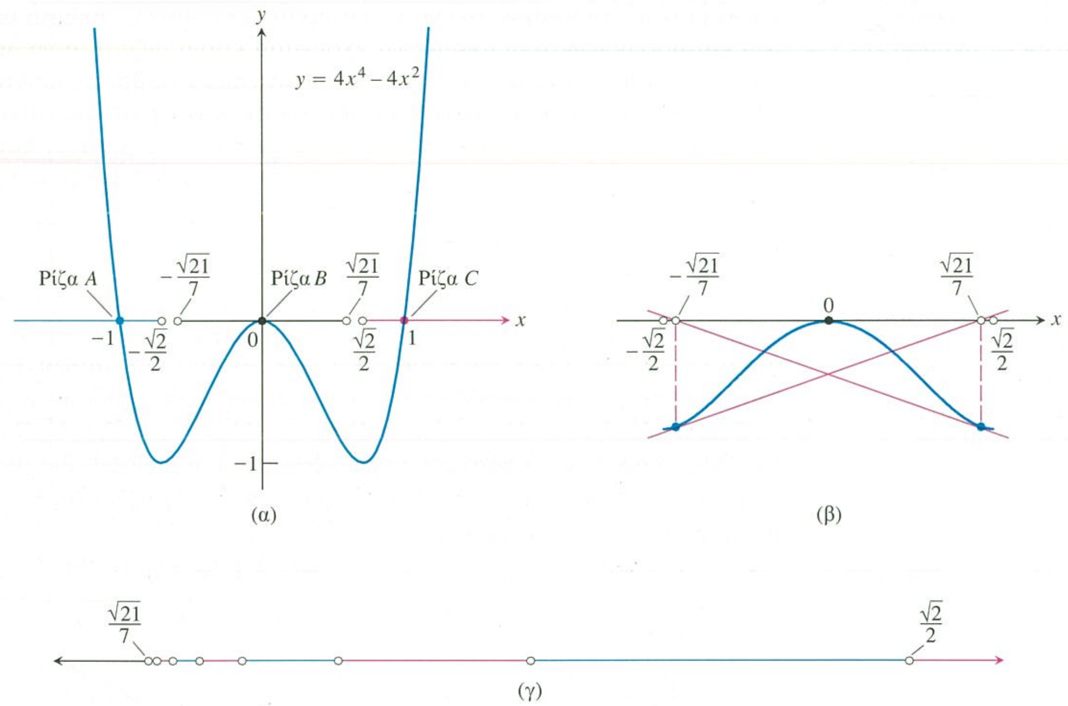
Μορφοκλασματικές λεκάνες και η μέθοδος του Νεύτωνα

Η διαδικασία εύρεσης ριζών με τη μέθοδο του Νεύτωνα μπορεί να καταστεί ασταθής υπό την έννοια ότι, για κάποιες εξισώσεις, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι εξαιρετικά ευαίσθητο ως προς τη θέση του σημείου εκκινήσεως.

Η εξίσωση $4x^4 - 4x^2 = 0$ είναι μια τέτοια περίπτωση (Σχήμα 3.70α). Αν οι τιμές εκκινήσεως ανήκουν στην μπλε περιοχή του άξονα x, η μέθοδος οδηγεί στη ρίζα A. Τιμές εκκινήσεως που βρίσκονται στη μαύρη περιοχή οδηγούν στη ρίζα B, ενώ τιμές που βρίσκονται στην κόκκινη περοχή οδηγούν στη ρίζα C. Τα σημεία $\pm\sqrt{2}/2$ έχουν οριζόντιες εφαπτομένες. Τα σημεία $\pm\sqrt{21}/7$ «εναλλάσσονται», δηλαδή το ένα οδηγεί στο άλλο (Σχήμα 3.70β).

Το διάστημα μεταξύ $\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{2}/2$ περιέχει άπειρο πλήθος ανοιχτών διαστημάτων που οδηγούν στη ρίζα A, εναλλασσόμενων με διαστήματα σημείων που οδηγούν στη ρίζα C (Σχήμα 3.70γ). Τα (άπειρα) συνοριακά σημεία που διαχωρίζουν τα διαδοχικά αυτά διαστήματα δεν οδηγούν σε ρίζες, αλλά σε παλινδρόμηση από το ένα στο άλλο. Επιπλέον, καθώς επιλέγουμε σημεία εκκινήσεως που πλησιάζουν από δεξιά την τιμή $\sqrt{21}/7$, γίνεται ολοένα και δυσκολότερο να διακρίνουμε ποια από αυτά οδηγούν στη ρίζα A και ποια στη ρίζα C. Σε κάθε πλευρά του $\sqrt{21}/7$, βρίσκουμε σημεία που αν και είναι αυθαίρετα κοντά το ένα στο άλλο, εν τούτοις οδηγούν σε ρίζες διαφορετικές.

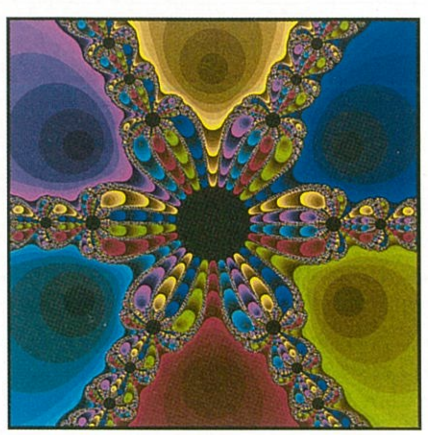
Αν φανταστούμε τις ρίζες ως «ελκυστές» άλλων σημείων, τότε οι αποχρώσεις του Σχήματος 3.70 δείχνουν τα διαστήματα των οποίων τα



Σχημα 3.70 (α) Τιμές εκκίνησης που ανήκουν στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$, και $(\sqrt{2}/2, \infty)$ οδηγούν αντίστοιχα στις ρίζες A, B, και C. (β) Οι τιμές $x = \pm\sqrt{21}/7$ οδηγούν η μία στην άλλη. (γ) Μεταξύ των $\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{2}/2$, υπάρχουν άπειρα ανοιχτά διαστήματα σημείων που έλκονται προς το A· τα διαστήματα αυτά εναλλάσσονται με επίσης άπειρα ανοιχτά διαστήματα σημείων που έλκονται προς το C. Αντίστοιχη συμπεριφορά προκύπτει και στο διάστημα $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7)$.

σημεία έλκονται από κάθε ρίζα (τα «διαστήματα έλξης»). Μπορεί να ξεγελαστείτε νομίζοντας ότι σημεία ανάμεσα στις ρίζες A και B θα έλκονται είτε προς το A είτε προς το B, όμως θα δούμε ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Μεταξύ των A και B υπάρχει άπειρο πλήθος διαστημάτων σημείων που έλκονται προς το C. Ομοίως, μεταξύ των B και C υπάρχει άπειρο πλήθος διαστημάτων σημείων που έλκονται στο A.

Ένα ακόμη πιο εύγλωττο παράδειγμα τέτοιας συμπεριφοράς προκύπτει όταν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να λύσουμε την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Υπάρχουν εδώ έξι ρίζες: 1, −1, και οι τέσσερις συνδυασμοί $\pm(1/2) \pm (\sqrt{3}/2)i$. Όπως δείχνει το Σχήμα 3.71, καθεμία από τις ρίζες αυτές έχει άπειρο πλήθος ελκτικών «λεκανών» στο μιγαδικό επίπεδο (Παράρτημα 3). Σημεία εκκινήσεως που ανήκουν στις κόκκινες λεκάνες έλκονται στη ρίζα 1, εκείνα στις πράσινες λεκάνες έλκονται στη ρίζα $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, κ.ο.κ. Κάθε τέτοια λεκάνη έχει ένα σύνορο του οποίου το περίπλοκο σχέδιο επαναλαμβάνεται ατέρμονα, όσες μεγεθύνσεις κι αν κάνουμε. Οι λεκάνες αυτές καλούνται **μορφοκλασματικές λεκάνες.**



Σχημα 3.71 Αυτό το τοπίο τιμών εκκίνησης σχεδιάστηκε με υπολογιστή. Με διαφορετικό χρώμα δείχνονται οι περιοχές σημείων του μιγαδικού επιπέδου που καταλήγουν σε διαφορετικές ρίζες όταν τα χρησιμοποιήσουμε ως τιμές εκκίνησης στη μέθοδο του Νεύτωνα για την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$. Σημεία της κόκκινης περιοχής οδηγούν στο 1, της πράσινης περιοχής στο $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, της σκούρας μπλε στο $(-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, κ.ο.κ. Τιμές εκκινήσεως που παράγουν ακολουθίες οι οποίες δεν συγκλίνουν σε κάποια ρίζα με απόκλιση μικρότερη των 0,1 μονάδων μετά από 32 βήματα επανάληψης, χρωματίστηκαν μαύρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.7

Εύρεση ριζών

CD-ROM Δικτυότοπος

1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 1 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 1$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2.
2. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τη μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 3x + 1 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = 0$ και κατόπιν βρείτε το x_2.
3. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα δύο σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $f(x) = x^4 + x - 3$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 1$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2.
4. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα δύο σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $f(x)=2x - x^2 + 1$. Ξεκινήστε με $x_0 = 0$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 2$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2.
5. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τη θετική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = 1$ και βρείτε το x_2.
6. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε την αρνητική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ και βρείτε το x_2.

Θεωρία, παραδείγματα, και εφαρμογές

7. *Μαντεύοντας μια ρίζα* Ας υποθέσουμε ότι σταθήκατε τυχεροί και η τιμή x_0 εκκίνησης που διαλέξατε είναι ρίζα της $f(x) = 0$. Αν η $f'(x_0)$ ορίζεται και δεν μηδενίζεται, τι συμβαίνει στο x_1 και στις επόμενες προσεγγίσεις;
8. *Μάθετε γράφοντας: Εκτίμηση του π* Θέλετε να εκτιμήσετε το $\pi/2$ με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα στην εξίσωση $\cos x = 0$. Έχει σημασία ποια τιμή εκκινήσεως επιλέγετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
9. *Ταλάντωση* Δείξτε ότι αν $h > 0$, η εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα στην
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$
οδηγεί στο αποτέλεσμα $x_1 = -h$ αν $x_0 = h$ και $x_1 = h$ αν $x_0 = -h$. Κάντε ένα σχήμα για να δείξετε τι συμβαίνει.
10. *Προσεγγίσεις που ολοένα χειροτερεύουν* Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα στη συνάρτηση $f(x) = x^{1/3}$ με $x_0 = 1$ και βρείτε τα x_1, x_2, x_3, και x_4. Βρείτε έναν τύπο για το $|x_n|$. Πώς συμπεριφέρεται το $|x_n|$ καθώς $n \to \infty$; Κάντε ένα σχήμα για να εξηγήσετε τι συμβαίνει.
11. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί και οι τέσσερις προτάσεις που ακολουθούν έχουν το ίδιο ζητούμενο:
   - **i.** Να βρεθούν οι ρίζες της $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
   - **ii.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3$ με την ευθεία $y = 3x + 1$.
   - **iii.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3 - 3x$ με την οριζόντια ευθεία $y = 1$.
   - **iv.** Να βρεθούν οι τιμές x όπου η παράγωγος της $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ μηδενίζεται.
12. *Εντοπισμός πλανήτη* Στη διαδικασία υπολογισμού των συντεταγμένων πλανητών στον χώρο, προκύπτουν εξισώσεις του τύπου $x = 1 + 0{,}5 \sin x$. Από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x - 1 - 0{,}5 \sin x$ είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει μια ρίζα κοντά στο $x = 1{,}5$. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βελτιώσετε την πρώτη αυτή εκτίμηση. Με άλλα λόγια, ξεκινήστε με $x_0 = 1{,}5$ και βρείτε το x_1. (Με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων η ρίζα ισούται με 1,49870.) Θυμηθείτε να χρησιμοποιήσετε ακτίνια. CD-ROM Δικτυότοπος

T 13. *Η μέθοδος του Νεύτωνα σε προγραμματιστικό περιβάλλον* Έστω $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Στα παρακάτω περιγράφουμε έναν αλγόριθμο εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα σε προγραμματιζόμενο κομπιουτεράκι.
   - **(α)** Θέτουμε $y_0 = f(x)$ και $y_1 = \text{NDER}\, f(x)$.
   - **(β)** Αποθηκεύουμε το $x_0 = -0{,}3$ στη μεταβλητή x.
   - **(γ)** Κατόπιν αποθηκεύουμε το $x - (y_0/y_1)$ στη μεταβλητή x και πατάμε επανειλημμένα το πλήκτρο "Enter". Παρατηρούμε ότι οι εμφανιζόμενοι στην οθόνη αριθμοί συγκλίνουν στο σημείο μηδενισμού της f.
   - **(δ)** Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) και (γ) με διαφορετικές τιμές εκκίνησης x_0.
   - **(ε)** Γράψτε μια δική σας εξίσωση και επιλύστε τη με τη μέθοδο του Νεύτωνα ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που σας δίδει η ενσωματωμένη πράξη εύρεσης ριζών συναρτήσεως στο κομπιουτεράκι σας.

T 14. (*Συνέχεια της Ασκήσεως 11*)
   - **(α)** Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τα δύο σημεία μηδενισμού της $f(x) = x^3 - 3x - 1$ που κείνται στα αριστερά της αρχής, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.
   - **(β)** Παραστήστε γραφικά την $f(x) = x^3 - 3x - 1$ στο διάστημα $-2 \leq x \leq 2{,}5$. Χρησιμοποιήστε τις λειτουργίες μεγεθύνσεως ("zoom") και εντοπισμού ("trace") για να εκτιμήσετε τα σημεία μηδενισμού της f με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.
   - **(γ)** Παραστήστε γραφικά την $g(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 - x + 5$. Χρησιμοποιήστε τις λειτουργίες μεγεθύνσεως ("zoom") και εντοπισμού ("trace") με κατάλληλη αλλαγή κλίμακας για να βρείτε, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων, τις τιμές του x όπου το γράφημα έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

T 15. *Τεμνόμενες καμπύλες* Η καμπύλη $y = \tan x$ τέμνει την ευθεία $y = 2x$ κάπου μεταξύ των $x = 0$ και $x = \pi/2$. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε πού. CD-ROM Δικτυότοπος

T 16. *Πραγματικές ρίζες πολυωνύμου τετάρτου βαθμού* Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τις δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

T 17. *Εύρεση ριζών*
   - **(α)** Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\sin 3x = 0{,}99 - x^2$;

(β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να τις βρείτε.

T **18.** *Τομή καμπυλών* **(α)** Ισούται ποτέ με x η συνάρτηση cos $3x$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

CD-ROM Δικτυότοπος **(β)** Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε πού ισχύει η ισότητα.

T **19.** *Πολλαπλές ρίζες* Βρείτε τις τέσσερις πραγματικές ρίζες
CD-ROM Δικτυότοπος της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

T **20.** *Εκτίμηση της τιμής του π* Εκτιμήστε το π με ακρίβεια
CD-ROM Δικτυότοπος όσων ψηφίων χωρά η οθόνη που έχει το κομπιουτεράκι σας, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα για να λύσετε την εξίσωση $\tan x = 0$ με $x_0 = 3$.

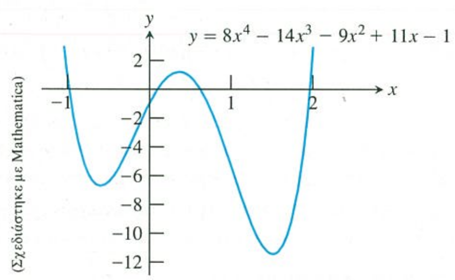
CD-ROM Δικτυότοπος **21.** *Τομή καμπυλών* Για ποιο (ποια) x ισχύει η ισότητα $\cos x = 2x$;

22. *Τομή καμπυλών* Για ποιο (ποια) x ισχύει η ισότητα $\cos x = -x$;

23. *Εύρεση ρίζας* Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής της Ενότητας 1.4 για να δείξετε ότι η $f(x) = x^3 + 2x - 4$ έχει μια ρίζα μεταξύ των $x = 1$ και $x = 2$. Έπειτα βρείτε τη ρίζα με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων.

CD-ROM Δικτυότοπος **24.** *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου τετάρτου βαθμού* Βρείτε προσεγγιστικά τις τιμές των r_1 μέχρι και r_4 στην παραγοντοποίηση

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T **25.** *Σύγκλιση σε διαφορετικές ρίζες* Χρησιμοποιήστε τη μέθο-
CD-ROM Δικτυότοπος δο του Νεύτωνα για να βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ χρησιμοποιώντας τις τιμές εκκίνησης που δίδονται (Σχήμα 3.70).

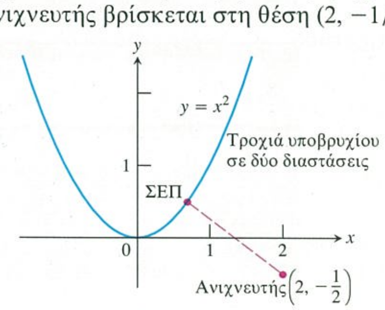
(α) $x_0 = -2$ και $x_0 = -0{,}8$, για ρίζες στο διάστημα $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$

(β) $x_0 = -0{,}5$ και $x_0 = 0{,}25$, για ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$

(γ) $x_0 = 0{,}8$ και $x_0 = 2$, για ρίζες στο διάστημα $(\sqrt{2}/2, \infty)$

(δ) $x_0 = -\sqrt{21}/7$ και $x_0 = \sqrt{21}/7$

26. *Το πρόβλημα της υπερηχητικής ανίχνευσης* Σε προβλήματα εντοπισμού υποβρυχίων, είναι συχνά απαραίτητο να βρεθεί το σημείο εγγύτερης προσέγγισης υποβρυχίου σε ηχοανιχνευτή που επιπλέει στο νερό. Έστω ότι το υποβρύχιο κινείται στην παραβολική τροχιά $y = x^2$ και ότι ο ανιχνευτής βρίσκεται στη θέση $(2, -1/2)$.

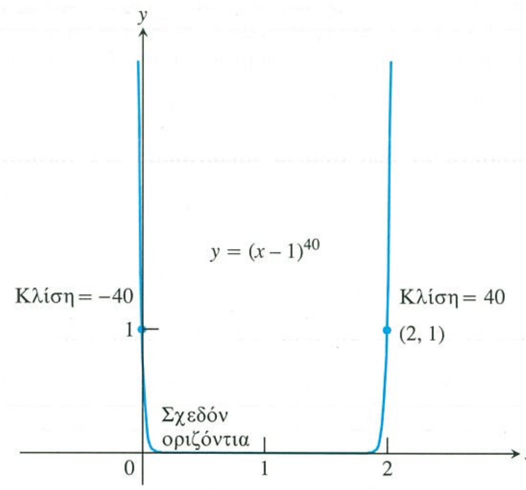


(*Πηγή: The Contraction Mapping Principle*, του C. O. Wilde, UMAP Unit 326, Arlington, MA, COMAP, Inc.)

(α) Δείξτε ότι η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ του υποβρυχίου και του ανιχνευτή είναι η λύση της εξίσωσης $x = 1/(x^2 + 1)$.

(β) Λύστε την εξίσωση $x = 1/(x^2 + 1)$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

27. *Καμπύλες που είναι σχεδόν οριζόντιες στην περιοχή της ρίζας* Μερικές καμπύλες είναι τόσο «οριζόντιες» ώστε, στην πράξη, η μέθοδος του Νεύτωνα σταματά αρκετά μακριά από τη ρίζα που ζητούμε. Για να δείτε περί τίνος πρόκειται, προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 1)^{40}$ με τιμή εκκινήσεως $x_0 = 2$ και παρατηρήστε πόσο προσεγγίζει ο υπολογιστής σας τη ρίζα $x = 1$.



28. *Εύρεση άλλης ρίζας από αυτήν που ψάχνουμε* Και οι τρεις ρίζες της $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ μπορούν να βρεθούν αν διαλέξουμε ως τιμή εκκινήσεως κοντά στο $x = \sqrt{21}/7$. Δοκιμάστε το. Δείτε το Σχήμα 3.70.

29. *Εύρεση συγκεντρώσεως ιόντων* Κατά τον υπολογισμό της οξύτητας ενός κορεσμένου διαλύματος υδροξειδίου του μαγνησίου σε υδροχλωρικό οξύ, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{3{,}64 \times 10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3{,}6 \times 10^{-4}$$

όπου $[H_3O^+]$ η συγκέντρωση ιόντων υδρονίου. Για να βρούμε την τιμή του $[H_3O^+]$, θέτουμε $x = 10^4[H_3O^+]$ και φέρνουμε έτσι την εξίσωση στη μορφή

$$x^3 + 3{,}6x^2 - 36{,}4 = 0.$$

Λύστε την εξίσωση αυτή με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Ποια τιμή βρίσκετε για το x; (Φτάστε σε ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.) Πόση είναι συνεπώς η συγκέντρωση $[H_3O^+]$;

30. T *Μιγαδικές ρίζες* Αν έχετε υπολογιστή ή κομπιουτεράκι που μπορεί να εκτελέσει πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς, λύστε την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Η αναδρομική σχέση που προκύπτει είναι

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5} \quad \text{δηλαδή} \quad z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}.$$

Δοκιμάστε με τις εξής τιμές εκκινήσεως (αλλά και με άλλες που θα επιλέξετε): 2, i, $\sqrt{3} + i$.

Επαναληπτικές ερωτήσεις

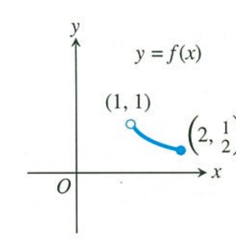
1. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις τιμές μιας συνάρτησης που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα;
2. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση εμφανίζει τοπικό ακρότατο στο πεδίο ορισμού της; Το ίδιο ερώτημα για ολικό ακρότατο. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τοπικών και ολικών ακροτάτων, και ποια είναι αυτή; Δώστε μερικά παραδείγματα.
3. Ποια σχέση ικανοποιεί η παράγωγος f' σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού όπου υπάρχει τοπικό ακρότατο, και πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το ακρότατο αυτό;
4. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα συνεχούς συναρτήσεως σε κλειστό διάστημα; Δώστε μερικά παραδείγματα.
5. Ποιες οι προϋποθέσεις και ποιο το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle; Είναι πράγματι απαραίτητες οι προϋποθέσεις; Εξηγήστε.
6. Ποιες οι προϋποθέσεις και ποιο το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής; Τι είδους φυσικές ερμηνείες επιδέχεται το θεώρημα;
7. Αναφέρετε τα τρία πορίσματα του θεωρήματος μέσης τιμής.
8. Πώς μπορούμε μερικές φορές να βρίσκουμε τον τύπο μιας συνάρτησης $f(x)$ όταν είναι γνωστή η f' και η τιμή της f σε κάποιο σημείο $x = x_0$; Δώστε ένα παράδειγμα.
9. Τι είναι μια διαφορική εξίσωση και τι η λύση της; Δώστε μερικά παραδείγματα.
10. Ποιο είναι το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις; Πώς μπορεί να μας χρησιμεύσει στον έλεγχο για τοπικά ακρότατα;
11. Πώς ελέγχουμε την κοιλότητα μιας διπλά παραγωγίσιμης συναρτήσεως; Δώστε μερικά παραδείγματα.
12. Τι είναι το σημείο καμπής; Δώστε ένα παράδειγμα. Ποια η φυσική σημασία των σημείων καμπής;
13. Ποιο είναι το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα; Εξηγήστε με μερικά παραδείγματα πώς εφαρμόζεται.
14. Τι μπορούν να μας πουν για το σχήμα μιας γραφικής παράστασης οι παράγωγοι μιας συναρτήσεως;
15. Τι είναι η αυτόνομη διαφορική εξίσωση; Τι ονομάζουμε σημεία ισορροπίας της εξίσωσης αυτής; Σε τι διαφέρουν αυτά από τα κρίσιμα σημεία; Τι είναι η ευσταθής και τι η ασταθής ισορροπία;
16. Πώς κατασκευάζουμε την ευθεία φάσεων μιας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης; Σε τι χρησιμεύει η ευθεία αυτή στην κατασκευή ποιοτικών καμπυλών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης;
17. Περιγράψτε συνοπτικά μια γενική μεθοδολογία εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων. Δώστε μερικά παραδείγματα.
18. Τι είναι η γραμμικοποίηση $L(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x = a$; Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η f στο a για να υπάρχει η γραμμικοποίησή της; Πώς χρησιμοποιούμε τις γραμμικοποιήσεις; Δώστε μερικά παραδείγματα.
19. Καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο γειτονικό $a + dx$, με ποιον τρόπο εκτιμούμε την αντίστοιχη μεταβολή της τιμής μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως $f(x)$; Πώς εκτιμούμε τη σχετική μεταβολή και πώς την ποσοστιαία μεταβολή; Δώστε ένα παράδειγμα.
20. Περιγράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την επίλυση εξισώσεων. Δώστε ένα παράδειγμα. Τι πρέπει να προσέχετε όταν εφαρμόζετε τη μέθοδο;

Ασκήσεις κεφαλαίου

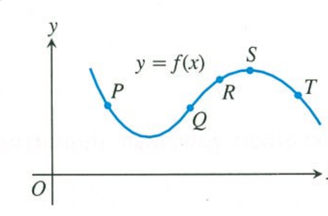
Συμπεράσματα από γραφικές παραστάσεις

Στις Ασκήσεις 1-4, κάνετε χρήση του παρατιθέμενου γραφήματος για να απαντήσετε στα ερωτήματα.

1. Εντοπίστε τα ολικά ακρότατα της f και για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτά.



Σχήμα Άσκησης 1



Σχήμα Άσκησης 2

2. Για ποιο από τα πέντε σημεία του γραφήματος της $y = f(x)$ που παρατίθεται εδώ

(α) είναι ταυτόχρονα αρνητικές οι y' και y'';

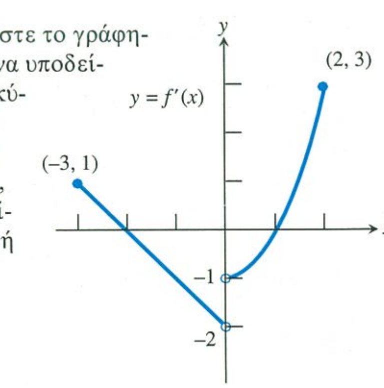
(β) είναι αρνητική η y' και θετική η y'';

3. Εκτιμήστε τα διαστήματα όπου η $y = f(x)$ είναι

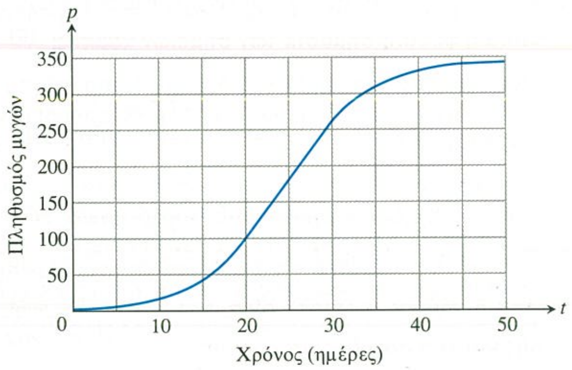
(α) αύξουσα

(β) φθίνουσα

(γ) Χρησιμοποιήστε το γράφημα της f' για να υποδείξετε πού προκύπτουν τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως, και αν αυτά είναι ελάχιστα ή μέγιστα.



4. Παρατίθεται η γραφική παράσταση ενός πληθυσμού μυγών. Ποια μέρα περίπου άλλαξε από αύξων σε φθίνων ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού;



Ύπαρξη ακροτάτων

5. *Μάθετε γράφοντας: Τοπικά ακρότατα* Εμφανίζει η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. *Μάθετε γράφοντας: Τοπικά μέγιστα* Εμφανίζει η συνάρτηση $g(x) = \csc x + 2\cot x$ τοπικά μέγιστα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. *Μάθετε γράφοντας: Ακρότατα* Εμφανίζει η συνάρτηση $f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ ολικά ελάχιστα ή μέγιστα; Αν ναι, βρείτε τα, αν όχι, εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν. Καταγράψτε όλα τα κρίσιμα σημεία της f.

8. *Μάθετε γράφοντας: Τοπικά ακρότατα* Βρείτε για ποιες τιμές των a και b η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

εμφανίζει τοπικό ακρότατο ίσο με 1 στο σημείο $x = 3$. Πρόκειται για ελάχιστο ή για μέγιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. *Μάθετε γράφοντας* Η συνάρτηση ακέραιας τιμής $f(x) = \operatorname{int} x$, που ορίζεται για κάθε x, εμφανίζει τοπικό μέγιστο ίσο με 0 για κάθε σημείο του $[0, 1)$. Μπορεί το τοπικό αυτό μέγιστο (αλλά και κάθε άλλο τοπικό μέγιστο της f) να θεωρηθεί και τοπικό ελάχιστο της f; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

10. **(α)** Δώστε ένα παράδειγμα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f της οποίας η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται σε σημείο c όπου η f δεν εμφανίζει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Αντιβαίνουν τα παραπάνω στο Θεώρημα 2 της Ενότητας 3.1; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

11. *Ολικά ακρότατα* Η συνάρτηση $y = 1/x$ δεν εμφανίζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο διάστημα $0 < x < 1$ παρά το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο συγκεκριμένο διάστημα. Το γεγονός αυτό αντιβαίνει ή όχι το θεώρημα ακροτάτων συνεχών συναρτήσεων, και γιατί;

12. *Ολικά ακρότατα* Ποια είναι τα ελάχιστα και ποια τα μέγιστα της συναρτήσεως $y = |x|$ στο διάστημα $-1 \le x < 1$; Προσέξτε ότι το διάστημα δεν είναι κλειστό. Παραβιάζεται έτσι το θεώρημα ακροτάτων συνεχών συναρτήσεων, και γιατί;

Το θεώρημα μέσης τιμής

13. **(α)** Δείξτε ότι η $g(t) = \sin^2 t - 3t$ είναι φθίνουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\sin^2 t - 3t = 5$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

14. **(α)** Δείξτε ότι η $y = \tan\theta$ είναι αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Αν αληθεύει το συμπέρασμα στο (α), τότε πώς εξηγείτε το ότι η τιμή $\tan\pi = 0$ είναι μικρότερη της $\tan(\pi/4) = 1$;

15. **(α)** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, 1]$.

T **(β)** Χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι σας, βρείτε μια λύση της εξίσωσης με ακρίβεια όσων περισσότερων δεκαδικών ψηφίων μπορείτε.

16. **(α)** *Μια αύξουσα συνάρτηση* Δείξτε ότι η $f(x) = x/(x + 1)$ είναι αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

(β) *Μια συνάρτηση χωρίς τοπικά ακρότατα* Δείξτε ότι η $f(x) = x^3 + 2x$ δεν εμφανίζει τοπικά ελάχιστα ούτε μέγιστα.

17. *Ταμιευτήρας νερού* Λόγω ισχυρών βροχοπτώσεων, ο όγκος του νερού σε υδατοταμιευτήρα αυξήθηκε κατά 1,7 εκατομμύρια κυβικά μέτρα μέσα σε 24 h. Δείξτε ότι κάποια στιγμή ο όγκος του νερού αυξανόταν με ρυθμό μεγαλύτερο από 1.000.000 L/min.

18. *Μάθετε γράφοντας* Ο τύπος $F(x) = 3x + C$ δίνει μια διαφορετική συνάρτηση για κάθε τιμή του C. Ωστόσο όλες αυτές οι συναρτήσεις έχουν την ίδια παράγωγο ως προς x, αφού $F'(x) = 3$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι μόνες με παράγωγο 3; Μήπως υπάρχουν κι άλλες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

19. *Μάθετε γράφοντας* Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

παρά το ότι

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

Μήπως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Πόρισμα 2 του θεωρήματος μέσης τιμής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

20. *Σύγκριση παραγώγων* Υπολογίστε τις πρώτες παραγώγους των $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ και $g(x) = -1/(x^2 + 1)$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών;

Σχεδίαση γραφικών παραστάσεων

Σχεδιάστε τις καμπύλες στις Ασκήσεις 21-26.

21. $y = x^2 - (x^3/6)$

22. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

23. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

24. $y = x^3(8 - x)$

25. $y = x - 3x^{2/3}$

26. $y = x\sqrt{3 - x}$

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 27-30 δίδεται η πρώτη παράγωγος της συναρτήσεως $y = f(x)$.

(α) Σε ποια σημεία (αν υπάρχουν), παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο ή σημείο καμπής η γραφική παράσταση της f;

(β) Κατασκευάστε το γενικό σχήμα του γραφήματος.

27. $y' = 16 - x^2$

28. $y' = x^2 - x - 6$

29. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$

30. $y' = x^4 - 2x^2$

Κίνηση

Συμπεράσματα από γραφικές παραστάσεις Στις Ασκήσεις 31 και 32 παρατίθεται το γράφημα της συνάρτησης θέσεως $s = f(t)$ ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα (t είναι ο χρόνος). Σε ποιες περίπου χρονικές στιγμές (αν υπάρχουν) θα μηδενίζεται

(α) η ταχύτητα;

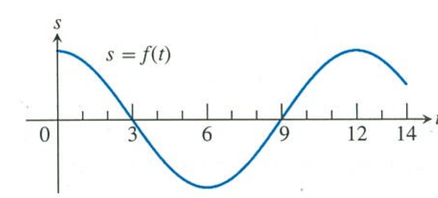
(β) η επιτάχυνση;

Σε ποια περίπου χρονικά διαστήματα κινείται το σώμα

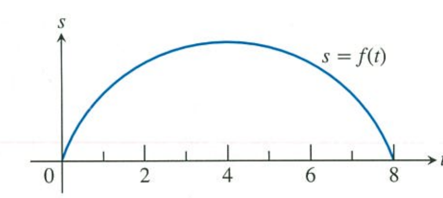
(γ) προς τα εμπρός;

(δ) προς τα πίσω;

31.



32.



33. *Ευθύγραμμη κίνηση* Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία και η συνάρτηση θέσης του είναι $s(t) = 3 + 4t - 3t^2 - t^3$. Να βρεθούν

(α) η ταχύτητα

(β) η επιτάχυνσή του.

(γ) Να περιγραφεί η κίνηση του σωματιδίου για $t \ge 0$.

34. *Ευθύγραμμη κίνηση* Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία και η συνάρτηση θέσης του είναι $s(t) = (1/2)t^4 - 4t^3 + 6t^2$, $t \ge 0$. Για ποια χρονικά διαστήματα κινείται το σώμα προς τα εμπρός; Προς τα πίσω;

Διαφορικές εξισώσεις

Στις Ασκήσεις 35-38, να βρεθούν όλες οι δυνατές συναρτήσεις που έχουν ως παράγωγο τη δοθείσα συνάρτηση.

35. $f'(x) = x^{-5} + \sin 2x$

36. $f'(x) = \sec x \tan x$

37. $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} + x^2 + 1,\ x > 0$

38. $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Στις Ασκήσεις 39 και 40, δίδεται η αρχική θέση σωματιδίου καθώς και η ταχύτητα v ή η επιτάχυνσή του a. Να βρεθεί η θέση s του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t.

39. $v = 9{,}8t + 5$, $s = 10$ για $t = 0$

40. $a = 32$, $v = 20$ και $s = 5$ για $t = 0$

Αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις και ευθείες φάσεων

Στις Ασκήσεις 41 και 42,

(α) Εντοπίστε τα σημεία ηρεμίας. Ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή;

(β) Κατασκευάστε την ευθεία των φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y''.

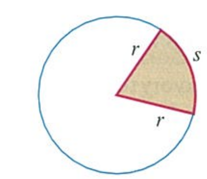
(γ) Σχεδιάστε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των καμπυλών λύσεων.

41. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$

42. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$

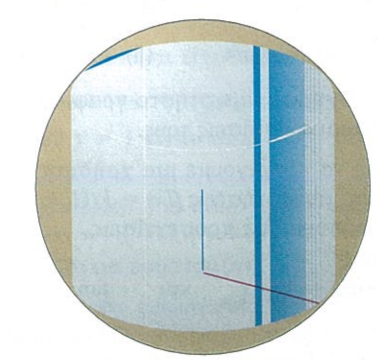
Βελτιστοποίηση

43. *Εμβαδόν κυκλικού τομέα* Αν η περίμετρος του κυκλικού τομέα που φαίνεται εδώ είναι σταθερή και ίση με 100 m, τότε για ποιες τιμές των r και s θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του τομέα;

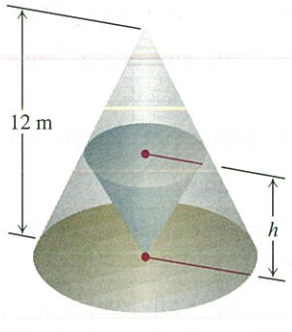


44. *Εμβαδόν τριγώνου* Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή που ορίζεται απο τα ίσα «σκέλη» στην αρχή των αξόνων, την απέναντι πλευρά του παράλληλη στον άξονα x, και τις άλλες δύο κορυφές πάνω από τον άξονα x και επί της καμπύλης $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν του τριγώνου.

45. *Εγγεγραμμένος κύλινδρος* Να βρεθεί το ύψος και η ακτίνα του μεγαλύτερου ορθού κυκλικού κυλίνδρου ο οποίος μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας $\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



46. *Κώνος στο εσωτερικό κώνου* Στο σχήμα φαίνονται δυο ορθοί κυκλικοί κώνοι, εκ των οποίων ο ένας έχει αναστραφεί και εισαχθεί στο εσωτερικό του άλλου. Οι βάσεις των κώνων είναι παράλληλες, και η κορυφή του μικρότερου κώνου συμπίπτει με το κέντρο της βάσης του άλλου. Για ποιες τιμές των r και h αποκτά μέγιστο όγκο ο μικρός κώνος;



47. *Βιομηχανία ελαστικών* Η εταιρεία σας μπορεί να παράγει ημερησίως x εκατοντάδες ελαστικά τύπου Α και y εκατοντάδες ελαστικά τύπου Β, όπου $0 \le x \le 4$ και

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

Για κάθε ελαστικό τύπου Α έχετε διπλάσιο κέρδος απ' ό,τι για ελαστικό τύπου Β. Ποιος είναι ο επικερδέστερος συνδυασμός παραγωγής ελαστικών κάθε τύπου;

48. *Κίνηση σωματιδίων* Οι θέσεις δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1 = \cos t$ και $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

(α) Πόση είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σωματιδίων;

(β) Πότε συγκρούονται τα σωματίδια;

49. *Κουτί ανοιχτό* Ένα ανοιχτό ορθογώνιο κουτί κατασκευάζεται από χαρτόνι διαστάσεων 10×16 cm αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές και διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Βρείτε με αναλυτικές μεθόδους τις διαστάσεις του κουτιού μέγιστου όγκου και τον όγκο αυτό. Κάντε ένα σχήμα για να στηρίξετε την απάντησή σας.
T

50. *Σχεδίαση κάδου* Πρόκειται να σχεδιάσετε έναν ατσάλινο κάδο τετράγωνης βάσης και χωρητικότητας 32 m^3. Ο κάδος θα κατασκευαστεί από φύλλο πάχους ενός cm και το βάρος του δεν θα πρέπει να είναι περισσότερο απ' όσο χρειάζεται. Ποιες διαστάσεις προτείνετε;

Γραμμικοποίηση

51. Να βρεθούν οι γραμμικοποιήσεις των

(α) $\tan x$ στο $x = -\pi/4$ **(β)** $\sec x$ στο $x = -\pi/4$.

Σε ενιαίο σχήμα, παραστήστε γραφικά τις καμπύλες και τις γραμμικοποιήσεις τους.

52. Μπορούμε να εξαγάγουμε μια χρήσιμη γραμμική προσέγγιση της συναρτήσεως $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ στο $x = 0$ αν συνδυάσουμε τις προσεγγίσεις

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{και} \quad \tan x \approx x$$

οπότε παίρνουμε

$$\frac{1}{1 + \tan x} \approx 1 - x.$$

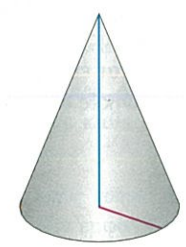
Δείξτε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι η κανονική γραμμική προσέγγιση της $1/(1 + \tan x)$ στο $x = 0$.

53. Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1 + x} + \sin x - 0{,}5$ στο $x = 0$.

54. Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = 2/(1 - x) + \sqrt{1 + x} - 3{,}1$ στο $x = 0$.

Διαφορικές εκτιμήσεις μεταβολών

55. *Όγκος κώνου* Γράψτε μια προσεγγιστική έκφραση για τη μεταβολή του όγκου ορθού κυκλικού κώνου όταν η ακτίνα μεταβάλλεται από r_0 σε $r_0 + dr$ και το ύψος παραμένει αμετάβλητο.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

(Εμβαδόν πλευρικής επιφάνειας)

56. *Έλεγχος σφάλματος*

(α) Με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρήσετε το μήκος της ακμής κύβου για να είστε βέβαιοι ότι ο υπολογισμός του εμβαδού της κυβικής επιφάνειας δεν περιέχει σφάλμα μεγαλύτερο του 2%;

(β) Έστω ότι μετρήσατε την ακμή με την απαιτούμενη ακρίβεια του ερωτήματος (α). Με πόση περίπου ακρίβεια μπορεί τώρα να υπολογιστεί ο κυβικός όγκος; Για να το βρείτε, θα πρέπει να εκτιμήσετε το ποσοστιαίο σφάλμα στον υπολογισμό όγκου που υπεισέρχεται λόγω του σφάλματος μέτρησης της ακμής.

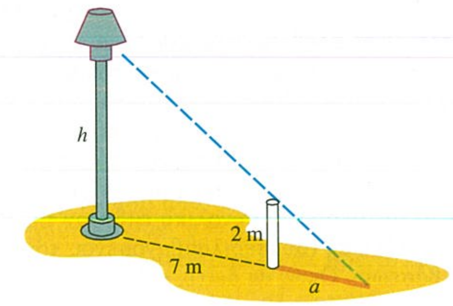
57. *Συσσωρευόμενο σφάλμα* Η ισημερινή περιφέρεια μιας σφαίρας μετριέται και βρίσκεται ότι είναι 10 cm με πιθανό σφάλμα 0,4 cm. Από τη μέτρηση αυτή υπολογίζουμε κατά σειρά την ακτίνα, το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας. Εκτιμήστε τα ποσοστιαία σφάλματα στον υπολογισμό

(α) της ακτίνας

(β) του εμβαδού της σφαιρικής επιφάνειας

(γ) του όγκου.

58. *Εύρεση ύψους* Για να βρείτε το ύψος του στύλου (δείτε το σχήμα), στήνετε ένα δοκάρι ύψους 2 m σε απόσταση 7 m από τον στύλο και μετράτε το μήκος a της σκιάς του, το οποίο βρίσκετε ότι είναι 5 m, με ακρίβεια ενός εκατοστομέτρου. Υπολογίστε το ύψος του στύλου για $a = 5$ και εκτιμήστε το πιθανό σφάλμα στον υπολογισμό αυτόν.



T Μέθοδος του Νεύτωνα

Στις Ασκήσεις 59-62, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα σημεία μηδενισμού των συναρτήσεων που δίδονται. Χρησιμοποιήστε κομπιουτεράκι και απαντήστε με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων.

59. $f(x) = 3x - x^3, \quad 1 \le x \le 2$

60. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad x < 0$

61. $g(t) = 2\cos t - \sqrt{1 - t}, \qquad -\infty < t \le 1$

62. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1 + t} - 4, \quad t > 0$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

1. *Μάθετε γράφοντας* Τι μπορείτε να συμπεράνετε για μια συνάρτηση της οποίας η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή σε κάποιο διάστημα είναι ίσες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Μάθετε γράφοντας* Αληθεύει ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο σε ένα κλειστό διάστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Μάθετε γράφοντας* Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα ακρότατα μιας συνεχούς συναρτήσεως σε ένα ανοιχτό διάστημα; Το ίδιο ερώτημα για ένα ημιανοιχτό διάστημα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

4. *Τοπικά ακρότατα* Χρησιμοποιήστε το τοπίο προσήμων της παραγώγου

$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

για να εντοπίσετε τα σημεία όπου η f εμφανίζει μέγιστα και ελάχιστα.

5. *Τοπικά ακρότατα*

(α) Έστω ότι η πρώτη παράγωγος της $y = f(x)$ είναι

$$y' = 6(x + 1)(x - 2)^2.$$

Σε ποια σημεία, αν υπάρχουν, εμφανίζει το γράφημα της f τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, και σημείο καμπής;

(β) Έστω ότι η πρώτη παράγωγος της $y = f(x)$ είναι

$$y' = 6x(x + 1)(x - 2).$$

Σε ποια σημεία, αν υπάρχουν, εμφανίζει το γράφημα της f τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, και σημείο καμπής;

6. *Μάθετε γράφοντας: Φραγμένη συνάρτηση* Αν $f'(x) \le 2$ για κάθε x, τότε πόση είναι η μέγιστη αύξηση της f στο $[0, 6]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. *Φραγμένη συνάρτηση* Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και c ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Δείξτε ότι αν $f'(x) \le 0$ στο $[a, c)$ και $f'(x) \ge 0$ στο $(c, b]$, τότε η $f(x)$ δεν γίνεται ποτέ μικρότερη της $f(c)$ στο $[a, b]$.

8. *Μια ανισότητα*

(α) Δείξτε ότι $-1/2 \le x/(1 + x^2) \le 1/2$ για κάθε x.

(β) Έστω ότι η παράγωγος της f είναι $f'(x) = x/(1 + x^2)$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) δείξτε ότι

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b - a|$$

για τυχόντα a και b.

9. *Μάθετε γράφοντας* Η παράγωγος της $f(x) = x^2$ μηδενίζεται για $x = 0$, αλλά η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό δεν αντιβαίνει στο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής που λέει ότι συναρτήσεις με μηδενική παράγωγο είναι σταθερές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

10. *Ακρότατα και σημεία καμπής* Έστω $h = fg$ το γινόμενο δυο διαφορίσιμων συναρτήσεων του x.

(α) Αν οι f και g είναι θετικές, με τοπικά μέγιστα στο $x = a$, και αν οι f' και g' αλλάζουν πρόσημο στο a, τότε θα εμφανίζει η h τοπικό μέγιστο στο a;

(β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σημεία καμπής για $x = a$, τότε θα έχει και η γραφική παράσταση της h σημείο καμπής στο a;

Για κάθε ένα από τα παραδείγματα αυτά, αν η απάντησή σας είναι καταφατική, δώστε μιαν απόδειξη. Αν είναι αρνητική, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

11. *Εύρεση συναρτήσεως* Χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα δεδομένα βρείτε τις τιμές των a, b, και c στον τύπο $f(x) = (x + a)/(bx^2 + cx + 2)$.

i. Τα a, b, και c είναι είτε 0 είτε 1.

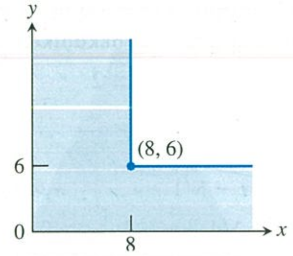
ii. Το γράφημα της f διέρχεται από το σημείο $(-1, 0)$.

iii. Η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη του γραφήματος της f.

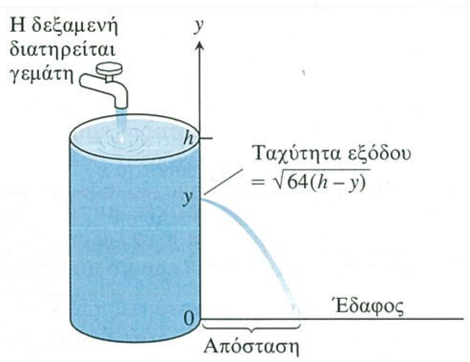
12. *Οριζόντια εφαπτομένη* Για ποια τιμή ή τιμές της σταθεράς k θα έχει η καμπύλη $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη;

13. *Μέγιστο εγγεγραμμένο τρίγωνο* Από τρία σημεία A, B, και C του μοναδιαίου κύκλου, τα δυο πρώτα είναι αντιδιαμετρικά αντίθετα. Αληθεύει ότι η περίμετρος του τριγώνου ABC γίνεται μέγιστη όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές; Πώς το ξέρετε;

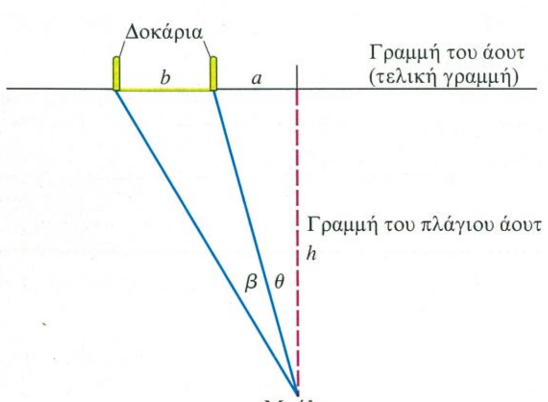
14. *Το πρόβλημα της σκάλας* Πόσο είναι περίπου το μήκος (σε μέτρα) της μακρύτερης σκάλας που μπορείτε να μεταφέρετε οριζόντια, ενώ διασχίζετε τη γωνία του διαδρόμου που φαίνεται στο σχήμα; Στρογγυλοποιήστε την απάντησή σας στο πλησιέστερο μέτρο.



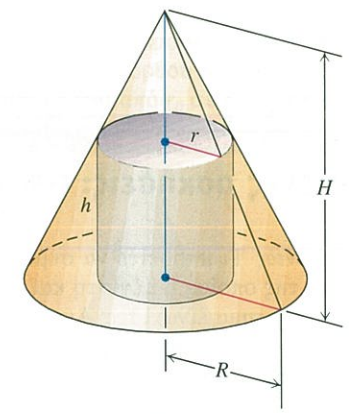
15. *Τρύπα σε δεξαμενή νερού* Θέλετε να ανοίξετε μια τρύπα στο πλαϊνό τοίχωμα της δεξαμενής που φαίνεται στο σχήμα, σε τέτοιο ύψος ώστε το εξερχόμενο νερό να εκτινάσσεται όσο το δυνατόν μακρύτερα από τη δεξαμενή προτού φτάσει στο έδαφος. Αν ανοίξετε την τρύπα κοντά στην οροφή της δεξαμενής, όπου η πίεση είναι χαμηλή, το νερό θα εξέρχεται με μικρότερη ταχύτητα αλλά θα κινείται για περισσότερο χρόνο προτού φτάσει στο έδαφος. Αν πάλι ανοίξετε την τρύπα κοντά στον πυθμένα της δεξαμενής, το νερό θα εκτινάσσεται με μεγαλύτερη ταχύτητα αλλά θα έχει λιγότερο χρόνο για να απομακρυνθεί. Ποια είναι η βέλτιστη θέση της τρύπας, αν υπάρχει τέτοια; (*Υπόδειξη:* Πόσο χρόνο θα κάνει ένα μόριο νερού που εξέρχεται από ύψος y να πέσει στο έδαφος;)



16. *Σκοράρισμα από τη γραμμή του πλάγιου άουτ* Ένας ποδοσφαιριστής θέλει να σκοράρει από σημείο της γραμμής του πλάγιου άουτ. Τα δοκάρια του τέρματος απέχουν b μέτρα μεταξύ τους, ενώ το πλησιέστερο στη γραμμή του πλάγιου άουτ δοκάρι απέχει $a > 0$ μέτρα από αυτήν. (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.) Βρείτε την απόσταση h από τη γραμμή του άουτ (τελική γραμμή) που δίνει στον παίκτη τη μεγαλύτερη γωνία στόχευσης β. Θεωρήστε ότι το γήπεδο είναι επίπεδο.



17. *Ένα πρόβλημα μεγίστου-ελαχίστου με μεταβλητή απάντηση* Μερικές φορές η λύση προβλημάτων μεγίστου-ελαχίστου εξαρτάται από τις αναλογίες των μεγεθών που εμπλέκονται. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας r και ύψους h εγγράφεται σε ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας R και ύψους H, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε την τιμή του r (συναρτήσει των R και H) που μεγιστοποιεί το συνολικό εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας (συμπεριλαμβανομένου του εμβαδού των βάσεων). Όπως θα δείτε, η λύση εξαρτάται από το αν είναι $H \le 2R$ ή $H > 2R$.



18. *Ελαχιστοποίηση παραμέτρου* Βρείτε την ελάχιστη τιμή της θετικής σταθεράς m έτσι ώστε η ποσότητα $mx - 1 + (1/x)$ να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός για κάθε θετικό x.

19. *Απόδειξη του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου* Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για τοπικά μέγιστα και ελάχιστα (Ενότητα 3.3) λέει ότι:

(α) Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$ αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$

(β) Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$ αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$.

Για να αποδείξετε το (α), έστω $\epsilon = (1/2)\,|f''(c)|$. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

για να συμπεράνετε ότι για κάποιο $\delta > 0$, θα ισχύει

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0.$$

Έτσι, η $f'(c+h)$ είναι θετική για $-\delta < h < 0$ και αρνητική για $0 < h < \delta$. Με παρόμοιο τρόπο αποδείξτε το (β).

20. *Ανισότητα του Schwarz*

(α) Δείξτε ότι αν $a > 0$, τότε $f(x) = ax^2 + 2bx + c \ge 0$ για κάθε (πραγματικό) x αν και μόνο αν $b^2 \le ac$.

(β) Αποδείξτε την **ανισότητα του Schwarz,**

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του (α) στο άθροισμα

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2.$$

(γ) Δείξτε ότι το σύμβολο της ισότητας στην ανισότητα του Schwarz θα ισχύει μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο το a_ix ισούται με $-b_i$ για κάθε i από 1 έως και n.

21. *Περίοδος ρολογιού εκκρεμούς* Η περίοδος T ενός ρολογιού με εκκρεμές (δηλαδή ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης) δίδεται από τον τύπο $T^2 = 4\pi^2L/g$, όπου το T μετριέται σε sec, $g = 9{,}8\ \text{m/sec}^2$, και το L, το μήκος του εκκρεμούς, μετριέται σε m. Βρείτε προσεγγιστικά

(α) το μήκος ενός ρολογιού εκκρεμούς με περίοδο $T = 1$ sec

(β) τη μεταβολή dT της περιόδου T αν το εκκρεμές του ερωτήματος (α) επιμηκυνθεί κατά 0,001 m

(γ) το συνολικό χρονικό διάστημα που κερδίζει ή χάνει το ρολόι σε μια ημέρα ως συνέπεια της μεταβολής της περιόδου κατά την ποσότητα dT που βρήκατε στο (β).

22. *Εκτίμηση αντιστρόφου χωρίς διαίρεση* Μπορείτε να εκτιμήσετε τον αντίστροφο ενός αριθμού a χωρίς να εκτελέσετε την πράξη διαίρεσης της μονάδας με a, αλλά εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $f(x) = (1/x) - a$. Για παράδειγμα, αν $a = 3$, η σχετική συνάρτηση είναι η $f(x) = (1/x) - 3$.

(α) Παραστήστε γραφικά την $y = (1/x) - 3$. Πού τέμνει το γράφημα τον άξονα x;

(β) Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή ο αναδρομικός τύπος της ρίζας της εξίσωσης γίνεται

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

οπότε όντως δεν χρειάζεται να εκτελεστεί η διαίρεση για να βρεθεί ο αντίστροφος.

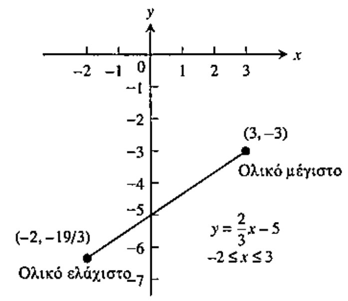
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ενότητα 3.1, σελ. 228-230

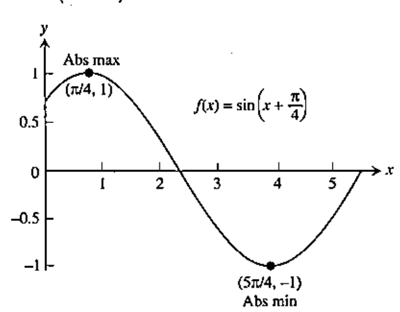
1. Ολικό ελάχιστο στο $x = c_2$, ολικό μέγιστο στο $x = b$
3. Ολικό μέγιστο στο $x = c$, δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο
5. Ολικό ελάχιστο στο $x = a$, ολικό μέγιστο στο $x = c$
7. Τοπικό ελάχιστο στο $(-1, 0)$, τοπικό μέγιστο στο $(1, 0)$
9. Μέγιστο στο $(0, 5)$

11. (γ) 13. (δ)

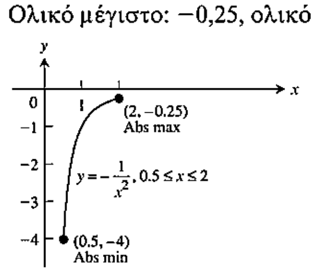
15. Ολικό μέγιστο: -3· ολικό ελάχιστο: $-\frac{19}{3}$



17. Η μέγιστη τιμή είναι 1 και προκύπτει για $x = \frac{\pi}{4}$· η ελάχιστη τιμή είναι -1 και προκύπτει για $x = \frac{5\pi}{4}$· τοπικό ελάχιστο στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$· τοπικό μέγιστο στο $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.



19. Ολικό μέγιστο: $-0{,}25$, ολικό ελάχιστο: -4



21. Η ελάχιστη τιμή είναι 1 και προκύπτει για $x = 2$.
23. Τοπικό μέγιστο στο $(-2, 17)$· τοπικό ελάχιστο στο $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$
25. Η ελάχιστη τιμή είναι 0 και προκύπτει για $x = -1$ και στο $x = 1$.
27. Υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 1)$.
29. Η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{2}$ και προκύπτει για $x = 1$· η ελάχιστη τιμή είναι $-\frac{1}{2}$ και προκύπτει για $x = -1$.

31.

Κρίσιμο σημείο	Παράγωγος	Ακρότατο	Τιμή
$x = -\frac{4}{5}$	0	Τοπικό μέγιστο	$\frac{12}{25}10^{1/3} = 1{,}034$
$x = 0$	Δεν ορίζεται	Τοπικό ελάχιστο	0

33.

Κρίσιμο σημείο	Παράγωγος	Ακρότατο	Τιμή
$x = -2$	Δεν ορίζεται	Τοπικό μέγιστο	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Ελάχιστο	-2
$x = \sqrt{2}$	0	Μέγιστο	2
$x = 2$	Δεν ορίζεται	Τοπικό ελάχιστο	0

35.

Κρίσιμο σημείο	Παράγωγος	Ακρότατο	Τιμή
$x = 1$	Δεν ορίζεται	Ελάχιστο	2

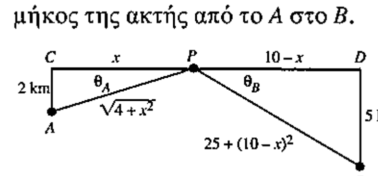
37.

Κρίσιμο σημείο	Παράγωγος	Ακρότατο	Τιμή
$x = -1$	0	Μέγιστο	5
$x = 1$	Δεν ορίζεται	Τοπικό ελάχιστο	1
$x = 3$	0	Μέγιστο	5

39. (α) Όχι
(β) Η παράγωγος είναι ορισμένη και μη μηδενική για $x \neq 2$. Επίσης, $f(2) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 2$.
(γ) Όχι, διότι το διάστημα $(-\infty, \infty)$ δεν είναι κλειστό.
(δ) Οι απαντήσεις στα (α) και (β) είναι οι ίδιες, αρκεί όπου 2 να θέσουμε το a.

41. (α) $C(x) = 0{,}3\sqrt{16 + x^2} + 0.2(9 - x)$ εκατομμύρια ευρώ, όπου $0 \le x \le 9$ mi. Προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος, ο αγωγός θα πρέπει να ξεκινά από τη δεξαμενή και να διέρχεται από το B, το οποίο απέχει 3.58 mi από το A κατά μήκος της ακτής, και κατόπιν να διατρέχει την ακτή από το σημείο B ώς το διυλιστήριο.
(β) Θεωρητικά, το κόστος ανά μίλι p του υποθαλάσσιου αγωγού θα έπρεπε να είναι άπειρο για να δικαιολογηθεί η απευθείας σύνδεση της δεξαμενής με το σημείο A (οπότε το x_c μηδενίζεται). Για τιμές του $p > 0{,}218864$, υπάρχει πάντα κάποιο x_c στο $(0, 9)$ που θα μας δώσει μια ελάχιστη τιμή για το C. Αυτό προκύπτει αν εξετάσουμε τη δεύτερη παράγωγο $C''(x_c) = \frac{16p}{(16 + x_c^2)^{3/2}}$, που είναι πάντα θετική για $p > 0$.

43. Το μήκος του αγωγού είναι $L(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$ για $0 \le x \le 10$. $x = \frac{20}{7} \approx 2{,}857$ km κατά μήκος της ακτής από το A στο B.



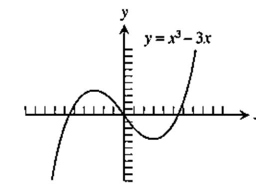
45. (α) Η μέγιστη τιμή είναι 144 και προκύπτει για $x = 2$.
(β) Ο μέγιστος όγκος του κιβωτίου είναι 144 κυβικές μονάδες, και προκύπτει για $x = 2$.

47. Το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν είναι $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}$ cm^2.

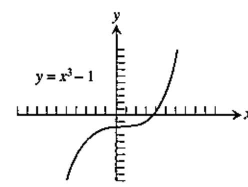
49. $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$ 51. Ναι

53. Η g εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $-c$.
55. (α) Η $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ είναι δευτεροβάθμια, οπότε μπορεί να έχει 0, 1, ή 2 ρίζες, οι οποίες είναι και οι κρίσιμες τιμές της f. Παραδείγματα:

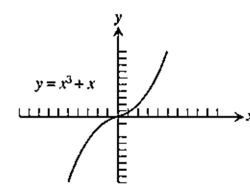
Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ έχει δύο κρίσιμα σημεία για $x = -1$ και $x = 1$.



Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$ έχει ένα κρίσιμο σημείο στο $x = 0$.



Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.



(β) Δύο ή κανένα

57. Η μέγιστη τιμή είναι 11 και προκύπτει για $x = 5$· η ελάχιστη τιμή είναι 5 και προκύπτει σε όλο το διάστημα $[-3, 2]$· τοπικό ελάχιστο υπάρχει στο $(-5, 9)$.
59. Η μέγιστη τιμή είναι 5 και προκύπτει σε όλο το διάστημα $[3, \infty)$· η ελάχιστη τιμή είναι -5 και προκύπτει σε όλο το διάστημα $(-\infty, -2]$.

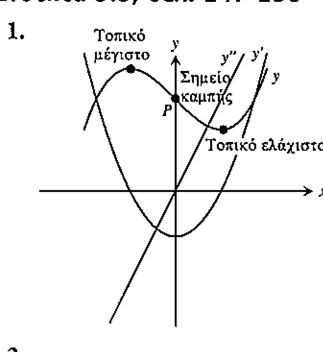
Ενότητα 3.2, σελ. 237-239

1. Δεν πληροί τις προϋποθέσεις
3. Πληροί τις προϋποθέσεις
5. Το θεώρημα του Rolle δεν ισχύει διότι η f δεν είναι συνεχής στο $x = 1$.
7. Από το Πόρισμα 1, έχουμε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \Rightarrow f(x) = C$, όπου C σταθερά. Εφόσον $f(-1) = 3$, έχουμε $C = 3 \Rightarrow f(x) = 3$ για κάθε x.
9. (α) $y = \frac{x^2}{2} + C$
(β) $y = \frac{x^3}{3} + C$
(γ) $y = \frac{x^4}{4} + C$
11. (α) $r = \frac{1}{\theta} + C$
(β) $r = \theta + \frac{1}{\theta} + C$
(γ) $r = 5\theta - \frac{1}{\theta} + C$

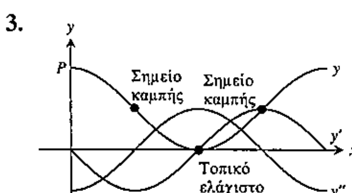
13. $f(x) = x^2 - x$ 15. $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$
17. $s = 4{,}9t^2 + 5t + 10$ 19. $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$
21. $s = 16t^2 + 20t + 5$ 23. $s = \sin(2t) - 3$
25. 48 m/sec 27. 14 m/sec
29. (α) $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ (β) $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$
31. Αν $T(t)$ είναι η θερμοκρασία του θερμομέτρου τη στιγμή t, τότε $T(0) = -19$°C και $T(14) = 100$°C. Βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής, θα υπάρχει κάποιο $0 < t_0 < 14$ τέτοιο ώστε $\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = 8{,}5$°C/sec $= T'(t_0)$, ίσο δηλαδή με τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας τη χρονική στιγμή $t = t_0$ όπως αυτός μπορεί να μετρηθεί από την ανερχόμενη στάθμη υδραργύρου στο θερμόμετρο.
33. Διότι η μέση ταχύτητα της τριήρους ήταν περίπου 7,667 κόμβοι, οπότε βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής, θα πρέπει τουλάχιστον μία φορά κατά τη διάρκεια του ταξιδιού της να κινήθηκε με αυτήν την ταχύτητα.
35. Το θεώρημα μέσης τιμής μάς δίδει
$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a - b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$
39. Η $f(x)$ θα πρέπει να μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά στο διάστημα μεταξύ a και b βάσει του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Υποθέστε τώρα ότι η $f(x)$ μηδενίζεται δύο φορές μεταξύ των a και b. Τότε, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής, η $f'(x)$ θα πρέπει να μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά μεταξύ των δύο ριζών της $f(x)$, κάτι που όμως δεν μπορεί να αληθεύει εφόσον μάς δίδεται ότι $f'(x) \neq 0$ στο διάστημα αυτό. Συνεπώς, η $f(x)$ μηδενίζεται μία και μόνη φορά στο διάστημα μεταξύ a και b.
45. $1{,}09999 \le f(0{,}1) \le 1{,}1$

Ενότητα 3.3, σελ. 247-250

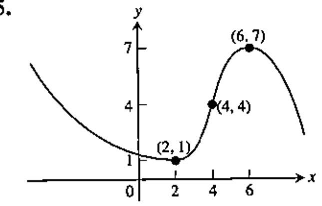
1.



3.



5.



7. (α) Μηδέν: $x = \pm 1$· θετική: $(-\infty, -1)$ και $(1, \infty)$· αρνητική: $(-1, 1)$
(β) Μηδέν: $x = 0$· θετική: $(0, \infty)$· αρνητική: $(-\infty, 0)$

9. (α) $(-\infty, -2]$ και $[0, 2]$
(β) $[-2, 0]$ και $[2, \infty)$
(γ) Τοπικά μέγιστα: $x = -2$ και $x = 2$· τοπικό ελάχιστο: $x = 0$

11. (α) $[0, 1]$, $[3, 4]$, και $[5{,}5, 6]$
(β) $[1, 3]$ και $[4, 5{,}5]$
(γ) Τοπικά μέγιστα: $x = 1$, $x = 4$ (αν η f είναι συνεχής στο $x = 4$), και $x = 6$· τοπικά ελάχιστα: $x = 0$, $x = 3$, και $x = 5{,}5$

13. (α) Κρίσιμα σημεία για $x = -2$ και $x = 1$
(β) Αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, \infty)$, φθίνουσα στο $[-2, 1]$
(γ) Τοπικό μέγιστο για $x = -2$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$

15. (α) Κρίσιμα σημεία για $x = -2$, $x = 1$ και $x = 3$
(β) Αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 1]$ και $[3, \infty)$, φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[1, 3]$
(γ) Τοπικό μέγιστο για $x = 1$, τοπικά ελάχιστα για $x = -2$ και $x = 3$

17. (α) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (β) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$
(γ) $(-\infty, \infty)$ (δ) Πουθενά
(ε) Τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$
(στ) Κανένα

19. (α) $[-1, 0]$ και $[1, \infty)$ (β) $(-\infty, -1]$ και $[0, 1]$
(γ) $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ (δ) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
(ε) Τοπικό μέγιστο για $x = 0$· τοπικά (και ολικά) ελάχιστα για $x = \pm 1$
(στ) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{9}\right)$

21. (α) $[-2, 2]$
(β) $[-\sqrt{8}, -2]$ και $[2, \sqrt{8}]$
(γ) $(-\sqrt{8}, 0)$
(δ) $(0, \sqrt{8})$
(ε) Τοπικά μέγιστα: $(-\sqrt{8}, 0)$ και $(2, 4)$· τοπικά ελάχιστα: $(-2, -4)$ και $(\sqrt{8}, 0)$
(στ) $(0, 0)$

23. (α) $(-\infty, -2]$ και $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ (β) $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$
(γ) $\left(-\frac{7}{4}, \infty\right)$ (δ) $\left(-\infty, -\frac{7}{4}\right)$
(ε) Τοπικό μέγιστο: $(-2, -40)$· τοπικό ελάχιστο: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{161}{4}\right)$
(στ) $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{321}{8}\right)$

25. (α) $(-\infty, \infty)$ (β) Πουθενά
(γ) $(-\infty, 0)$ (δ) $(0, \infty)$
(ε) Κανένα (στ) $(0, 3)$

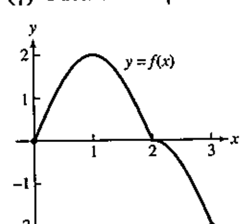
27. (α) $[1, \infty)$ (β) $(-\infty, 1]$
(γ) $(-\infty, -2)$ και $(0, \infty)$ (δ) $(-2, 0)$
(ε) Τοπικό ελάχιστο: $(1, -3)$ (στ) $\approx (-2, 7{,}56)$ και $(0, 0)$

29. (α) Περίπου $[0{,}15, 1{,}40]$ και $[2{,}45, \infty)$
(β) Περίπου $(-\infty, 0{,}15]$, $[1{,}40, 2)$ και $(2, 2{,}45]$
(γ) $(-\infty, 1)$ και $(2, \infty)$
(δ) $(1, 2)$
(ε) Τοπικό μέγιστο: $\approx (1{,}40, 1{,}29)$· τοπικά ελάχιστα: $\approx (0{,}15, 0{,}48)$ και $(2{,}45, 9{,}22)$
(στ) $(1, 1)$

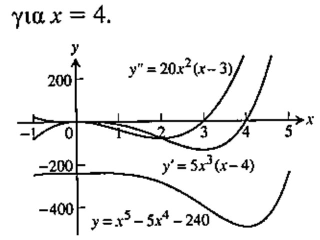
31. (α) $[0, \infty)$ (β) Πουθενά
(γ) $\left(\frac{9}{5}, \infty\right)$ (δ) $\left(0, \frac{9}{5}\right)$
(ε) Τοπικό (και ολικό) ελάχιστο: $(0, 0)$
(στ) $\left(\frac{9}{5}, \frac{24}{5} \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{5}}\right) \approx (1{,}8, 5{,}56)$

33. (α) Κανένα (β) Στο $x = 2$
(γ) Για $x = 1$ και $x = \frac{5}{3}$

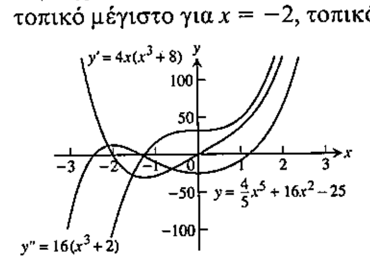
35. (α) Ολικό μέγιστο στο $(1, 2)$· ολικό ελάχιστο στο $(3, -2)$
(β) Κανένα
(γ) Μία δυνατή απάντηση:



37. Οι ρίζες της y' είναι ακρότατα της y. Η μεγαλύτερη ρίζα της y'' είναι σημείο καμπής της y. Σημείο καμπής για $x = 3$, τοπικό μέγιστο για $x = 0$, τοπικό ελάχιστο για $x = 4$.



39. Οι ρίζες των y' και y'' είναι ακρότατα και σημεία καμπής, αντίστοιχα. Σημείο καμπής για $x = -\sqrt[3]{2}$, τοπικό μέγιστο για $x = -2$, τοπικό ελάχιστο για $x = 0$.



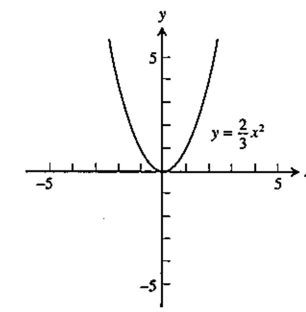
43. (α) $v(t) = 2t - 4$ (β) $a(t) = 2$
(γ) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 3 κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Φτάνει στη θέση -1 όταν $t = 2$ οπότε και αλλάζει κατεύθυνση, κινούμενο εφεξής προς τη θετική κατεύθυνση.

45. (α) $v(t) = 3t^2 - 3$ (β) $a(t) = 6t$
(γ) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 3 κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Φτάνει στη θέση 1 όταν $t = 1$ οπότε και αλλάζει κατεύθυνση, κινούμενο εφεξής προς τη θετική κατεύθυνση.

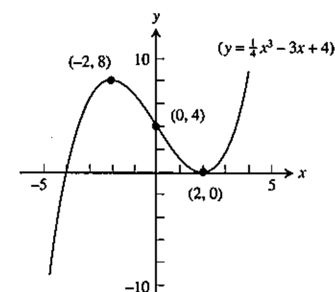
47. (α) $t = 2{,}2, 6, 9{,}8$ (β) $t = 4, 8, 11$

49. Όχι. Αν και η f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο αυτό, μπορεί κάλλιστα να αυξάνεται (ή να μειώνεται) εκατέρωθεν του σημείου, χωρίς να εμφανίζει τοπικό ακρότατο εκεί.

51. Μία δυνατή απάντηση:



53. Μία δυνατή απάντηση:

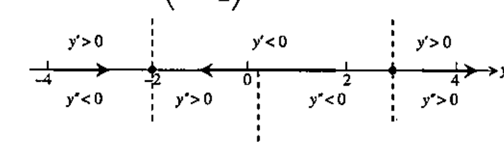


63. (β) $f'(x) = 3x^2 + k$· $-12k$· θετική για $k < 0$, αρνητική για $k > 0$, 0 για $k = 0$· η f' έχει δύο ρίζες για $k < 0$, μία ρίζα για $k = 0$, καθόλου ρίζες για $k > 0$

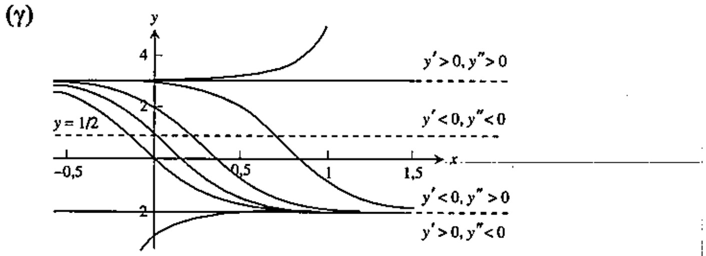
65. (α) Παραγωγίζουμε με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, και βρίσκουμε $f'(x) = \frac{abce^{bx}}{(e^{bx} + a)^2}$, οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου abc.
(β) $f''(x) = -\frac{ab^2ce^{bx}(e^{bx} - a)}{(e^{bx} + a)^3}$. Εφόσον $a > 0$, η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο στο $x = \frac{\ln a}{b}$ λόγω του παράγοντα $(e^{bx} - a)$ στον αριθμητή, άρα θα υπάρχει σημείο καμπής εκεί.

Ενότητα 3.4 σελ. 258-259

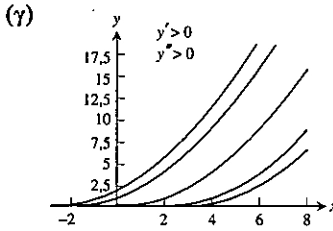
1. $y' = (y + 2)(y - 3)$
(α) Η $y = -2$ είναι τιμή ευσταθούς ισορροπίας ενώ η $y = 3$ είναι τιμή ασταθούς ισορροπίας.
(β) $y'' = 2(y + 2)\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)$



(γ)

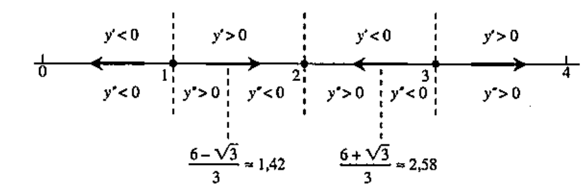


5. $y' = \sqrt{y}$, $y > 0$
(α) Δεν υπάρχουν τιμές ισορροπίας.
(β) $y'' = \frac{1}{2}$
(γ)

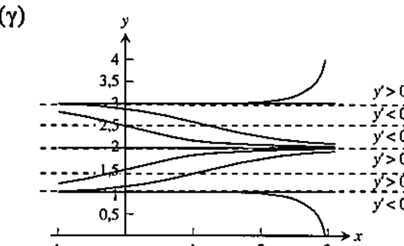


7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$
(α) Οι $y = 1$ και $y = 3$ είναι τιμές ασταθούς ισορροπίας ενώ η $y = 2$ είναι τιμή ευσταθούς ισορροπίας.
(β) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y - 1)(y - 2)(y - 3) =$

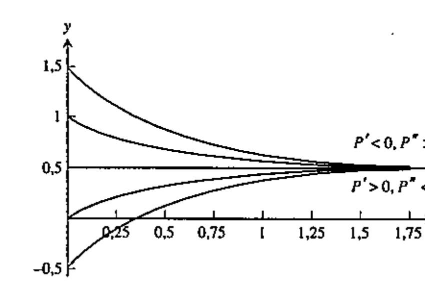
$$(y - 1)\left(y - \frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)(y - 2)\left(y - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)(y - 3)$$



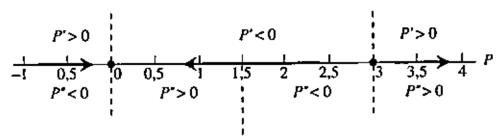
(γ)

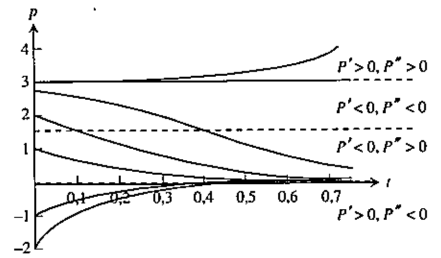


9. Η $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$ εμφανίζει ευσταθή ισορροπία στο $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dt^2} = -2\frac{dP}{dt} = -2(1 - 2P)$.

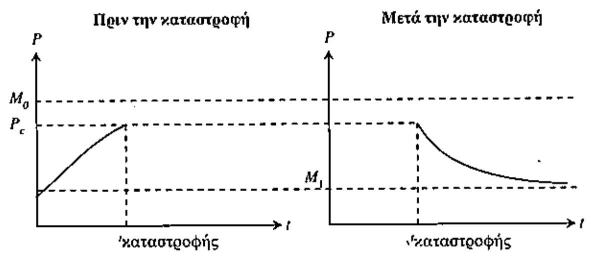


11. Η $\frac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$ εμφανίζει ευσταθή ισορροπία στο $P = 0$ και ασταθή ισορροπία στο $P = 3$· $\frac{d^2P}{dt^2} = 2(2P - 3)\frac{dP}{dt} = 4P(2P - 3)(P - 3)$





13. Πριν την καταστροφή, ο πληθυσμός εμφανίζει λογιστική αύξηση οπότε η συνάρτηση πληθυσμού $P(t)$ αυξάνει προς την τιμή M_0 ευσταθούς ισορροπίας. Μετά την καταστροφή, ο πληθυσμός εμφανίζει λογιστική μείωση οπότε και η συνάρτηση $P(t)$ μειώνεται προς την τιμή M_1 της νέας ευσταθούς ισορροπίας.

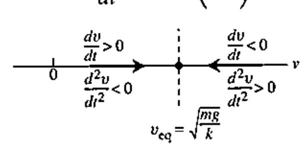


15. $\frac{dy}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$, $g, k, m > 0$ και $v(t) \geq 0$

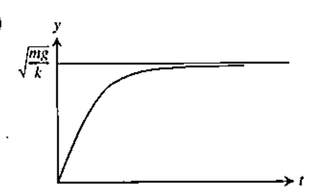
Ισορροπία: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Κοιλότητα: $\frac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\frac{dv}{dt} = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\left(g - \frac{k}{m}v^2\right)$

(α)



(β)

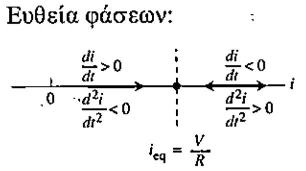


(γ) $v_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} = \sqrt{\frac{686}{0{,}24}} = 53{,}46$ m/sec= 192,5 km/h

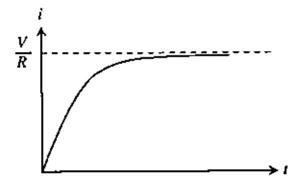
17. $F = F_p - F_r \cdot ma = 25 - 5|v| \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(25 - 5|v|)$.

Η μέγιστη ταχύτητα προκύπτει για $\frac{dv}{dt} = 0$ άρα $v = 5$ m/sec.

19. Ευθεία φάσεων:



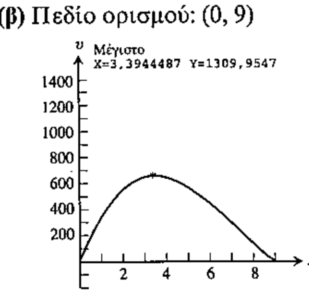
Αν ο διακόπτης κλείσει για $t = 0$, τότε $i(0) = 0$, οπότε η γραφική παράσταση της λύσης θα έχει το εξής σχήμα:



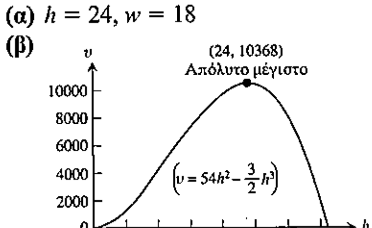
Καθώς $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma} = \frac{V}{R}$.

Ενότητα 3.5, σελ. 269-276

1. 16 cm, 4 cm επί 4 cm.
3. (α) $(x, 1 - x)$ (β) $A(x) = 2x(1 - x)$
(γ) $\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες, 1 επί $\frac{1}{2}$
5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ cm, $\frac{2450}{27}$ cm^3
7. 80.000 m^2· 400 m επί 200 m
9. (α) Οι βέλτιστες διαστάσεις της δεξαμενής είναι 10 m για τις ακμές βάσεως και 5 m για το βάθος.
(β) Ελαχιστοποιώντας το επιφανειακό εμβαδόν της δεξαμενής ελαχιστοποιείται και το βάρος της για δεδομένο πάχος τοιχωμάτων. Το πάχος των ατσάλινων τοιχωμάτων θα καθορίζεται μάλλον από άλλου είδους παράγοντες, π.χ. δομικές απαιτήσεις, αντοχή, κ.ά.
11. 9 × 18 cm. 13. $\frac{\pi}{2}$
15. $h : r = 8 : \pi$
17. (α) $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$
(β) Πεδίο ορισμού: $(0, 9)$

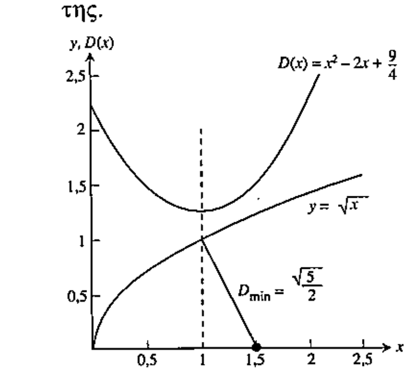


(γ) Μέγιστος όγκος ≈ 1309,95 cm^3 για $x \approx 3{,}39$ cm.
(δ) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, άρα το κρίσιμο σημείο προκύπτει για $x = 7 - \sqrt{13}$, πράγμα που επαληθεύει το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ).
(ε) $x = 2$ cm ή $x = 5$ cm
19. ≈ 2418,40 cm^3
21. (α) $h = 24$, $w = 18$
(β)



23. Αν r είναι η ακτίνα του ημισφαιρίου, h το ύψος του κυλίνδρου, και V ο όγκος, τότε $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ και $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.
25. (β) $x = \frac{51}{8}$ (γ) $L \approx 11$ cm
27. Ακτίνα $= \sqrt{2}$ m, ύψος = 1 m, όγκος $\frac{2\pi}{3}$ m^3

31. (α) $v(0) = 96$ m/sec (β) 256 ft για $t = 3$ sec
(γ) Η ταχύτητα για $s = 0$ είναι $v(7) = -128$ cm/sec
33. ≈ 46.87 ft 35. (α) $6 \times 6\sqrt{3}$ in.
37. (α) $10\pi \approx 31{,}42$ cm/sec· για $t = 0{,}5$ sec, 1,5 sec, 2,5 sec, 3,5 sec· $s = 0$, η επιτάχυνση είναι τότε 0
(β) 10 cm από τη θέση ηρεμίας· η ταχύτητα είναι τότε 0
39. (α) $s = ((12 - 12t)^2 + 64t^2)^{1/2}$
(β) −12 κόμβοι, 8 κόμβοι
(γ) Όχι
(ε) $4\sqrt{13}$. Το όριο αυτό είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των ταχυτήτων των δύο πλοίων.
41. $x = \frac{a}{2}$, $v = \frac{ka^2}{4}$
43. $\frac{c}{2} + 50$
45. (α) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ (β) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$
49. (α) Ο επιπλοποιός θα πρέπει να παραγγείλει px τεμάχια υλικού προκειμένου να του φτάσει μέχρι την επόμενη παράδοση.
(γ) Μέσο ημερήσιο κόστος $= \frac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{2}x$
$x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$ για $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ προκύπτει η μέση τιμή.
(δ) Η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται για $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$.
Για $x > 0$, $x_{\tau o \mu \acute{\eta}\varsigma} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$. Το μέσο ημερήσιο κόστος ελαχιστοποιείται όταν το μέσο ημερήσιο κόστος παράδοσης ισούται με το μέσο ημερήσιο κόστος αποθήκευσης.
51. $M = \frac{C}{2}$
57. (α) $y = -1$
59. (α) Η ελάχιστη απόσταση είναι $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
(β) Η ελάχιστη απόσταση είναι από το σημείο (3/2, 0) ώς το σημείο (1, 1) στο γράφημα της $y = \sqrt{x}$, και αυτό προκύπτει για $x = 1$, όπου η $D(x)$, δηλαδή η διανυθείσα απόσταση, παίρνει την ελάχιστη τιμή της.



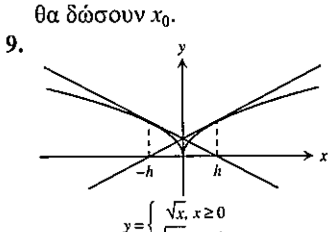
61. (α) $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$
(β) Για $a = 4$: $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$· για $a = 5$: $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$· για $a = 6$: $r = 2\sqrt{6}$, $h = 2\sqrt{3}$· για $a = 8$: $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
(γ) Εφόσον $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ και $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, η σχέση είναι $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

Ενότητα 3.6, σελ. 285-289

1. $L(x) = 10x - 13$
3. $L(x) = 2$
5. $L(x) = x - \pi$
7. $f(0) = 1$. Επίσης, $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, άρα $f'(0) = k$. Άρα η γραμμικοποίηση στο $x = 0$ είναι $L(x) = 1 + kx$.
9. Κέντρο $= -1$, $L(x) = -5$
11. Κέντρο $= 1$, $L(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$, ή κέντρο $= 1{,}5$, $L(x) = \frac{4x}{25} + \frac{9}{25}$
13. (α) 1,01 (β) 1,003
15. $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$ 17. $\frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}dx$
19. $\frac{1 - y}{3\sqrt{y} + x}dx$ 21. $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,dx$
23. $(4x^2)\sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$
25. (α) 0,21 (β) 0,2 (γ) 0,01
27. (α) $-\frac{2}{11}$ (β) $-\frac{1}{5}$ (γ) $\frac{1}{55}$
29. $4\pi a^2\,dr$
31. $3a^2\,dx$
33. (α) $0{,}08\pi$ m^2 (β) 2%
35. $dV \approx 565{,}5$ cm^3 37. $\frac{1}{3}$%
39. 0,05%
41. Ο λόγος ισούται με 37,51, και άρα μια μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας θα έχει 38 φορές μεγαλύτερη επίπτωση στη Σελήνη απ' ό,τι (η ίδια μεταβολή θα έχει) στη Γη.
47. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1 + \left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

Ενότητα 3.7, σελ. 295-296

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$
3. $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$
5. $x_2 = \frac{2387}{2000}$
7. Θα ισούται με x, και όλες οι ακόλουθες προσεγγίσεις θα δώσουν x_0.
9.



11. Τα σημεία τομής των $y = x^3$ και $y = 3x + 1$ ή των $y =$

$x^3 - 3x$ και $y = 1$ θα έχουν τα ίδια x με τις ρίζες του ερωτήματος (i) ή τις λύσεις του ερωτήματος (iv).

15. 1,165561185

17. (α) Δύο
(β) 0,35003501505249 και −1,0261731615301

19. ±1,3065629648764, ±0,5411961001462

21. $x \approx 0,45$

23. Η ρίζα είναι 1,17951.

25. (α) Για $x_0 = -2$ ή $x_0 = -0,8$, $x_i \to -1$ καθώς το i αυξάνεται.
(β) Για $x_0 = -0,5$ ή $x_0 = 0,25$, $x_i \to 0$ καθώς το i αυξάνεται.
(γ) Για $x_0 = 0,8$ ή $x_0 = 2$, $x_i \to 1$ καθώς το i αυξάνεται.
(δ) Για $x_0 = -\sqrt{21}/7$ ή $x_0 = \sqrt{21}/7$, η μέθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει. Οι τιμές του x_i παλινδρομούν μεταξύ $-\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{21}/7$ καθώς το i αυξάνεται.

27. Οι απαντήσεις σας θα ποικίλλουν αναλόγως της ταχύτητας υπολογισμών της συσκευής σας.

29. 2,45, 0,000245

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3, σελ. 297-301

1. Ολική ελάχιστη τιμή ίση με $\frac{1}{2}$ για $x = 2$

3. (α) $[-3, -2]$ και $[1, 2]$ (β) $[-2, 1]$
(γ) Τοπικά μέγιστα για $x = -2$ και $x = 2$· τοπικά ελάχιστα για $x = -3$ και $x = 1$

5. Όχι

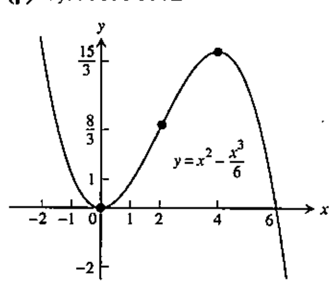
7. Δεν υπάρχει ελάχιστο. Ολικό μέγιστο: $f(1) = 16$, κρίσιμα σημεία: $x = 1$ και $\frac{11}{3}$

11. Όχι

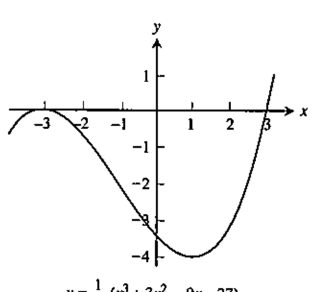
13. (β) Μία

15. (β) 0,8555996772

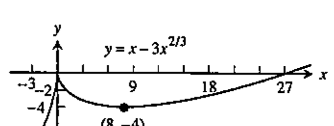
21.



23.

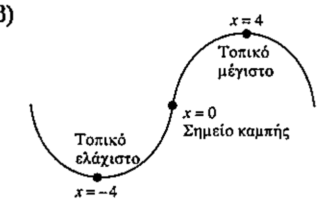


25.



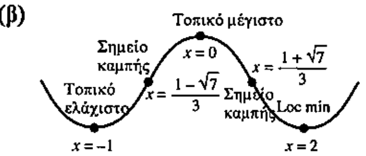
27. (α) Τοπικό μέγιστο για $x = 4$, τοπικό ελάχιστο για $x = -4$, σημείο καμπής για $x = 0$

(β)



29. (α) Τοπικό μέγιστο για $x = 0$, τοπικά ελάχιστα για $x = -1$ και $x = 2$, σημείο καμπής για $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

(β)



31. (α) $t = 0, 6, 12$ (β) $t = 3, 9$
(γ) $6 < t < 12$ (δ) $0 < t < 6$, $12 < t < 14$

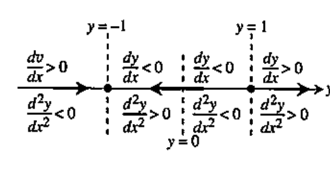
33. (α) $v(t) = -3t^2 - 6t + 4$ (β) $a(t) = -6t - 6$
(γ) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 3 κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, επιβραδυνόμενο. Τη στιγμή $t = 0,528$, περίπου, φτάνει στη θέση 4,128 και αλλάζει κατεύθυνση, κινούμενο πλέον προς την αρνητική κατεύθυνση. Μετά από αυτό, εξακολουθεί να επιταχύνει ενώ κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

35. $f(x) = -\frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

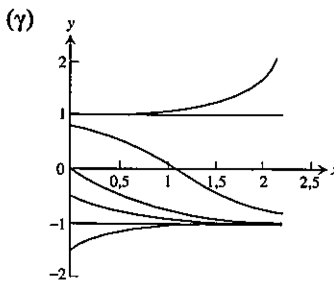
37. $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^3 + x + C$ για $x > 0$

39. $s(t) = 4,9t^2 + 5t + 10$

41. (α) Το $y = -1$ είναι ευσταθές και το $y = 1$ είναι ασταθές.
(β) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(γ)



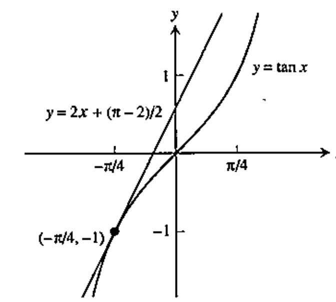
43. $r = 25$ m και $s = 50$ m

45. Ύψος = 2, ακτίνα = $\sqrt{2}$

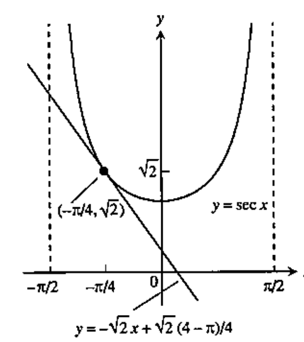
47. $x = 5 - \sqrt{5}$ εκατοντάδες ≈ 276 ελαστικά, $y = 2(5 - \sqrt{5})$ εκατοντάδες ≈ 553 ελαστικά

49. Διαστάσεις: βάση 6 cm επί 12 cm, ύψος = 2 cm· μέγιστος όγκος = 144 cm³

51. (α) $L(x) = 2x + \frac{\pi - 2}{2}$



(β) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{4}$



53. $L(x) = 1,5x + 0,5$

55. $dV = \frac{2}{3}\pi r_0 h\, dr$

57. (α) 4% (β) 8%
(γ) 12%

59. $x_5 = 2,195823345$

61. $x \approx -0,828361$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 3, σελ. 301-303

1. Αν M και m είναι οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές, αντίστοιχα, τότε $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in I$. Αν $m = M$ τότε η f είναι σταθερή στο I.

3. Τα ακρότατα δεν μπορούν να είναι τα άκρα ανοιχτού διαστήματος.

5. (α) Τοπικό ελάχιστο για $x = -1$, σημεία καμπής για $x = 0$ και $x = 2$
(β) Τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και τοπικά ελάχιστα για $x = -1$ και $x = 2$, σημεία καμπής για $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

9. Όχι. Το Πόρισμα 1 αξιώνει ότι $f'(x) = 0$ για *κάθε* x σε κάποιο διάστημα I, όχι $f'(x) = 0$ σε μοναδικό σημείο στο I.

11. $a = 1, b = 0, c = 1$

13. Ναι

15. Η τρύπα πρέπει να ανοιχτεί στο σημείο όπου $y = \frac{h}{2}$

17. $r = \frac{RH}{2(H - R)}$ για $H < 2R$, $r = R$ αν $H = 2R$

21. (α) 0,2482 m
(β) 0,00194 sec
(γ) Θα χάνει περίπου 2,79 min/ημέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ενότητα 4.1, σελ. 311-313

1. (α) $3x^2$ (β) $\frac{x^8}{8}$ (γ) $\frac{x^8}{8} - 3x^2 + 8x$

3. (α) $\frac{1}{x^2}$ (β) $-\frac{1}{4x^2}$ (γ) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2}$

5. (α) $x^{2/3}$ (β) $x^{1/3}$ (γ) $x^{-1/3}$

7. (α) $\tan x$ (β) $2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ (γ) $-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$

9. $\frac{x^2}{2} + x + C$

11. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

13. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

15. $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

17. $\frac{1}{7}y + \frac{4}{y^{1/4}} + C$

19. $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

21. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$

23. $\tan\theta + C$

25. $-\cos\theta + \theta + C$

31. (α) Λάθος: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + C\right) = \frac{2x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x$
(β) Λάθος: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\sin x$
(γ) Σωστό: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$

33. b

35. $y = x^2 - 7x + 10$

37. $y = 9x^{1/3} + 4$

39. $s = \sin t - \cos t$

41. $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

43. $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

45. $y = x^3 - 4x^2 + 5$

47. $s = 4,9t^2 + 5t + 10$

49. $s = 16t^2 + 20t + 5$

51. $y = 2x^{3/2} - 50$

53. $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

55. $y = -\sin x - \cos x - 2$

57. 48 m/sec

59. $t = 28/k$, $k = 4,9$

61. (α) $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ (β) $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

65. (α) (i) 33,2 μονάδες διαστήματος, (ii) 33,2 μονάδες διαστήματος, (iii) 33,2 μονάδες διαστήματος
(β) Αληθές

Ενότητα 4.2, σελ. 319-320

1. $-\frac{1}{4}\cos 2x^2 + C$

3. $-(7x - 2)^{-4} + C$

5. $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

7. $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2} - 2) + C$

9. (α) $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C$ (β) $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

11. $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$

13. $\frac{3}{2 - x} + C$

15. $-\frac{1}{3}(7 - 3y^2)^{3/2} + C$

17. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{x})^4 + C$

19. $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$

21. $\frac{1}{4}\tan^8\left(\frac{x}{2}\right) + C$

23. $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$

25. $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$