2

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε την κλίση καμπύλης σε ένα σημείο της ως το όριο των κλίσεων μιας ακολουθίας τεμνουσών. Το όριο αυτό, που καλείται παράγωγος και μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής μιας συναρτήσεως, είναι μια από τις σπουδαιότερες έννοιες του απειροστικού λογισμού. Οι παράγωγοι χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πληθώρα επιστημονικών πεδίων, όπως στις επιστήμες μηχανικού, στις θετικές επιστήμες, στα οικονομικά, στην ιατρική και στην επιστήμη των υπολογιστών, όπου βρίσκουν εφαρμογή (μεταξύ άλλων) σε υπολογισμούς ταχύτητας και επιτάχυνσης, στην κατανόηση της λειτουργίας μηχανών, στην εκτίμηση της πτώσης της στάθμης του νερού που αντλείται από μια δεξαμενή, καθώς και στην πρόβλεψη των συνεπειών από σφάλματα μέτρησης. Η εύρεση παραγώγων από υπολογισμό ορίων μπορεί να καταστεί επίπονη και χρονοβόρος διαδικασία. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε εναλλακτικές και πιο χρηστικές τεχνικές υπολογισμού των παραγώγων.

2.1 Η παράγωγος ως συνάρτηση

Ορισμός παραγώγου • Συμβολισμός • Παράγωγοι σταθεράς, δύναμης, πολλαπλασίου και αθροίσματος • Παραγωγισιμότητα σε διάστημα· πλευρικές παράγωγοι • Σχεδίαση της f' από πίνακα τιμών • Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι συνεχείς • Ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους • Παράγωγοι υψηλότερων τάξεων

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Παράγωγος

Προς το τέλος του Κεφαλαίου 1, ορίσαμε την κλίση καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $x = x_0$ ως

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ονομάσαμε το όριο αυτό, όταν υπήρχε, παράγωγο της f στο x_0. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την παράγωγο ως *συνάρτηση* που προκύπτει από την f θεωρώντας το παραπάνω όριο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f.

Ορισμός παραγώγου

CD-ROM
Δικτυότοπος

Ορισμός Παράγωγος συνάρτηση

Η **παράγωγος** της συναρτήσεως $f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Υπολογισμός της $f'(x)$ από τον ορισμό της παραγώγου

Βήμα 1. Εκφράζουμε τα $f(x)$ και $f(x+h)$.

Βήμα 2. Αναπτύσσουμε και απλοποιούμε το πηλίκο διαφορών
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Βήμα 3. Από το απλοποιημένο πηλίκο, βρίσκουμε την $f'(x)$ ως το όριο
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το παραπάνω όριο υπάρχει. Έτσι το πεδίο ορισμού της παραγώγου μπορεί να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της f ή να είναι μικρότερο. Αν υπάρχει η f' για κάποιο x, λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη** ή **παραγωγίσιμη (έχει παράγωγο) στο** x. Αν η f' υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f, λέμε απλώς ότι η f είναι **διαφορίσιμη** ή **παραγωγίσιμη**.

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή του ορισμού

(α) Να βρεθεί η παράγωγος της $y=\sqrt{x}$ για $x>0$.

(β) Να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης $y=\sqrt{x}$ για $x=4$.

Λύση

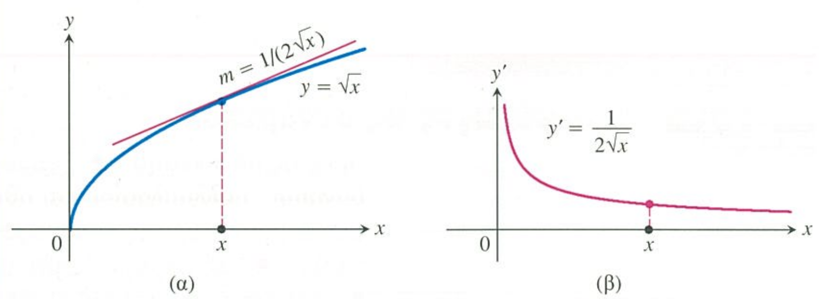
(α)

Βήμα 1: $f(x)=\sqrt{x}$ και $f(x+h)=\sqrt{x+h}$

Βήμα 2:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
Πολλαπλασιασμός με $(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})\,/\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$.
$$=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Βήμα 3: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

CD-ROM Δικτυότοπος

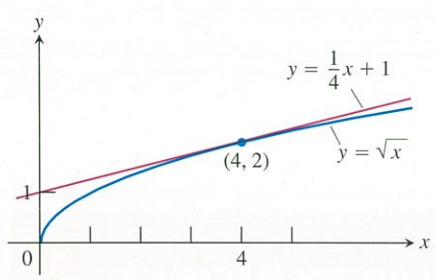


Σχημα 2.1 Γραφικές παραστάσεις των (α) $y=\sqrt{x}$ και (β) $y'=1/(2\sqrt{x})$, $x>0$. Στο $x=0$ η συνάρτηση ορίζεται, η παράγωγος όμως όχι. (Παράδειγμα 1)

Δείτε το Σχήμα 2.1.

(β) Η κλίση της καμπύλης για $x=4$ ισούται με
$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

Η εφαπτομένη είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, 2) με κλίση 1/4 (Σχήμα 2.2).
$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)$$
$$y=\frac{1}{4}x+1$$



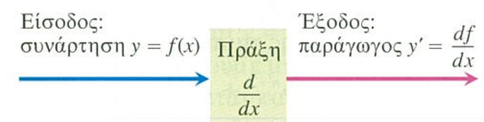
Σχημα 2.2 Η καμπύλη $y=\sqrt{x}$ και η εφαπτομένη της στο σημείο (4, 2). Η κλίση της εφαπτομένης δίδεται από την τιμή της y' για $x=4$. (Παράδειγμα 1)

Συμβολισμός

Υπάρχουν πολλοί τρόποι συμβολισμού της παραγώγου μιας συναρτήσεως $y=f(x)$. Πέραν του $f'(x)$, οι συνηθέστεροι εξ αυτών είναι:

Ο τονικός συμβολισμός οφείλεται στον Νεύτωνα, ενώ ο συμβολισμός d/dx στον Leibniz.

y'	«y τόνος»	Κομψός και σύντομος, αλλά δεν κατονομάζει την ανεξάρτητη μεταβλητή
$\dfrac{dy}{dx}$	«dy dx»	Κατονομάζει τις μεταβλητές και χρησιμοποιεί το σύμβολο d για την παράγωγο
$\dfrac{df}{dx}$	«df dx»	Δίνει έμφαση στο όνομα της συναρτήσεως
$\dfrac{d}{dx}f(x)$	«ddx της $f(x)$»	Δίνει έμφαση στο ότι η παραγώγιση είναι μια μαθηματική πράξη που εκτελείται επί της f (Σχήμα 2.3)



Σχημα 2.3 Διάγραμμα ροής που περιγράφει τη λειτουργία της παραγώγισης ως προς x.

Επίσης, ο συμβολισμός dy/dx διαβάζεται και ως «παράγωγος του y ως προς x», ενώ οι df/dx και $(d/dx)f(x)$ ως «παράγωγος της f ως προς x».
Η τιμή
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
της παραγώγου της $y=f(x)$ ως προς x για $x=a$ μπορεί, τέλος, να γραφεί ως
$$y'\big|_{x=a}\ \text{ή}\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}\ \text{ή}\ \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}.$$

Το σύμβολο $|_{x=a}$, που λέγεται **σύμβολο αποτίμησης,** μας λέει να αποτιμήσουμε (υπολογίσουμε) την έκφραση στα αριστερά του, για $x=a$.
Η διαδικασία υπολογισμού μιας παραγώγου λέγεται **διαφόριση** ή **παραγώγιση.** Στο Παράδειγμα 1 υπολογίσαμε την παράγωγο της $y=\sqrt{x}$ βάσει του ορισμού. Τώρα όμως θα δούμε τρόπους παραγωγίσεως που παρακάμπτουν τη ρητή επίκληση του ορισμού κάθε φορά.

Παράγωγος σταθεράς, δύναμης, πολλαπλασίου και αθροίσματος

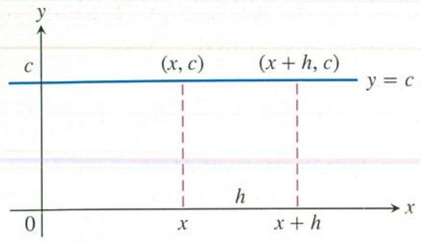
Ο πρώτος κανόνας λέει ότι η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι η μηδενική συνάρτηση.

Κανόνας 1 Παράγωγος σταθερής συνάρτησης
Αν η f έχει τη σταθερή τιμή $f(x)=c$, τότε
$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(c)=0.$$

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 1

Αν η f έχει τη σταθερή τιμή $f(x)=8$, τότε
$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(8)=0.$$
Ομοίως,
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\quad\text{και}\quad\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right)=0.$$

Απόδειξη του Κανόνα 1 Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου στη συνάρτηση σταθερής τιμής $f(x)=c$ (Σχήμα 2.4). Για κάθε x, βρίσκουμε ότι
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$



Σχημα 2.4 Ο κανόνας $(d/dx)(c) = 0$ μας λέει με άλλα λόγια ότι μια σταθερή συνάρτηση δεν μεταβάλλει τις τιμές της και ότι η κλίση μιας οριζόντιας ευθείας μηδενίζεται παντού.

Ο δεύτερος κανόνας μάς λέει πώς να παραγωγίσουμε το x^n για n θετικό ακέραιο.

Κανόνας 2 Παράγωγος θετικής ακέραιας δύναμης

Αν n θετικός ακέραιος, τότε

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Πρακτικά, ο Κανόνας 2 μας λέει να μειώσουμε τον αρχικό εκθέτη (n) κατά μία μονάδα και να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με n.

Παράδειγμα 3 Ερμηνεία του Κανόνα 2

f	x	x^2	x^3	x^4	...
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	...

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Richard Courant
(1888-1972)

Απόδειξη του Κανόνα 2 Αν $f(x) = x^n$, τότε $f(x + h) = (x + h)^n$. Εφόσον ο n είναι θετικός ακέραιος, κάνουμε χρήση της ταυτότητας

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

προκειμένου να απλοποιήσουμε το πηλίκο διαφορών της f. Θέτοντας $x + h = a$ και $x = b$, έχουμε $a - b = h$. Οπότε,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}\\ &= \underbrace{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}}_{n \text{ όροι, καθένας με όριο } x^{n-1} \text{ καθώς } h \to 0}.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

Ο τρίτος κανόνας λέει πως όταν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά, η παράγωγος του γινομένου ισούται με το γινόμενο της παραγώγου της συναρτήσεως επί τη σταθερά αυτή.

Κανόνας 3 Παράγωγος σταθερού πολλαπλασίου

Αν η u είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, και c είναι μια σταθερά, τότε

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

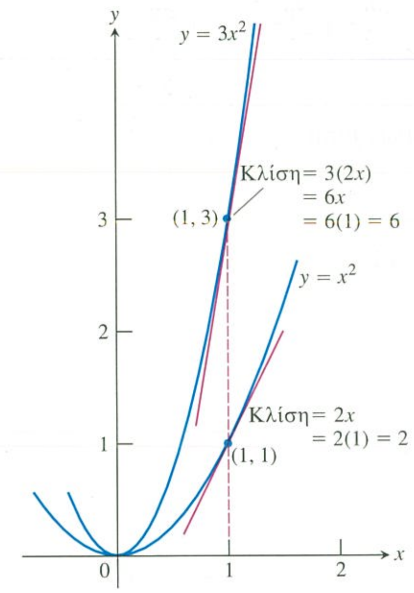
Παράδειγμα 4 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 3

(α) $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$

Ερμηνεία: Αν αλλάξουμε την κλίμακα του γραφήματος της $y = x^2$ πολλαπλασιάζοντας κάθε y με το 3, η κλίση σε κάθε σημείο της καμπύλης θα πολλαπλασιαστεί επίσης με το 3 (Σχήμα 2.5).

(β) *Μια χρήσιμη ειδική περίπτωση:* Η παράγωγος της αντιθέτου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ισούται με την αντίθετη της παραγώγου της συνάρτησης. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα 3 για $c = -1$, παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$



Σχημα 2.5 Γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = 3x^2$. Αν τριπλασιάσουμε μια συνάρτηση τριπλασιάζεται και η κλίση της. (Παράδειγμα 3)

Συμβολίζοντας με *u* και *v* τις συναρτήσεις στους κανόνες παραγώγισης

Συνηθίζεται να συμβολίζουμε τις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν στο εκάστοτε πρόβλημα με τα γράμματα f, g κ.λπ. Υπάρχει λοιπόν κίνδυνος σύγχυσης, εάν στους κανόνες παραγώγισης χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα. Γι' αυτό συμβολίζουμε με u και v τις συναρτήσεις στους κανόνες αυτούς, ελπίζοντας ότι τα συγκεκριμένα σύμβολα δεν θα εμφανίζονται πουθενά αλλού.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Colin Maclaurin
(1698-1746)

Απόδειξη του Κανόνα 3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} && \text{Ορισμός παραγώγου με } f(x) = cu(x)\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} && \text{Ιδιότητα ορίου}\\ &= c\frac{du}{dx} && \text{Η } u \text{ είναι παραγωγίσιμη.}\end{aligned}$$

Ο επόμενος κανόνας λέει ότι η παράγωγος του αθροίσματος δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων τους.

Κανόνας 4 Παράγωγος αθροίσματος

Αν u και v είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x, τότε το άθροισμα $u + v$ είναι παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο όπου αμφότερες οι u και v είναι παραγωγίσιμες. Στα σημεία αυτά,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Παράδειγμα 5 Παράγωγος αθροίσματος

$$\begin{aligned}y &= x^4 + 12x\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x)\\ &= 4x^3 + 12\end{aligned}$$

Απόδειξη του Κανόνα 4 Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου στην $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος και σταθερού πολλαπλασίου παίρνουμε τον **κανόνα παραγώγισης διαφοράς,** ο οποίος λέει ότι η παράγωγος της *διαφοράς* παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των παραγώγων τους.

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Ο κανόνας παραγώγισης αθροίσματος μπορεί βεβαίως να επεκταθεί και σε περισσότερες από δύο συναρτήσεις, αρκεί το άθροισμα να περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος όρων. Αν οι $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι παραγωγίσιμες στο x, τότε και η $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ είναι παραγωγίσιμη, και

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

Παράδειγμα 6 Παράγωγος πολυωνύμου

$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0$$

$$= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$$

Κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμο.

Σημειώστε ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να παραγωγιστεί, όρο προς όρο, όπως κάναμε στο Παράδειγμα 6.

Παράδειγμα 7 Εύρεση οριζόντιων εφαπτομένων

Έχει οριζόντιες εφαπτομένες η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$; Αν ναι, σε ποια σημεία της;

Λύση Οι οριζόντιες εφαπτομένες, αν υπάρχουν, προκύπτουν στα σημεία μηδενισμού της κλίσεως dy/dx, τα οποία και βρίσκουμε ακολουθώντας τα εξής βήματα.

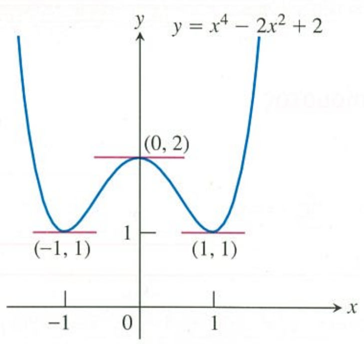
1. Υπολογίζουμε την κλίση dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

2. Λύνουμε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 0$ ως προς x:

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0, 1, -1.$$

Η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ έχει οριζόντιες εφαπτομένες για $x = 0$, 1 και -1. Τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης είναι τα (0, 2), (1, 1) και (−1, 1). Δείτε το Σχήμα 2.6.



ΣΧΗΜΑ 2.6 Η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ και οι οριζόντιες εφαπτομένες της. (Παράδειγμα 7)

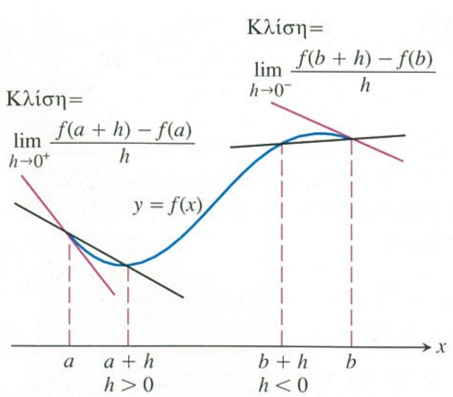
Παραγωγισιμότητα σε διάστημα· πλευρικές παράγωγοι

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα ανοιχτό διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο) αν υπάρχει η παράγωγός της σε κάθε σημείο του διαστήματος. Είναι δε παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ αν είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) και αν τα πλευρικά όρια στα άκρα του διαστήματος

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textbf{Δεξιά παράγωγος στο } a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad \textbf{Αριστερή παράγωγος στο } b$$

υπάρχουν (Σχήμα 2.7).



ΣΧΗΜΑ 2.7 Οι παράγωγοι σε άκρα διαστήματος είναι πλευρικά όρια.

Μπορούμε να ορίσουμε δεξιές και αριστερές παραγώγους σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως. Η συνήθης σχέση μεταξύ πλευρικών και αμφίπλευρων ορίων ισχύει και για τις παραγώγους αυτές. Βάσει του Θεωρήματος 5 της Ενότητας 1.2, μια συνάρτηση θα έχει παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο εν λόγω σημείο και είναι ίσες μεταξύ τους.

CD-ROM Δικτυότοπος

Παράδειγμα 8 Η συνάρτηση $y = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στην αρχή των αξόνων

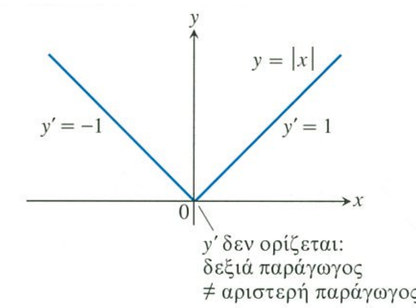
Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$, αλλά δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = 0$.

Λύση Στα δεξιά της αρχής,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1\cdot x) = 1. \qquad \frac{d}{dx}(mx+b) = m,\ |x| = x$$

Στα αριστερά της αρχής,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1\cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$



ΣΧΗΜΑ 2.8 Η συνάρτηση $y = |x|$ δεν παραγωγίζεται στην αρχή των αξόνων όπου το γράφημά της έχει γωνιώδη συμπεριφορά.

(Σχήμα 2.8). Δεν υπάρχει λοιπόν παράγωγος στην αρχή των αξόνων εφόσον οι εκεί πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες:

$$\text{Δεξιά παράγωγος του } |x| \text{ στο μηδέν} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ όταν } h > 0.$$
$$= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\text{Αριστερή παράγωγος του } |x| \text{ στο μηδέν} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ όταν } h < 0.$$
$$= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

Εν γένει, στα σημεία όπου η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f έχει γωνιώδη χαρακτήρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης, και η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Κατά συνέπεια, η παραγωγισιμότητα αποτελεί κριτήριο (ένδειξη) «ομαλότητας (λειότητας)» της γραφικής παραστάσεως.

Σχεδίαση της f' από πίνακα τιμών

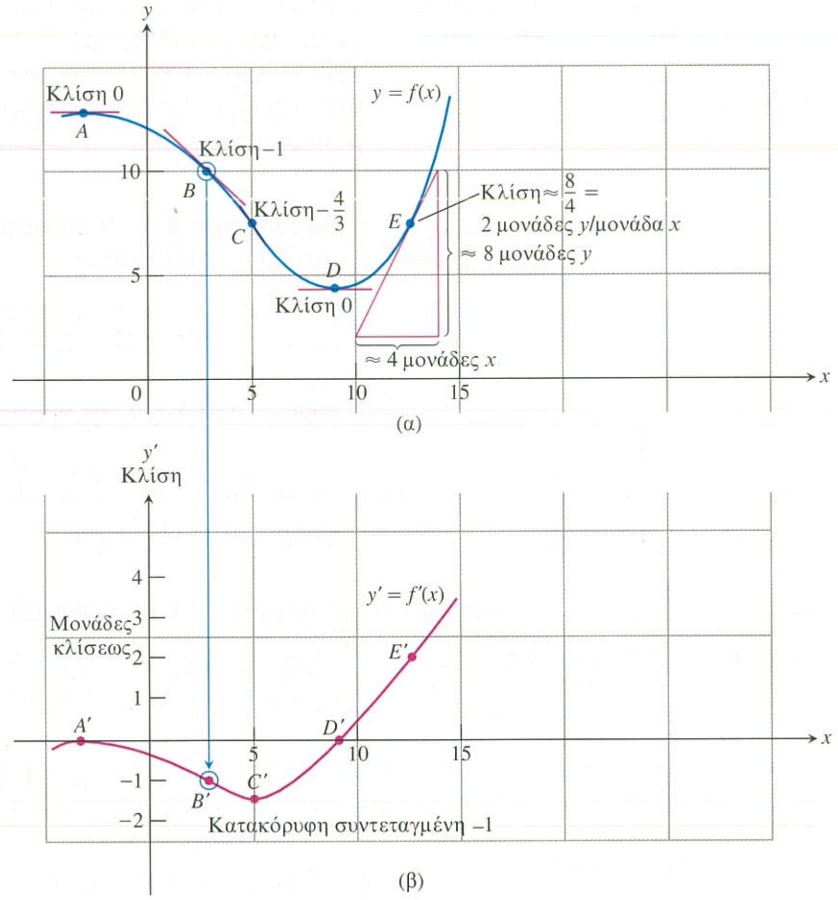
Όταν τοποθετούμε σε διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στις πειραματικές μετρήσεις των τιμών μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ (π.χ. πίεση έναντι θερμοκρασίας, πληθυσμός έναντι χρόνου, κ.λπ.), συνηθίζεται να συνδέουμε καταλλήλως τα σημεία (με ευθείες ή καμπύλες γραμμές) προκειμένου να πάρουμε το πλήρες γράφημα της f. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει πώς γίνεται αυτή η διαδικασία και τι μπορεί να μας διδάξει.

CD-ROM Δικτυότοπος

Παράδειγμα 9 Σχεδίαση παραγώγου

Να παρασταθεί γραφικά η παράγωγος της συναρτήσεως $y = f(x)$ που φαίνεται στο Σχήμα 2.9α.

Λύση Σχεδιάζουμε πρώτα τους άξονες, βαθμονομώντας τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα σε μονάδες x και y' αντίστοιχα (Σχή-



Σχημα 2.9 Για να σχεδιάσουμε το γράφημα της $y' = f'(x)$ στο (β) υπολογίσαμε τις κλίσεις της καμπύλης $y = f(x)$ στο (α). Η κατακόρυφη συντεταγμένη του σημείου B' είναι η κλίση στο B κ.ο.κ. Το γράφημα της $y' = f'(x)$ μας πληροφορεί για το πώς μεταβάλλεται η κλίση της f συναρτήσει του x.

μα 2.9β). Κατόπιν φέρνουμε τις εφαπτομένες στο γράφημα της f ανά τακτά διαστήματα, και από τις κλίσεις τους υπολογίζουμε κατά προσέγγιση τις τιμές της $y' = f'(x)$ στα σημεία επαφής. Τοποθετούμε σε νέο σχήμα τα σημεία με συντεταγμένες (x, y') και τα ενώνουμε με μια ομαλή (λεία) καμπύλη.

Από τη γραφική παράσταση της $y' = f'(x)$ διακρίνουμε αμέσως:

1. τα σημεία όπου ο ρυθμός μεταβολής της f είναι θετικός, αρνητικός, ή μηδέν
2. το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της f για κάθε x και μάλιστα σε σύγκριση με το μέγεθος της $f(x)$
3. τα σημεία όπου ο ίδιος ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται ή μειώνεται.

Στις Ασκήσεις 15-20 μπορείτε να «πειραματιστείτε» περαιτέρω με τις έννοιες αυτές.

Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι συνεχείς

Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο όπου υπάρχει η παράγωγός της.

ΠΡΟΣΟΧΗ Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1 είναι ψευδές. Μια συνάρτηση δεν οφείλει να έχει παράγωγο σε σημείο όπου είναι συνεχής, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 8.

Θεώρημα 1 **Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται και συνέχεια**
Αν η f έχει παράγωγο στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = c$.

Απόδειξη Δεδομένου ότι υπάρχει η $f'(c)$, πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ή, ισοδύναμα, ότι $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Εάν $h \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot h . \end{aligned}$$

Τώρα παίρνουμε το όριο καθώς $h \to 0$. Βάσει του Θεωρήματος 1 της Ενότητας 1.2,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c) . \end{aligned}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι αν η f έχει πλευρική παράγωγο (από δεξιά ή από αριστερά) στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής από την αντίστοιχη πλευρά στο $x = c$.

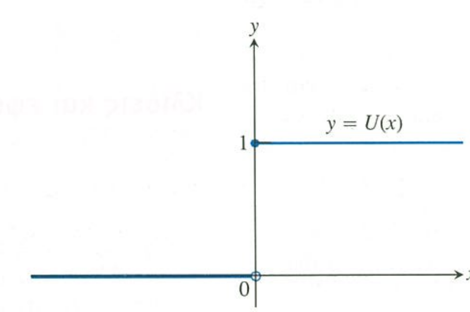
Από το Θεώρημα 1 προκύπτει άλλος ένας λόγος για τον οποίο μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει παράγωγο. Αν η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια σε ένα της σημείο (π.χ. ασυνέχεια άλματος), τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Η συνάρτηση ακέραιας τιμής $y = \text{int}\, x$ δεν έχει παράγωγο για κάθε $x = n$ (Παρ. 4, Ενότητα 1.4).

Ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι δεν μπορεί κάθε συνάρτηση να είναι η παράγωγος κάποιας άλλης.

Θεώρημα 2 **Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους**
Αν a και b είναι δύο τυχαία σημεία σε διάστημα όπου η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$.

Το Θεώρημα 2 (που παραθέσαμε εδώ χωρίς απόδειξη) λέει ότι μια τυχούσα συνάρτηση *δεν* μπορεί να είναι παράγωγος μιας άλλης σε κάποιο διάστημα παρά μόνο αν παρουσιάζει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα αυτό (Σχήμα 2.10). Το πότε μια συνάρτηση *είναι* παράγωγος αποτελεί για τον απειροστικό λογισμό ένα θεμελιώδες ερώτημα, και οι απαντήσεις που έδωσαν σε αυτό οι Νεύτων και Leibniz άλλαξαν για πάντα τον κόσμο των μαθηματικών. Στο Κεφάλαιο 4 θα αναλύσουμε το θέμα περισσότερο.



Σχημα 2.10 Η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας δεν έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και συνεπώς δεν μπορεί να αποτελεί την παράγωγο καμιάς συναρτήσεως πραγματικών αριθμών.

Σημειώστε ότι ο συμβολισμός

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

δεν υπονοεί πολλαπλασιασμό. Συμβολίζει μονάχα «την παράγωγο της παραγώγου».

Παράγωγοι υψηλότερων τάξεων

Η παράγωγος $y' = dy/dx$ είναι η **πρώτη (πρώτης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x. Η ίδια η παράγωγος ενδέχεται να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x· αν ναι, τότε η παράγωγός της

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

καλείται η **δεύτερη (δεύτερης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x.

Αν η y'' είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγός της, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ είναι η **τρίτη (τρίτης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x. Ομοίως, η

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)}$$

είναι η ***n*-οστή (*n*-οστής τάξης) παράγωγος** της y ως προς x, όπου n θετικός ακέραιος.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη δεύτερη παράγωγο ως τον ρυθμό μεταβολής της κλίσεως της εφαπτομένης στην καμπύλη $y = f(x)$ σε κάθε της σημείο. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η δεύτερη παράγωγος μας πληροφορεί για το αν η καμπύλη κάμπτεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε σχέση με την εφαπτομένη, καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο επαφής. Στην επόμενη ενότητα, θα ερμηνεύσουμε τόσο τη δεύτερη όσο και την τρίτη παράγωγο σε σχέση με την ευθύγραμμη κίνηση.

Πώς διαβάζονται τα σύμβολα των παραγώγων

y'	«y τόνος»
y''	«y δίστονον»
$\frac{d^2y}{dx^2}$	«d τετράγωνο y διά dx τετράγωνο»
y'''	«y τρίστονον»
$y^{(n)}$	«νιοστή παράγωγος του y»
$\frac{d^ny}{dx^n}$	«d εις την n του y διά dx εις την n»

Παράδειγμα 10 Εύρεση n-οστών παραγώγων

Οι πρώτες τέσσερις παράγωγοι της $y = x^3 - 3x^2 + 2$ είναι:

Πρώτη παράγωγος:	$y' = 3x^2 - 6x$
Δεύτερη παράγωγος:	$y'' = 6x - 6$
Τρίτη παράγωγος:	$y''' = 6$
Τέταρτη παράγωγος:	$y^{(4)} = 0.$

Η συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξης. Οι παράγωγοι πέμπτης τάξης και εφεξής είναι όλες μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1

CD-ROM Δικτυότοπος

Εύρεση παραγώγων και υπολογισμός των τιμών τους

Στις Ασκήσεις 1-6, χρησιμοποιήστε τον ορισμό προκειμένου να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως. Κατόπιν υπολογίστε την τιμή της παραγώγου στα αναφερόμενα σημεία.

1. $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3)$, $f'(0)$
2. $g(t) = 1/t^2$, $g'(-1)$, $g'(2)$
3. $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$, αν $s = t^3 - t^2$
4. $f(x) = x + \frac{9}{x}$, $x = -3$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$, $\theta = 0{,}25$
6. $\left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$, αν $r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

Υπολογισμός παραγώγων

Στις Ασκήσεις 7-10, να βρεθούν οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι.

7. $y = x^2 + x + 8$
8. $s = 5t^3 - 3t^5$
9. $y = \frac{4x^3}{3} - 4$
10. $y = \frac{x^3 + 7}{x}$

Να βρεθούν οι παράγωγοι όλων των τάξεων στις Ασκήσεις 11 και 12.

11. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$
12. $y = \frac{x^5}{120}$

Κλίσεις και εφαπτομένες

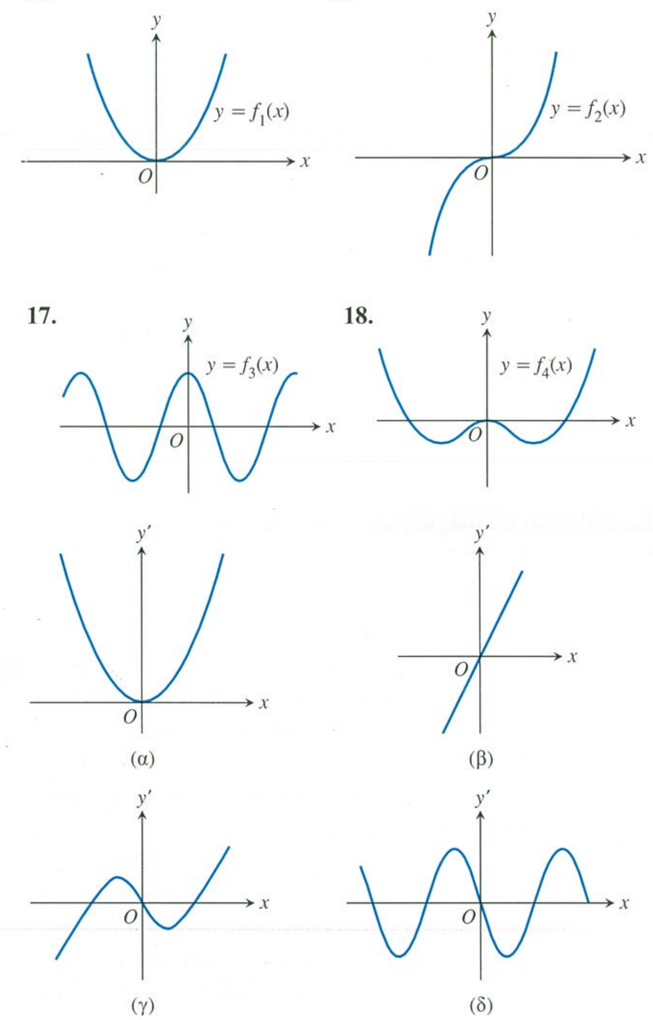
13. (α) Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^3 - 4x + 1$ στο σημείο $(2, 1)$.
(β) Τι εύρος τιμών παρουσιάζει η κλίση της καμπύλης;
(γ) Βρείτε εξισώσεις για τις εφαπτομένες της καμπύλης στα σημεία όπου η κλίση ισούται με 8.

14. (α) Βρείτε μια εξίσωση για την οριζόντια εφαπτομένη της καμπύλης $y = x - 3\sqrt{x}$.
(β) Τι εύρος τιμών παρουσιάζει η κλίση της καμπύλης;

Γραφικές παραστάσεις

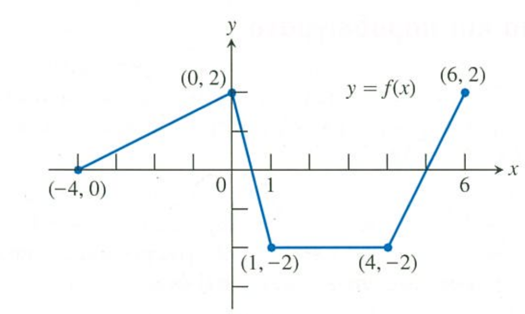
Αντιστοιχίστε τα γραφήματα των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 15-18 με τα γραφήματα των παραγώγων τους στο Σχήμα 2.11.

15. 16. 17. 18.



ΣΧΗΜΑ 2.11 Οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων για τις Ασκήσεις 15-18.

19. *Μάθετε γράφοντας*
(α) Η γραφική παράσταση του Σχήματος 2.12 αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους.

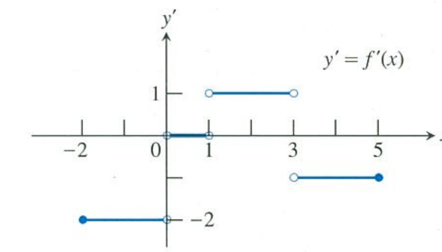


ΣΧΗΜΑ 2.12 Γραφική παράσταση για την Άσκηση 19.

Σε ποια σημεία του διαστήματος $[-4, 6]$ δεν ορίζεται η f'; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(β) Παραστήστε γραφικά την f'. Τον κατακόρυφο άξονα ονομάστε τον άξονα y'. Το γράφημά σας θα πρέπει να είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση.

Εύρεση συναρτήσεως μέσω της παραγώγου της

20. (α) Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες πληροφορίες, σχεδιάστε τη συνάρτηση f επί του κλειστού διαστήματος $[-2, 5]$.
   i. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους.
   ii. Η γραφική παράσταση αρχίζει από το σημείο $(-2, 3)$.
   iii. Παράγωγος της f είναι η κλιμακωτή συνάρτηση του Σχήματος 2.13.
(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για την περίπτωση στην οποία το γράφημα αρχίζει από το σημείο $(-2, 0)$ αντί του $(-2, 3)$.

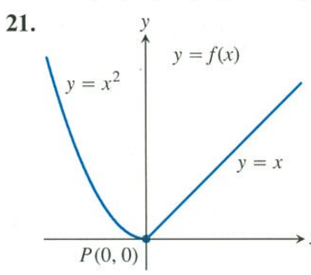


ΣΧΗΜΑ 2.13 Γραφική παράσταση της παραγώγου για την Άσκηση 20.

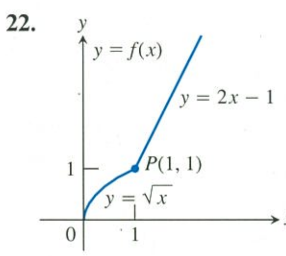
Πλευρικές παράγωγοι

Συγκρίνετε τις αριστερές και δεξιές παραγώγους, δείχνοντας έτσι ότι οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 21 και 22 δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο P.

21.



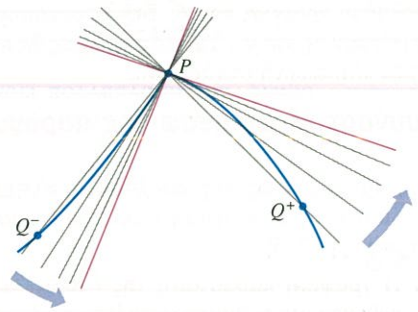
22.



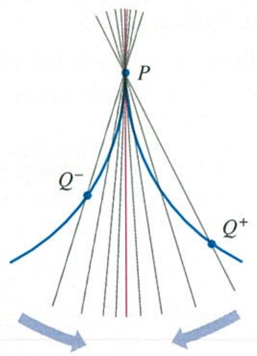
Πότε μια συνάρτηση δεν έχει παράγωγο σε ένα σημείο;

Μια συνάρτηση έχει παράγωγο σε σημείο x_0 αν οι κλίσεις των τεμνουσών ευθειών που διέρχονται από το $P(x_0, f(x_0))$ και από ένα γειτονικό σημείο Q του γραφήματος τείνουν σε κάποιο όριο καθώς το Q πλησιάζει στο P. Όταν οι κλίσεις δεν παίρνουν μία μοναδική οριακή θέση ή γίνονται κατακόρυφες καθώς το Q πλησιάζει στο P, η παράγωγος δεν υπάρχει. Μια συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι κατά τα άλλα λείο, δεν θα έχει παράγωγο σε σημείο όπου το γράφημα παρουσιάζει ένα από τα παρακάτω:

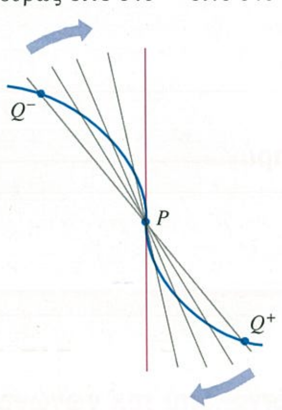
(i) ένα *γωνιακό σημείο*, όπου οι πλευρικές παράγωγοι διαφέρουν μεταξύ τους



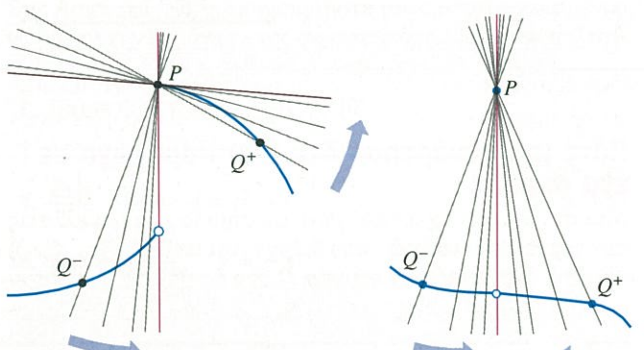
(ii) ένα *σημείο ανάκαμψης*, όπου η κλίση της τέμνουσας PQ τείνει στο ∞ από τη μία πλευρά και στο $-\infty$ από την άλλη



(iii) μια *κατακόρυφη εφαπτομένη*, όπου η κλίση του PQ τείνει αμφιπλεύρως είτε στο ∞ είτε στο $-\infty$ (εδώ, $-\infty$)



(iv) μια *ασυνέχεια*.



Κάθε σχήμα στις Ασκήσεις 23–26 δείχνει τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως σε ένα κλειστό διάστημα D. Σε ποια σημεία του πεδίου ορισμού της πιστεύετε ότι η συνάρτηση είναι

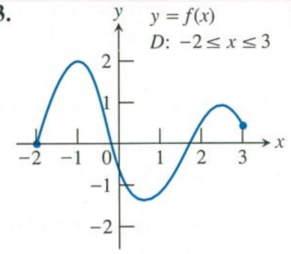
(α) παραγωγίσιμη;

(β) συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη;

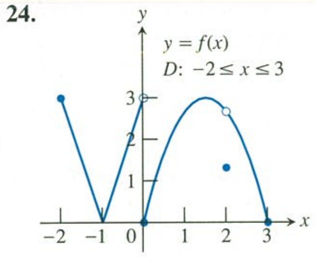
(γ) ούτε συνεχής ούτε παραγωγίσιμη;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

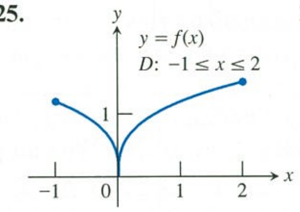
23.



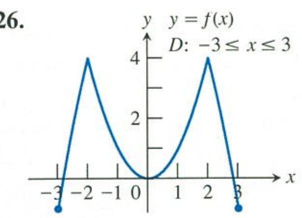
24.



25.



26.



Ερμηνεία παραγώγων

Στις Ασκήσεις 27-30,

(α) Βρείτε την παράγωγο $y' = f'(x)$ της συναρτήσεως $y = f(x)$ που δίδεται.

(β) Σχεδιάστε τις $y = f(x)$ και $y' = f'(x)$ τη μία δίπλα στην άλλη, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς άξονες συντεταγμένων και απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις.

(γ) Για ποιες τιμές του x, αν υπάρχουν, είναι η y' θετική, μηδέν, ή αρνητική;

(δ) Σε ποια διαστήματα τιμών του x, αν υπάρχουν, είναι η $y = f(x)$ αύξουσα, και σε ποια φθίνουσα; Πώς σχετίζεται η απάντησή σας στο παρόν ερώτημα με την απάντησή σας στο ερώτημα (γ); (Περισσότερα για τη σχέση αυτή, στο Κεφάλαιο 3.)

27. $y = -x^2$ **28.** $y = -1/x$

29. $y = x^3/3$ **30.** $y = x^4/4$

31. *Μάθετε γράφοντας* Έχει ποτέ αρνητική κλίση η καμπύλη $y = x^3$; Αν ναι, πού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

32. *Μάθετε γράφοντας* Έχει οριζόντιες εφαπτομένες η καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$; Αν ναι, πού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θεωρία και παραδείγματα

33. *Εφαπτομένη παραβολής* Έχει εφαπτομένη με κλίση -1 η παραβολή $y = 2x^2 - 13x + 5$; Αν ναι, βρείτε το σημείο επαφής και γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη. Αν όχι, γιατί όχι;

34. *Εφαπτομένη της $y = \sqrt{x}$* Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ που να τέμνει τον άξονα x στο $x = -1$; Αν ναι, βρείτε το σημείο επαφής και γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη. Αν όχι, γιατί όχι;

35. *Ακέραια τιμή του x* Υπάρχει συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \infty)$ της οποίας παράγωγος να είναι η $y = \text{int}\,x$, η ακέραια τιμή του x (δείτε το Σχήμα 1.49); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

36. *Παράγωγος της $y = |x|$* Σχεδιάστε την παράγωγο της $f(x) = |x|$. Κατόπιν σχεδιάστε την $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. Τι συμπεραίνετε;

37. *Παράγωγος της $-f$* Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = x_0$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διαφορισιμότητα της $-f$ στο $x = x_0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

38. *Παράγωγος πολλαπλασίων* Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $g(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 7$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διαφορισιμότητα της $3g$ στο $t = 7$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

39. *Όριο πηλίκου* Έστω ότι οι συναρτήσεις $g(t)$ και $h(t)$ είναι ορισμένες για κάθε t και ότι $g(0) = h(0) = 0$. Μπορεί να υπάρχει το $\lim_{t\to 0} (g(t))/(h(t))$; Αν ναι, οφείλει να ισούται με το μηδέν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

40. **(α)** Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $|f(x)| \le x^2$ για $-1 \le x \le 1$. Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

T 41. *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε (με υπολογιστή) την $y = 1/(2\sqrt{x})$ για $0 \le x \le 2$. Κατόπιν, στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

για $h = 1, 0{,}5, 0{,}1$, καθώς και για $h = -1, -0{,}5, -0{,}1$. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

T 42. *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε (με υπολογιστή) την $y = 3x^2$ στην περιοχή $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$. Κατόπιν, στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε την

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

για $h = 2, 1, 0{,}2$, καθώς και για $h = -2, -1, -0{,}2$. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

T 43. *Η πουθενά διαφορίσιμη συνεχής συνάρτηση του Weierstrass* Το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της συνάρτησης του Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ ισούται με

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x)$$
$$+ (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Παραστήστε γραφικά το άθροισμα αυτό. Μεγεθύνετε το γράφημα μερικές φορές. Πόσο κυματοειδής και ανώμαλη είναι η καμπύλη που βλέπετε; Καθορίστε τις διαστάσεις μιας περιοχής στην οποία η καμπύλη φαίνεται λεία.

T 44. *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε με υπολογιστή τις συναρτήσεις $f(x) = 1 + \ln(x + 1)$ και $g(x) = |x| + 1$ σε κοινό σχήμα. Μεγεθύνετε το γράφημα για να μπορέσετε να αναλύσετε τη συμπεριφορά των καμπυλών κοντά στο σημείο $(0, 1)$. Τι παρατηρείτε; Ποια από τις δύο συναρτήσεις πιστεύετε ότι είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 45-50, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα εξής:

(α) Παραστήστε γραφικά την $y = f(x)$ για να δείτε τη συνολική συμπεριφορά της συναρτήσεως.

(β) Ορίστε το πηλίκο διαφορών q για ένα γενικό σημείο x, με γενικό βήμα h.

(γ) Πάρετε το όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \to 0$. Ποιος τύπος προκύπτει;

(δ) Αντικαταστήστε $x = x_0$ και σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = f(x)$ μαζί με την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό.

(ε) Αντικαταστήστε στον ανωτέρω τύπο (γ) διάφορες τιμές για το x, μικρότερες ή και μεγαλύτερες του x_0. Συμφωνούν τα αριθμητικά σας αποτελέσματα με τη γραφική παράσταση;

(στ) *Μάθετε γράφοντας* Παραστήστε γραφικά τον τύπο που εξαγάγατε στο (γ). Τι νόημα έχει αν οι τιμές του είναι αρνητικές, μηδέν, ή θετικές; Συμφωνεί αυτή η γραφική παράσταση με εκείνην που πήρατε στο (α); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

45. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

46. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$ **48.** $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2+1}, x_0 = -1$

49. $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \pi/2$ **50.** $f(x) = x^2 \cos x, x_0 = \pi/4$

2.2 Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής • Ευθύγραμμη κίνηση: Μετατόπιση, ταχύτητα, μέτρο ταχύτητας, επιτάχυνση και παράγωγος επιτάχυνσης • Ευαισθησία σε μεταβολές • Εφαρμογές των παραγώγων στα οικονομικά

Στην Ενότητα 1.1 εξετάσαμε για πρώτη φορά τον μέσο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Θα συνεχίσουμε με εφαρμογές όπου οι παράγωγοι χρησιμεύουν ως μοντέλα ρυθμών μεταβολής που συμβαίνουν γύρω μας, στον πραγματικό κόσμο. Θα επανέλθουμε λοιπόν στην ευθύγραμμη κίνηση, εξετάζοντας και άλλες εφαρμογές στην πορεία.

Αν και είναι φυσικό να σκεφτόμαστε τη μεταβολή ως μεταβολή στον χρόνο, υπάρχουν και άλλες μεταβλητές συναρτήσει των οποίων μπορεί να συμβαίνει μια μεταβολή. Για παράδειγμα, ένας γιατρός μπορεί να ενδιαφέρεται να μάθει πώς η μεταβολή στη χορηγούμενη δόση μιας φαρμακευτικής ουσίας επηρεάζει τη συμπεριφορά του οργανισμού του ασθενούς. Ένας οικονομολόγος μπορεί να μελετά πώς μεταβάλλεται το κόστος παραγωγής χάλυβα συναρτήσει της παραχθείσας ποσότητας.

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής

Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών $(f(x+h)-f(x))/h$ ως τον μέσο ρυθμό μεταβολής της f στο διάστημα από x έως $x+h$, τότε το όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \to 0$ θα είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η f στο σημείο x.

Οι στιγμιαίοι ρυθμοί δεν είναι παρά όρια των μέσων ρυθμών μεταβολής.

Ορισμός Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

Ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** της f ως προς x στο x_0 είναι η παράγωγος

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Συνηθίζεται να αποκαλούμε τον ρυθμό αυτόν *στιγμιαίο* ακόμη και όταν το x δεν αναπαριστά χρόνο. Όμως συχνά ο επιθετικός προσδιορισμός παραλείπεται ολότελα. Έτσι όταν λέμε *ρυθμός μεταβολής*, εννοούμε *στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής*.

Παράδειγμα 1 Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν κύκλου συναρτήσει της διαμέτρου του

Το εμβαδόν A ενός κύκλου συνδέεται με τη διάμετρό του με τη σχέση

$$A = \frac{\pi}{4}D^2.$$

Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το εμβαδόν συναρτήσει της διαμέτρου, όταν η διάμετρος είναι 10 m;

Λύση Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ως προς τη διάμετρο είναι

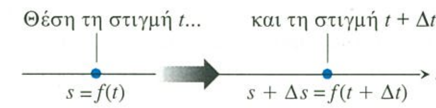
$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4}\cdot 2D = \frac{\pi D}{2}.$$

Όταν $D = 10$ m, το εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό $(\pi/2)10 = 5\pi$ m^2/m.

Ευθύγραμμη κίνηση: Μετατόπιση, ταχύτητα, μέτρο ταχύτητας, επιτάχυνση και παράγωγος επιτάχυνσης

Έστω ότι ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα κατά τρόπο ώστε να γνωρίζουμε τη θέση του, s, συναρτήσει του χρόνου, t:

$$s = f(t).$$



Σχήμα 2.14 Οι θέσεις σώματος που κινείται επί της ευθείας, κατά τις χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$.

Η **μετατόπιση** του σώματος κατά το χρονικό διάστημα από t έως $t+\Delta t$ (Σχήμα 2.14) είναι

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t),$$

ενώ η **μέση ταχύτητα** του σώματος στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$v_{av} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος κίνησης}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Για την εύρεση της ταχύτητας ακριβώς τη χρονική στιγμή t, παίρνουμε το όριο της μέσης ταχύτητας στο χρονικό διάστημα από t έως $t+\Delta t$ καθώς το Δt συρρικνώνεται τείνοντας στο μηδέν. Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της f ως προς t.

CD-ROM Δικτυότοπος

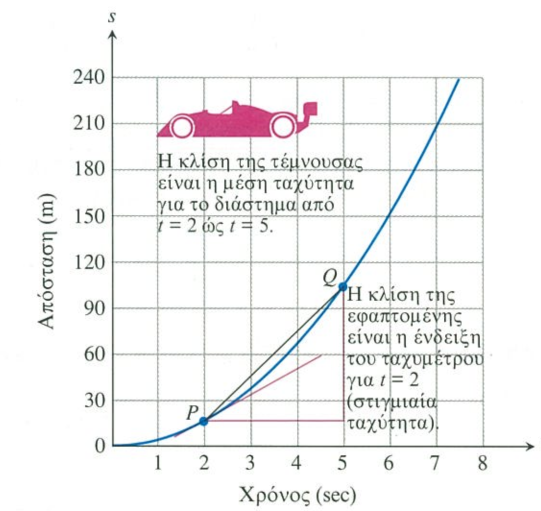
Ορισμός (Στιγμιαία) ταχύτητα

Ταχύτητα (στιγμιαία ταχύτητα) είναι η παράγωγος της θέσεως ως προς τον χρόνο. Αν η θέση ενός σώματος τη στιγμή t είναι $s = f(t)$, τότε η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t θα είναι

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Παράδειγμα 2 Εύρεση ταχύτητας αγωνιστικού αυτοκινήτου

Το Σχήμα 2.15 δείχνει τη γραφική παράσταση απόστασης-χρόνου ενός αγωνιστικού μοντέλου Riley & Scott Mk III-Olds WSC του 1996. Η κλίση της τέμνουσας PQ είναι η μέση ταχύτητα για το χρονικό διάστημα των 3 sec από $t = 2$ έως $t = 5$ sec, η οποία εδώ είναι ίση με περίπου 30 m/sec δηλαδή 108 km/h. Η κλίση της εφαπτομένης στο P δεν είναι παρά η ένδειξη του ταχυμέτρου τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec, περίπου 18 m/sec, δηλαδή 65 km/h. Η επιτάχυνση είναι σχεδόν σταθερή για τη χρονική διάρκεια που φαίνεται στο σχήμα, και ίση με 8,7 m/sec^2 για κάθε δευτερόλεπτο που περνά, ήτοι περίπου $0{,}89g$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η μέγιστη ταχύτητα του



Σχήμα 2.15 Γραφική παράσταση απόστασης συναρτήσει του χρόνου για το Παράδειγμα 2.

αγωνιστικού αυτοκινήτου προσεγγίζει τα 300 km/h. (*Πηγή: Road and Track*, March 1997.)

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Galileo Galilei
(1564 -1642)

Η ταχύτητα ενός σώματος μας πληροφορεί όχι μόνο για το πόσο γρήγορα αλλά και προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα. Όταν η κίνηση είναι προς τα εμπρός (αυξανόμενο s) η ταχύτητα είναι θετική· όταν η κίνηση είναι προς τα πίσω (μειωνόμενο s) είναι αρνητική.

Αν πηγαίνοντας να επισκεφθούμε κάποιον φίλο μας, αλλά και κατά την επιστροφή, κινούμαστε πάντα με ταχύτητα π.χ. 50 km/h, το ταχύμετρο θα δείχνει 50 ενόσω πηγαίνουμε αλλά δεν θα δείχνει −50 κατά την επιστροφή, παρ' ότι η απόσταση από το σπίτι μας μειώνεται τότε. Το ταχύμετρο μετρά πάντα το μέτρο της ταχύτητας ("speed" στα αγγλικά), δηλαδή την απόλυτη τιμή της ταχύτητας. Το μέτρο της ταχύτητας είναι μια έννοια που μας πληροφορεί για τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως.

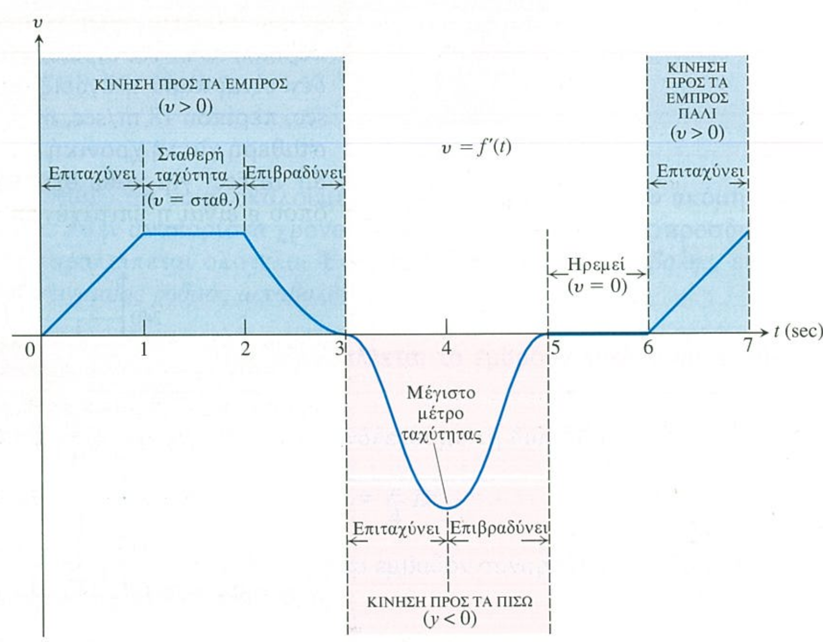
Ορισμός Μέτρο ταχύτητας

Μέτρο ταχύτητας είναι η απόλυτη τιμή της ταχύτητας.

$$\text{Μέτρο ταχύτητας} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Παράδειγμα 3 Οριζόντια κίνηση

Το Σχήμα 2.16 δείχνει την ταχύτητα $v = f'(t)$ σωματιδίου κινούμενου επί ενός άξονα συντεταγμένων. Το σωματίδιο κινείται προς τα εμπρός για τα πρώτα 3 sec, προς τα πίσω για τα επόμενα 2 sec, έπειτα μένει ακίνητο για ένα δευτερόλεπτο, και τέλος κινείται πάλι προς τα εμπρός. Η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου προκύπτει για $t = 4$, κατά την όπισθεν κίνηση.



ΣΧΗΜΑ 2.16 Γραφική παράσταση της ταχύτητας, για το Παράδειγμα 3.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Bernard Bolzano
(1781-1848)

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι η επιτάχυνσή του. Η επιτάχυνση μας δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνει ή μειώνει την ταχύτητά του το σώμα.

Μερικές φορές η επιτάχυνση μεταβάλλεται απότομα. Όταν επιβαίνουμε σε όχημα που κινείται άτσαλα, η καταπόνηση που νιώθουμε δεν οφείλεται τόσο στο ότι οι επιταχύνσεις που αναπτύσσονται είναι κατ' ανάγκην μεγάλες, αλλά στο ότι οι μεταβολές της επιταχύνσεως είναι απότομες. Αυτή είναι, για παράδειγμα, η αιτία που το ποτό μας μπορεί να χυθεί σε ένα απότομο φρενάρισμα.

Ορισμοί Επιτάχυνση, παράγωγος επιτάχυνσης

Επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο. Αν η θέση ενός σώματος τη χρονική στιγμή t είναι $s = f(t)$, τότε η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή t είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ορίζουμε επίσης την **παράγωγο της επιταχύνσεως** ως προς τον χρόνο:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Κοντά στην επιφάνεια της Γης όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση. Όπως απέδειξε ο Galileo πειραματιζόμενος με την ελεύθερη πτώση, η απόσταση που διανύει σε χρόνο t ένα σώμα που αφήνεται να πέσει, είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου πτώσεως. Εκφράζουμε την αναλογία αυτή γράφοντας

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου s η απόσταση και g η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας της Γης. Η εξίσωση αυτή ισχύει κανονικά στον κενό χώρο, όπου δεν υπάρχει η αντίσταση του αέρα· αλλά και στον αέρα ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό, προκειμένου για συμπαγή, βαριά αντικείμενα, όπως ατσάλινα εργαλεία, κατά τα πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης τους (προτού η αντίσταση γίνει μεγάλη).

Η παράγωγος της σταθερής επιταχύνσεως της βαρύτητας (g = 9,8 m/sec^2) είναι μηδέν:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

Για ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα, έχουμε $j = 0$.

Η τιμή του g στην εξίσωση $s = (1/2)gt^2$ εξαρτάται από τις μονάδες στις οποίες μετράμε τα t και s. Όταν το t είναι σε δευτερόλεπτα (ως συνήθως), τότε έχουμε τις ακόλουθες τιμές:

Συντομογραφίες μονάδων μέτρησης

m/sec^2 «μέτρα ανά δευτερόλεπτο τετράγωνο» ή «μέτρα ανά δευτερόλεπτο ανά δευτερόλεπτο»

Εξισώσεις ελεύθερης πτώσης (Γη)

Μετρικές μονάδες (SI): $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, $s = \frac{1}{2}(9{,}8)t^2 = 4{,}9t^2$

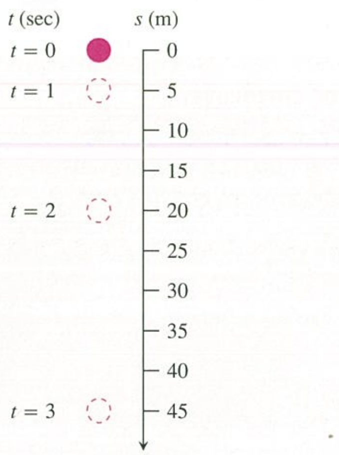
(s σε μέτρα)

Παράδειγμα 4 Μοντέλο ελεύθερης πτώσης

Το Σχήμα 2.17 δείχνει την ελεύθερη πτώση μιας συμπαγούς σφαίρας που αφήνεται να πέσει από κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ sec.

(α) Πόσα μέτρα θα διανύσει η σφαίρα τα πρώτα 2 sec της πτώσης της;

(β) Πόση είναι τότε η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνσή της;



Σχημα 2.17 Μια συμπαγής σφαίρα που πέφτει από κατάσταση ηρεμίας (Παράδειγμα 4)

Λύση

(α) Η εξίσωση της ελεύθερης πτώσης (σε μέτρα) είναι $s = 4{,}9t^2$. Κατά τα πρώτα 2 sec, η σφαίρα διανύει πέφτοντας

$$s(2) = 4{,}9(2)^2 = 19{,}6 \text{ m}.$$

(β) Για κάθε χρονική στιγμή t, η *ταχύτητα* είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσεως:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4{,}9t^2) = 9{,}8t.$$

Για $t = 2$, η ταχύτητα ισούται με

$$v(2) = 19{,}6 \text{ m/sec}$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω (αυξανόμενο s). Το *μέτρο της ταχύτητας* για $t = 2$ είναι

$$\text{Μέτρο ταχύτητας} = |v(2)| = 19{,}6 \text{ m/sec}.$$

Η *επιτάχυνση* για τη χρονική στιγμή t είναι

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9{,}8 \text{ m/sec}^2.$$

Για $t = 2$, η επιτάχυνση ισούται με $9{,}8 \text{ m/sec}^2$.

Παράδειγμα 5 Μοντέλο κατακόρυφης πτώσης

CD-ROM
Δικτυότοπος

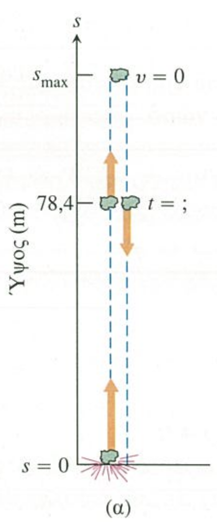
Μια έκρηξη δυναμίτη εκσφενδονίζει έναν μεγάλο βράχο κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 49 m/sec (περίπου 176 km/h) (Σχήμα 2.18α). Ο βράχος φθάνει σε ύψος $s = 49t - 4{,}9t^2$ m μετά από t sec.

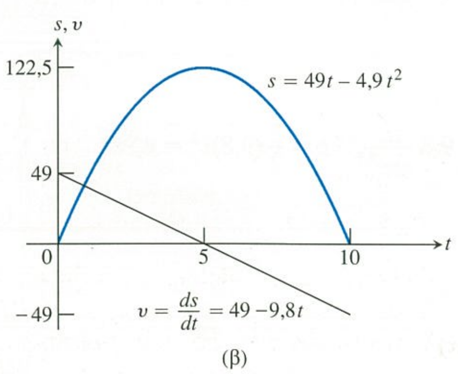
(α) Σε πόσο ύψος φθάνει τελικά ο βράχος;

(β) Ποιο το μέτρο και η φορά της ταχύτητας του βράχου σε ύψος 78,4 m κατά την άνοδό του; Το ίδιο ερώτημα για το ίδιο σημείο κατά την κάθοδο.

(γ) Ποια η επιτάχυνση του βράχου σε τυχούσα στιγμή t κατά τη διάρκεια της κίνησής του (μετά την έκρηξη);

(δ) Πότε θα συγκρουστεί με το έδαφος ο βράχος;





Σχημα 2.18 (α) Η κίνηση του βράχου στο Παράδειγμα 5. (β) Οι γραφικές παραστάσεις των s και v συναρτήσει του χρόνου· το s μεγιστοποιείται όταν $v = ds/dt = 0$. Το γράφημα του s *δεν* είναι η τροχιά του βράχου, αλλά η γραφική παράσταση του ύψους συναρτήσει του χρόνου. Η κλίση της καμπύλης του s είναι η ταχύτητα του βράχου, που γράφημά της είναι η ευθεία που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

(α) Στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει, s είναι το ύψος από το έδαφος, οπότε η ταχύτητα είναι θετική κατά την άνοδο και αρνητική κατά την κάθοδο. Τη στιγμή που ο βράχος βρίσκεται στο απόγειο της κίνησής του (σε μέγιστο ύψος), η

ταχύτητά του μηδενίζεται. Για να βρούμε το ύψος αυτό, θα πρέπει να βρούμε σε ποια χρονική στιγμή έχουμε $v = 0$ και μετά να υπολογίσουμε το s για εκείνη τη στιγμή.

Για τυχούσα στιγμή t, η ταχύτητα είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(49t - 4{,}9t^2) = 49 - 9{,}8t \text{ m/sec}.$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν

$$49 - 9{,}8t = 0, \qquad \text{δηλαδή} \qquad t = 5 \text{ sec}.$$

Το ύψος του βράχου για $t = 5$ sec είναι

$$s_{max} = s(5) = 49(5) - 4{,}9(5)^2 = 245 - 122{,}5 = 122{,}5 \text{ m}.$$

Δείτε το Σχήμα 2.18β.

(β) Για να βρούμε την ταχύτητα του βράχου σε ύψος 78,4 m κατά την άνοδο και την κάθοδο, βρίσκουμε πρώτα τις δύο τιμές του t για τις οποίες

$$s(t) = 49t - 4{,}9t^2 = 78{,}4.$$

Λύνουμε την εξίσωση αυτή:

$$4{,}9t^2 - 49t + 78{,}4 = 0$$
$$4{,}9(t^2 - 10t + 16) = 0$$
$$(t - 2)(t - 8) = 0$$
$$t = 2 \text{ sec}, \; t = 8 \text{ sec}.$$

Δηλαδή ο βράχος βρίσκεται σε ύψος 78,4 m πάνω από το έδαφος 2 sec μετά την έκρηξη και, πάλι, για δεύτερη φορά, 8 sec μετά την έκρηξη. Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι

$$v(2) = 49 - 9{,}8(2) = 49 - 19{,}6 = 29{,}4 \text{ m/sec}$$
$$v(8) = 49 - 9{,}8(8) = 49 - 78{,}4 = -29{,}4 \text{ m/sec}.$$

Και τις δύο φορές, το μέτρο της ταχύτητας ισούται με 29,4 m/sec.

(γ) Για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης του βράχου μετά την έκρηξη, η επιτάχυνσή του είναι σταθερή και ίση με

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(49 - 9{,}8t) = -9{,}8 \text{ m/sec}^2.$$

Η επιτάχυνση έχει πάντα φορά προς τα κάτω. Καθώς ανέρχεται ο βράχος, τον επιβραδύνει· καθώς κατέρχεται, τον επιταχύνει.

(δ) Ο βράχος συγκρούεται με το έδαφος τη (θετική) χρονική στιγμή t για την οποία $s = 0$. Η εξίσωση $49t - 4{,}9t^2 = 0$ παραγοντοποιείται, οπότε παίρνουμε $4{,}9t(10 - t) = 0$, της οποίας οι λύσεις είναι $t = 0$ και $t = 10$. Η έκρηξη συνέβη τη στιγμή $t = 0$, οπότε και εκσφενδονίσθηκε ο βράχος. Επέστρεψε στο έδαφος 10 sec αργότερα.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ *Προσομοίωση κατακόρυφης κίνησης* Οι παραμετρικές εξισώσεις

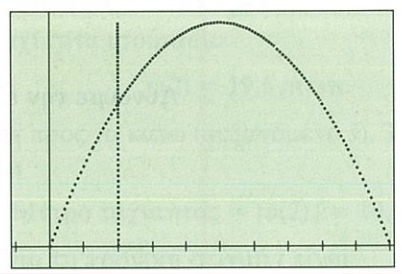
$$x(t) = c, \qquad y(t) = f(t)$$

παριστάνουν σημεία επί της κατακόρυφης ευθείας $x = c$. Αν η $f(t)$ δηλώνει το ύψος κινούμενου σώματος κατά τη χρονική στιγμή t, τότε τοποθετώντας στην ευθεία το σύνολο των σημείων $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ θα έχουμε προσομοιώσει την κίνηση. Δοκιμάστε το για τον βράχο του Παραδείγματος 5, θέτοντας π.χ. $x(t) = 2$ και $y(t) = 49t - 4{,}9t^2$, και κατασκευάζοντας το διάκριτο γράφημα (επιλέγοντας «dot mode» στον υπολογιστή σας) με χρονικό βήμα (χρονοβαθμίδα) ίσο με 0,1. Για ποιον λόγο μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του γραφήματος; Γιατί η σχεδίαση μοιάζει να σταματά μόλις φθάσει στο ανώτερο σημείο; (Κάντε χωριστά γραφήματα για τα χρονικά διαστήματα $0 \le t \le 5$ και $5 \le t \le 10$.)

Ως ένα δεύτερο πείραμα, σχεδιάστε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 160t - 16t^2$$

στο ίδιο σχήμα με την προσομοίωση της κατακόρυφης κίνησης, πάλι σε διάκριτο γράφημα. Βάσει των όσων μάθατε για το είδος της κίνησης του βράχου από το Παράδειγμα 5, επιλέξτε κατάλληλα μια περιοχή σχεδίασης όπου να περικλείεται όλη η ενδιαφέρουσα συμπεριφορά της κίνησης.



Διάκριτα γραφήματα των

$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 49t - 4{,}9t^2 \end{cases}$

και

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 49t - 4{,}9t^2 \end{cases}$

Ευαισθησία σε μεταβολές

Όταν μια μικρή μεταβολή στο x προξενεί μια μεγάλη μεταβολή στην τιμή της συναρτήσεως $f(x)$, λέμε ότι η συνάρτηση είναι σχετικά **ευαίσθητη** σε μεταβολές του x. Η παράγωγος $f'(x)$ είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας αυτής.

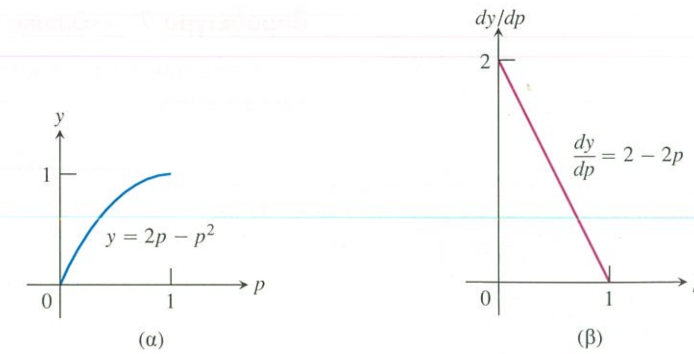
Παράδειγμα 6 Γενετικά δεδομένα και ευαισθησία σε μεταβολές

Ο Αυστριακός μοναχός Gregor Johann Mendel (1822–1884), μελετώντας τους καρπούς της μπιζελιάς και άλλων φυτών, μας έδωσε την πρώτη επιστημονική ερμηνεία του υβριδισμού. Οι ενδελεχείς μελέτες του απέδειξαν ότι αν η συχνότητα του γονιδίου του μπιζελιού με λεία φλούδα (επικρατές γονίδιο) είναι p (ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1), και η συχνότητα του γονιδίου του μπιζελιού με ρυτιδωμένη φλούδα (υπολειπόμενο γονίδιο) είναι $(1 - p)$, τότε το ποσοστό των μπιζελιών με λεία φλούδα στην επόμενη γενεά θα ισούται με

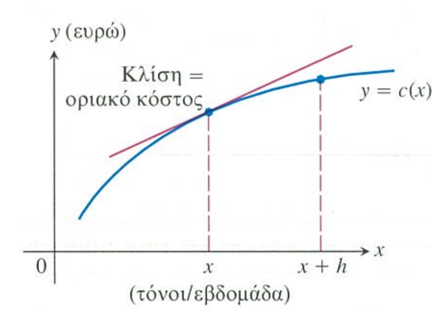
$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2.$$

Η γραφική παράσταση του y συναρτήσει του p, στο Σχήμα 2.19α, φανερώνει ότι το y είναι πιο ευαίσθητο σε μεταβολές του p για μικρές τιμές του p παρά για μεγάλες. Πράγματι, το γράφημα του Σχήματος 2.19β μας δείχνει ότι η παράγωγος dy/dp ισούται περίπου με 2 για p κοντά στο 0, και περίπου με 0 για p κοντά στο 1.

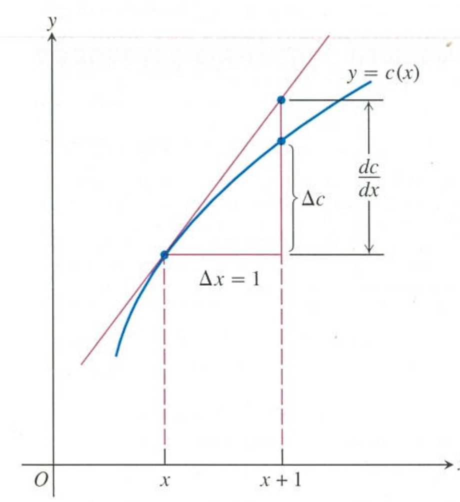
Η σημασία των παραπάνω για τη γενετική έγκειται στο ότι αν εισαγάγουμε μερικά επικρατή γονίδια σε πληθυσμό έντονα υπολειπόμενο (δηλ. με μικρή συχνότητα λείας φλούδας) τα αποτελέσματα στις επόμενες γενεές θα είναι θεαματικότερα απ' ό,τι αν εισαγάγαμε τα ίδια γονίδια σε έναν έντονα επικρατή πληθυσμό (δηλ. με μεγάλη συχνότητα λείας φλούδας).



Σχημα 2.19 (α) Το γράφημα της $y = 2p - p^2$, που περιγράφει το ποσοστό των μπιζελιών με λεία φλούδα. (β) Το γράφημα της dy/dp.



Σχημα 2.20 Εβδομαδιαία παραγωγή χάλυβα: $c(x)$ είναι το κόστος παραγωγής x τόνων ανά εβδομάδα. Το κόστος παραγωγής h τόνων επιπλέον είναι $c(x + h) - c(x)$.



Σχημα 2.21 Το οριακό κόστος dc/dx ισούται κατά προσέγγιση με το επιπλέον κόστος Δc παραγωγής $\Delta x = 1$ επιπλέον μονάδας.

Εφαρμογές των παραγώγων στα οικονομικά

Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τους όρους *ταχύτητα* και *επιτάχυνση* όταν αναφέρονται στις παραγώγους συναρτήσεων που περιγράφουν κίνηση. Αλλά και οι οικονομολόγοι διαθέτουν εξειδικευμένο λεξιλόγιο για την έννοια του ρυθμού μεταβολής, δηλ. της παραγώγου: χρησιμοποιούν τον επιθετικό προσδιορισμό *οριακός*.

Κατά την παραγωγική διαδικασία, το *κόστος παραγωγής* $c(x)$ είναι συνάρτηση του πλήθους x των παραχθέντων μονάδων (προϊόντων). Το *οριακό κόστος παραγωγής* είναι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους ως προς την παραχθείσα ποσότητα, δηλαδή dc/dx.

Έστω ότι η συνάρτηση $c(x)$ παριστάνει το κόστος παραγωγής μιας ποσότητας x τόνων χάλυβα σε μία εβδομάδα. Η παραγωγή $x + h$ μονάδων (τόνων) ανά εβδομάδα στοιχίζει περισσότερο, και η διαφορά αυτή του κόστους, διαιρεμένη με το h, είναι το μέσο κόστος παραγωγής για κάθε επιπλέον τόνο:

$$\frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{μέσο κόστος παραγωγής καθενός από τους } h \text{ επιπλέον τόνους χάλυβα}$$

Τό όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \to 0$ είναι το *οριακό κόστος* της παραγωγής επιπλέον ποσότητας χάλυβα κάθε εβδομάδα, όταν η τρέχουσα εβδομαδιαία παραγωγή είναι x τόνοι (Σχήμα 2.20).

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{οριακό κόστος παραγωγής.}$$

Μερικές φορές χρησιμοποιείται και ο ακόλουθος, λιγότερο αυστηρός ορισμός του οριακού κόστους παραγωγής, ως το επιπλέον κόστος παραγωγής μίας μονάδας:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x + 1) - c(x)}{1},$$

ποσότητα που προσεγγίζεται από την τιμή της παραγώγου dc/dx στο x. Η προσέγγιση αυτή είναι επιτρεπτή εφόσον η κλίση της καμπύλης c δεν παρουσιάζει μεγάλες αυξομειώσεις κοντά στο x. Στην περίπτωση αυτή το πηλίκο διαφορών ισούται περίπου με το όριό του dc/dx, που εκφράζει την κατακόρυφη μεταβολή επί της εφαπτόμενης ευθείας για $\Delta x = 1$ (Σχήμα 2.21). Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβέστερη για μεγάλες τιμές του x.

Επιλογή συναρτήσεων για την εξήγηση οικονομικών εννοιών

Αν διερωτάστε για ποιον λόγο οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν πολυώνυμα μικρού βαθμού για να εξηγήσουν τις περίπλοκες έννοιες του κόστους και του εισοδήματος, ιδού το σκεπτικό τους: Παρά το ότι σπανίως διαθέτουμε μαθηματικούς τύπους που να περιγράφουν πιστά τα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου, εντούτοις η θεωρία των οικονομικών μπορεί να μας φανεί χρήσιμη – ώς ένα σημείο. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιεί η θεωρία αυτή μπορούν συνήθως να προσεγγιστούν από πολυώνυμα μικρού βαθμού, ορισμένα σε κατάλληλα διαστήματα. Τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού αποτελούν μια καλή τέτοια επιλογή, δεδομένου ότι είναι μεν σχετικά απλά στον χειρισμό τους, αλλά διαθέτουν και αρκετή πολυπλοκότητα ώστε να αποδίδουν τη ζητούμενη συμπεριφορά.

Παράδειγμα 7 Οριακό κόστος και οριακό έσοδο

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος παραγωγής (σε ευρώ) x θερμοσυσσωρευτών είναι

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

όταν συνολικά παράγονται από 8 έως 30 θερμοσυσσωρευτές, και ότι το έσοδο (σε ευρώ) από την πώληση αυτών των x συσκευών είναι

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x\,.$$

Έστω ότι η επιχείρησή σας παράγει 10 θερμοσυσσωρευτές την ημέρα. Πόσο περίπου επιπλέον θα στοιχίσει η παραγωγή ενός ακόμη θερμοσυσσωρευτή την ημέρα, και πόσο θα αυξηθούν τα έσοδά σας από την επακόλουθη πώληση των 11 συσκευών ανά ημέρα;

Λύση Το κόστος της αύξησης της παραγωγής από 10 θερμοσυσσωρευτές την ημέρα σε 11, ισούται περίπου με την παράγωγο $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

Το επιπλέον κόστος είναι λοιπόν 195 €. Το οριακό έσοδο είναι

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12.$$

Η συνάρτηση οριακού εσόδου αποτελεί μια εκτίμηση της αύξησης των εσόδων από την πώληση μίας μονάδας επιπλέον. Εάν ήδη πωλούνται ημερησίως 10 συσκευές, τότε η αναμενόμενη αύξηση των εσόδων σας θα είναι

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252\text{ €}$$

αν οι πωλήσεις αυξηθούν σε 11 ημερησίως.

Παράδειγμα 8 Οριακός φορολογικός συντελεστής

Προκειμένου να αποκτήσετε μια αίσθηση της ορολογίας των οριακών συντελεστών, ας εξετάσουμε τώρα τους οριακούς φορολογικούς συντελεστές. Αν ο οριακός φορολογικός συντελεστής σας είναι 28% και το εισόδημά σας αυξηθεί κατά 1000 €, θα πληρώσετε επιπλέον φόρο 280 €. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα πληρώσετε το 28% του συνολικού σας εισοδήματος σε φόρους. Σημαίνει απλώς ότι για την παρούσα εισοδηματική σας στάθμη I, ο ρυθμός αύξησης του φόρου T ως προς το εισόδημα ισούται με $dT/dI = 0{,}28$. Συνεπώς θα πληρώσετε 0,28 € φόρο για κάθε επιπλέον ευρώ που κερδίζετε. Προφανώς, αν συνολικά κερδίζετε πολύ περισσότερα, θα υπαχθείτε σε άλλη φορολογική κλίμακα και κατά συνέπεια ο οριακός φορολογικός σας συντελεστής θα αυξηθεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2

Ευθύγραμμη κίνηση

CD-ROM Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 1-4 δίδονται οι θέσεις $s = f(t)$ σώματος που κινείται επί του άξονα s (s σε m και t σε sec).

(α) Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος και η μέση ταχύτητά του για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

(β) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος στα άκρα του χρονικού διαστήματος.

(γ) Αλλάζει κατεύθυνση στο δοσμένο χρονικό διάστημα το σώμα, και πότε;

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$

3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$

5. *Κίνηση σωματιδίου* Κατά τη χρονική στιγμή t, η θέση ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.

(α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητά του μηδενίζεται.

(β) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος κάθε φορά που η επιτάχυνσή του μηδενίζεται.

(γ) Να βρεθεί η συνολική διανυθείσα απόσταση κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 2$.

6. *Κίνηση σωματιδίου* Κατά τη χρονική στιγμή $t \ge 0$, η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $v = t^2 - 4t + 3$.

(α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητά του μηδενίζεται.

(β) Πότε κινείται προς τα εμπρός το σώμα και πότε προς τα πίσω;

(γ) Πότε αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος και πότε μειώνεται;

Εφαρμογές ελεύθερης πτώσεως

7. *Ελεύθερη πτώση στον Άρη και στον Δία* Οι εξισώσεις ελεύθερης πτώσεως στις επιφάνειες των δύο πλανητών είναι $s = 1{,}86t^2$ για τον Άρη και $s = 11{,}44t^2$ για τον Δία, αντίστοιχα (s σε m, t σε sec). Αν αφήσουμε έναν βράχο να πέσει σε κάθε πλανήτη, σε πόσο χρόνο θα αποκτήσει την ταχύτητα των 27,8 m/sec (περίπου 100 km/h);

8. *Κίνηση βλήματος στη σελήνη* Ένας βράχος εκσφενδονίζεται κατακόρυφα από τη σεληνιακή επιφάνεια με αρχική ταχύτητα 24 m/sec (περίπου 86 km/h) και μετά από t sec έχει ανέλθει σε ύψος $s = 24t - 0{,}8t^2$ m.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του βράχου τη χρονική στιγμή t. (Εδώ πρόκειται για την επιτάχυνση της σεληνιακής βαρύτητας.)

(β) Πότε φθάνει σε μέγιστο ύψος ο βράχος;

(γ) Σε ποιο μέγιστο ύψος ανέρχεται;

(δ) Πόσο χρόνο χρειάζεται για να ανέλθει στο ήμισυ του μέγιστου ύψους του ο βράχος;

(ε) Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που εκσφενδονίζεται θα συγκρουστεί με το σεληνιακό έδαφος ο βράχος;

9. *Εύρεση του g σε μικρό πλανήτη χωρίς ατμόσφαιρα* Εξερευνητές στην επιφάνεια ενός μικρού πλανήτη χωρίς ατμόσφαιρα χρησιμοποιούν έναν εκτοξευτήρα με ελατήριο για να εκσφενδονίσουν κατακόρυφα μια μικρή σφαίρα, με αρχική ταχύτητα 15 m/sec. Δεδομένου ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι g_s m/sec^2, οι εξερευνητές υπολογίζουν ότι μετά από t sec η σφαίρα θα έχει ανέλθει σε ύψος $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ m. Η σφαίρα έφτασε σε μέγιστο ύψος 20 sec μετά την εκτόξευσή της. Ποια είναι η τιμή του g_s στον πλανήτη;

10. *Επιταχυνόμενη σφαίρα* Μια σφαίρα που εκτοξεύεται κατακορύφως από 45άρι περίστροφο στην επιφάνεια της σελήνης θα ανέλθει σε ύψος $s = 250t - 0{,}8t^2$ m μετά από t sec. Το αντίστοιχο ύψος στη Γη (απουσία αέρα), πάλι μετά από t sec, θα ήταν $s = 250t - 4{,}9t^2$ m. Επί πόσο χρόνο θα κινηθεί συνολικά η σφαίρα σε κάθε πλανήτη; Σε πόσο μέγιστο ύψος θα ανέλθει;

CD-ROM Δικτυότοπος

11. *Ελεύθερη πτώση από τον πύργο της Πίζας* Αν ο Γαλιλαίος είχε αφήσει μια μπάλα κανονιού να πέσει από τον πύργο της Πίζας, ύψους 55 m, τότε μετά από t sec πτώσεως η μπάλα θα βρισκόταν σε ύψος $s = 55 - 4{,}9t^2$.

CD-ROM Δικτυότοπος

(α) Ποια θα ήταν τότε η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνση της μπάλας τη χρονική στιγμή t;

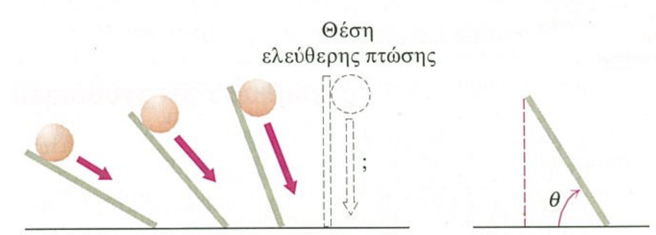
(β) Σε πόσο χρόνο θα έφτανε η μπάλα στο έδαφος;

(γ) Ποια θα ήταν η ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή που θα έφτανε στο έδαφος;

12. *Ο τύπος ελεύθερης πτώσης του Γαλιλαίου* Ο Γαλιλαίος κατέληξε σε έναν τύπο για την ταχύτητα ενός σώματος κατά την ελεύθερη πτώση εφαρμόζοντας την εξής πειραματική διαδικασία: Παρατηρούσε την κίνηση σφαιρών που άφηνε να κυλήσουν (χωρίς αρχική ταχύτητα) πάνω σε κεκλιμένα επίπεδα διαδοχικά αυξανόμενης κλίσης, επιζητώντας να προσδιορίσει έτσι έναν οριακό τύπο που θα προέβλεπε την κίνηση στην περίπτωση που το επίπεδο θα ήταν κατακόρυφο και η σφαίρα θα έπεφτε συνεπώς ελεύθερα. Οι μετρήσεις του απέδειξαν ότι για κάθε γωνία κλίσεως του επιπέδου, η σφαίρα αποκτούσε ταχύτητα ανάλογη του χρόνου κίνησης t. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα ικανοποιούσε μια σχέση της μορφής $v = kt$. Η τιμή της σταθεράς k εξαρτώνταν από την κλίση του επιπέδου.

Χρησιμοποιώντας σημερινό συμβολισμό —τμήμα (β) του σχήματος— όπου η απόσταση μετριέται σε m και ο χρόνος σε sec, θα γράφαμε την πειραματικά προσδιορισθείσα σχέση του Γαλιλαίου ως εξής: Για δεδομένη γωνία θ, η ταχύτητα της σφαίρας t sec μετά την έναρξη της κύλησης είναι

$$v = 9{,}8(\sin\theta)t \ \text{m/sec}.$$



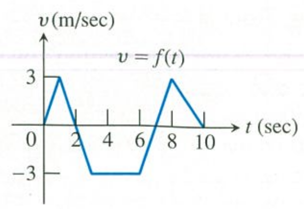
(α) (β)

(α) Ποια είναι η εξίσωση της ταχύτητας μιας σφαίρας που πέφτει ελεύθερα;

(β) Βασιζόμενοι στην απάντησή σας στο ερώτημα (α), πόση είναι η σταθερή επιτάχυνση που υφίσταται ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα κοντά στην επιφάνεια της Γης;

Συμπεράσματα περί κίνησης από γραφικές παραστάσεις

13. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει την ταχύτητα $v = ds/dt = f(t)$ (m/sec) σώματος που κινείται σε ευθεία.



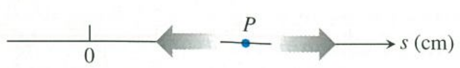
(α) Πότε αλλάζει η φορά της κίνησης του σώματος;

(β) Περίπου πότε κινείται με σταθερή ταχύτητα το σώμα;

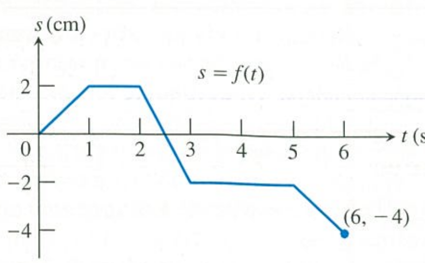
(γ) Παραστήστε γραφικά την ταχύτητα για $0 \le t \le 10$.

(δ) Παραστήστε γραφικά την επιτάχυνση, όπου αυτή ορίζεται.

14. Ένα σωματίδιο P κινείται επί του άξονα s όπως φαίνεται στο τμήμα (α) του ακόλουθου σχήματος. Το τμήμα (β) δείχνει τη θέση του P συναρτήσει του χρόνου t.



(α)



(β)

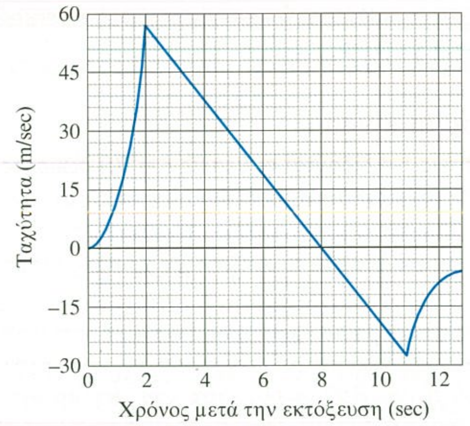
(α) Πότε κινείται προς τα αριστερά το P, πότε προς τα δεξιά, και πότε μένει ακίνητο;

(β) Παραστήστε γραφικά το μέτρο και την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας, όπου αυτή ορίζεται.

CD-ROM Δικτυότοπος

15. *Εκτόξευση πυραύλου* Κατά την εκτόξευση δοκιμαστικού πυραύλου, τα καύσιμα επαρκούν για να προωθήσουν κατακόρυφα τον πύραυλο για μερικά δευτερόλεπτα, επιταχύνοντάς τον. Μετά την εξάντληση των καυσίμων, ο πύραυλος συνεχίζει για λίγο την ανοδική του πορεία και κατόπιν αρχίζει να πέφτει. Ένας μικρός εκρηκτικός μηχανισμός ενεργοποιεί ένα αλεξίπτωτο λίγο μετά την έναρξη της καθόδου. Το αλεξίπτωτο επιβραδύνει τον πύραυλο και έτσι αποφεύγεται η συντριβή του κατά την προσεδάφιση.

Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει μετρήσεις της ταχύτητας του δοκιμαστικού πυραύλου κατά την πτήση του. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του διαγράμματος για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:



(α) Πόσο γρήγορα ανέβαινε ο πύραυλος τη στιγμή που τελείωσαν τα καύσιμα;

(β) Για πόσα δευτερόλεπτα δούλεψαν οι μηχανές του;

(γ) Πότε έφτασε στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ο πύραυλος; Πόση ήταν τότε η ταχύτητά του;

(δ) Σε ποια στιγμή άνοιξε το αλεξίπτωτο; Πόσο γρήγορα έπεφτε τη στιγμή εκείνη ο πύραυλος;

(ε) Για πόσο διάστημα έπεφτε ο πύραυλος προτού ανοίξει το αλεξίπτωτο;

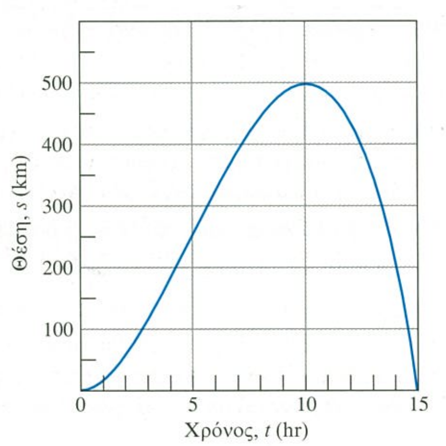
(στ) Πότε ήταν μέγιστη η επιτάχυνση του πυραύλου;

(ζ) Πότε ήταν σταθερή η επιτάχυνση του πυραύλου; Ποια η τιμή της τότε (με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου);

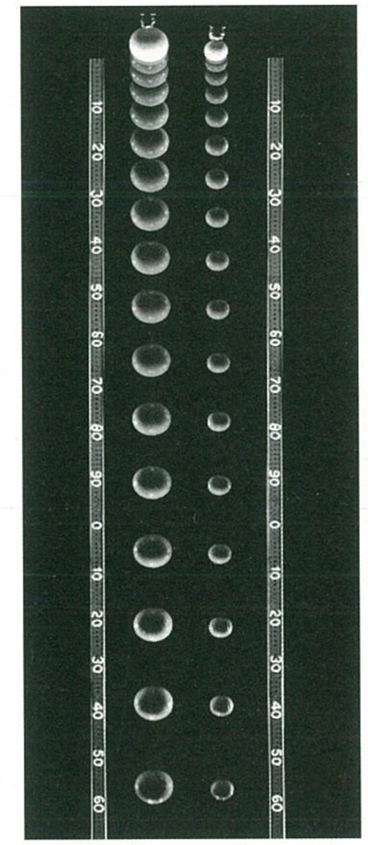
16. *Διαδρομή φορτηγού* Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η θέση s ενός φορτηγού που κινείται στην εθνική οδό. Το φορτηγό ξεκινά το ταξίδι του τη χρονική στιγμή $t = 0$ και επιστρέφει μετά από 15 h, δηλ. $t = 15$.

(α) Χρησιμοποιώντας την τεχνική που περιγράφεται στην Ενότητα 2.1, Παράδειγμα 9, παραστήστε γραφικά την ταχύτητα του φορτηγού $v = ds/dt$ για $0 \le t \le 15$. Κατόπιν επαναλάβετε τη διαδικασία με την καμπύλη της ταχύτητας, σχεδιάζοντας τώρα το γράφημα της επιτάχυνσης dv/dt.

(β) Έστω ότι είναι $s = 15t^2 - t^3$. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις ds/dt και d^2s/dt^2 και συγκρίνετε τα γραφήματά σας με εκείνα του ερωτήματος (α).



17. *Σφαίρες που πέφτουν* Η πολλαπλή φωτογράφηση του ακόλουθου σχήματος δείχνει την ελεύθερη πτώση δύο σφαιρών από κατάσταση ηρεμίας. Η κατακόρυφη βαθμονόμηση είναι σε εκατοστόμετρα (cm). Χρησιμοποιήστε την εξίσωση $s = 490t^2$ (εξίσωση ελεύθερης πτώσης με το s σε cm και το t σε sec) για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:



(α) Πόσος χρόνος απαιτήθηκε για να διανύσουν πέφτοντας τα πρώτα 160 cm οι σφαίρες; Ποια η μέση ταχύτητά τους για το χρονικό αυτό διάστημα;

(β) Πόσο γρήγορα έπεφταν οι σφαίρες τη στιγμή που έφταναν στο 160-στό cm; Πόση ήταν η επιτάχυνσή τους τη στιγμή εκείνη;

(γ) Περίπου πόσο γρήγορα αναβόσβηνε το φλας στη φωτογραφία (αναλαμπές ανά δευτερόλεπτο);

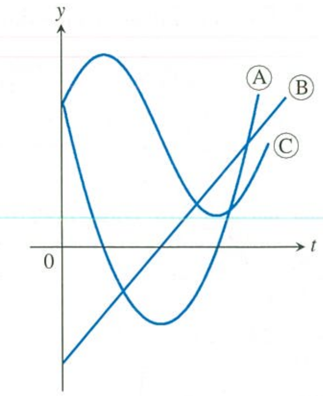
18. *Μάθετε γράφοντας* Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2.22 δείχνουν τη θέση s, την ταχύτητα $v = ds/dt$, και την επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$ ενός ευθύγραμμα κινούμενου σώματος, συναρτήσει του χρόνου t. Αναγνωρίστε κάθε καμπύλη, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

19. *Μάθετε γράφοντας* Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2.23 δείχνουν τη θέση s, την ταχύτητα $v = ds/dt$, και την επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$ ενός ευθύγραμμα κινούμενου σώματος, συναρτήσει του χρόνου t. Αναγνωρίστε κάθε καμπύλη, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

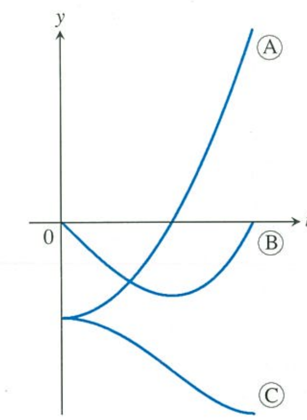
Οικονομικά

20. *Οριακό κόστος* Έστω ότι το κόστος (σε €) παραγωγής x πλυντηρίων δίδεται από τη σχέση

$$c(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2.$$



ΣΧΗΜΑ 2.22 Γραφικές παραστάσεις για την Άσκηση 18.



ΣΧΗΜΑ 2.23 Γραφικές παραστάσεις για την Άσκηση 19.

(α) Βρείτε το μέσο κόστος ανά συσκευή, προκειμένου να παραχθούν τα πρώτα 100 πλυντήρια.

(β) Βρείτε το οριακό κόστος όταν παράγονται 100 πλυντήρια.

(γ) Δείξτε ότι το οριακό κόστος, όταν παράγονται 100 πλυντήρια, ισούται περίπου με το κόστος παραγωγής ενός επιπλέον πλυντηρίου μετά τα πρώτα 100. (Υπολογίστε απευθείας το κόστος αυτό.)

21. *Οριακά έσοδα* Έστω ότι το έσοδο (σε ευρώ) από την πώληση x πλυντηρίων δίδεται από τη σχέση

$$r(x) = 20.000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

(α) Βρείτε το οριακό έσοδο όταν παράγονται 100 συσκευές.

(β) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $r'(x)$ για να εκτιμήσετε την αύξηση των εσόδων που προκύπτει όταν αυξηθεί η παραγωγή από 100 σε 101 πλυντήρια εβδομαδιαίως.

(γ) Βρείτε το όριο της συναρτήσεως $r'(x)$ καθώς $x \to \infty$. Τι νόημα έχει το αποτέλεσμα αυτό;

Περισσότερες εφαρμογές

22. *Βακτηριακός πληθυσμός* Αφού προστέθηκε βακτηριοκτόνος ουσία σε μια καλλιέργεια βακτηρίων, τα βακτήρια συνέχισαν για λίγο να πολλαπλασιάζονται, προτού ο πληθυσμός τους αρχίσει να μειώνεται. Ο πληθυσμός των βακτηρίων τη χρονική στιγμή t (σε ώρες) ήταν $b =$

$10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Να βρεθούν οι ρυθμοί αύξησης του πληθυσμού για

(α) $t = 0$ h.

(β) $t = 5$ h.

(γ) $t = 10$ h.

23. *Δεξαμενή που αδειάζει* Στο εσωτερικό μιας δεξαμενής που αδειάζει παραμένουν $Q(t) = 200(30 - t)^2$ λίτρα νερού t λεπτά (min) μετά την έναρξη της εκροής. Πόσο γρήγορα χύνεται το νερό στο τέλος των πρώτων 10 min; Ποιος ο μέσος ρυθμός εκροής κατά το χρονικό διάστημα των πρώτων 10 min;

T **24.** *Δεξαμενή που αδειάζει* Για να αδειάσει μια γεμάτη δεξαμενή, απαιτούνται 12 h από τη στιγμή που ανοίγει η βάνα στον πυθμένα. Το βάθος y του υγρού, t ώρες μετά το άνοιγμα της βάνας, δίδεται από τη σχέση

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}.$$

(α) Βρείτε τον ρυθμό εκροής του υγρού dy/dt (m/h) τη χρονική στιγμή t.

(β) Πότε κατεβαίνει γρηγορότερα και πότε αργότερα η στάθμη του υγρού της δεξαμενής; Ποιες οι τιμές της παραγώγου dy/dt τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές;

(γ) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις συναρτήσεις y και dy/dt και σχολιάστε τη συμπεριφορά της y αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές της dy/dt.

25. *Μπαλόνι που φουσκώνει* Ο όγκος $V = (4/3)\pi r^3$ ενός σφαιρικού μπαλονιού εξαρτάται από την ακτίνα.

(α) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του όγκου (m^3/m) ως προς την ακτίνα, όταν $r = 0{,}6$ m;

(β) Πόσο περίπου αυξάνεται ο όγκος όταν η ακτίνα μεταβληθεί από 0,6 σε 0,7 m;

26. *Απογείωση αεροπλάνου* Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση που διανύει ένα αεροσκάφος στον διάδρομο πριν την απογείωση δίδεται από τη σχέση $D = (10/9)t^2$, όπου η απόσταση D μετριέται σε m από το σημείο εκκινήσεως και ο χρόνος t μετριέται σε sec από τη στιγμή που ο πιλότος αφήνει τα φρένα. Το αεροσκάφος απογειώνεται όταν η ταχύτητά του φθάσει τα 200 km/h. Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται γι' αυτό, και πόση απόσταση διανύεται στο μεταξύ;

27. *Πίδακες ηφαιστειακής λάβας* Η ηφαιστειακή δραστηριότητα του όρους Kilauea Iki τον Νοέμβριο του 1959, στη Χαβάη, ξεκίνησε με εκτίναξη λάβας από πολλά σημεία του τοιχώματος του κρατήρα, αλλά αργότερα περιορίστηκε σε μια μικρή περιοχή στο κέντρο του κρατήρα, απ' όπου σε κάποια φάση εκτινάχθηκε κατακόρυφα λάβα που έφτασε στο ύψος-ρεκόρ των 600 m. Ποια ήταν η ταχύτητα εξόδου της λάβας σε m/sec και ποια σε km/h; (*Υπόδειξη:* Αν η ταχύτητα ενός σωματιδίου λάβας είναι v_0, τότε το ύψος του μετά από t sec θα είναι $s = v_0 t - 4{,}9t^2$ m. Βρείτε κατ' αρχάς τη χρονική στιγμή όπου $ds/dt = 0$. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.)

T Οι Ασκήσεις 28-31 αναφέρονται σε σωματίδιο που κινείται στον άξονα s. Δίδεται η συνάρτηση θέσεως του σωματιδίου $s = f(t)$ συναρτήσει του χρόνου t. Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα την f, την ταχύτητα $v(t) = ds/dt = f'(t)$ και την επιτάχυνση $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Σχολιάστε πώς επηρεάζει την κίνηση το πρόσημο και οι τιμές των v και a. Συμπεριλάβετε στα σχόλιά σας απαντήσεις στα εξής ερωτήματα:

(α) Πότε είναι στιγμιαία ακίνητο το σωματίδιο;

(β) Πότε κινείται προς τα αριστερά (κάτω) και πότε προς τα δεξιά (πάνω);

(γ) Πότε αλλάζει κατεύθυνση;

(δ) Πότε επιταχύνεται και πότε επιβραδύνεται;

(ε) Πότε κινείται με μέγιστη ταχύτητα; Πότε με ελάχιστη;

(στ) Πότε απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων;

28. $s = 200t - 4{,}9t^2$, $0 \le t \le 12{,}5$ (συμπαγές αντικείμενο που εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 200 m/sec).

29. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

30. $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

31. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le t \le 4$

32. *Ιπποδρομίες* Ένα καθαρόαιμο άλογο τρέχει σε μια κούρσα 10 γύρων στον ιππόδρομο (ο γύρος έχει μήκος 200 περίπου μέτρα). Καθώς το άλογο περατώνει κάθε γύρο (Γ), περνώντας από την αφετηρία, ένας αφέτης καταγράφει τον χρόνο (t) από την έναρξη της κούρσας, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Γ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

(α) Σε πόσο χρόνο τελειώνει την κούρσα το άλογο;

(β) Με πόση μέση ταχύτητα διανύει τους πρώτους 5 γύρους;

(γ) Με πόση περίπου ταχύτητα καλπάζει το άλογο τη στιγμή που συμπληρώνει τον 3° γύρο;

(δ) Σε ποιο τμήμα της κούρσας τρέχει με μέγιστη ταχύτητα το άλογο;

(ε) Σε ποιο τμήμα της κούρσας τρέχει με μέγιστη επιτάχυνση;

2.3 Παράγωγοι γινομένου, πηλίκου και αρνητικής δύναμης

Γινόμενα • Πηλίκα • Αρνητικές ακέραιες δυνάμεις του x

Συνεχίζουμε να εξετάζουμε τρόπους παραγώγισης συναρτήσεων, παρακάμπτοντας την εφαρμογή του ορισμού.

Γινόμενα

Παρόλο που η παράγωγος του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων τους, η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων *δεν* ισούται με το γινόμενο των παραγώγων τους. Παραδείγματος χάριν,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \text{ ενώ } \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα *δύο* γινομένων, όπως θα δούμε.

Κανόνας 5 Παράγωγος γινομένου
Αν οι u και v είναι διαφορίσιμες στο x, τότε και το γινόμενό τους uv θα είναι διαφορίσιμο στο x, και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Η παράγωγος του γινομένου uv ισούται με u επί την παράγωγο της v συν v επί την παράγωγο της u. Σε τονικό συμβολισμό, $(uv)' = uv' + vu'$.

Παράδειγμα 1 Κάνοντας χρήση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου

Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου με $u = 1/x$ και $v = x^2 + (1/x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] &= \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3}\\ &= 1 - \frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dx}$, και $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, βάσει του Παραδείγματος 3 της Ενότητας 1.5.

Απόδειξη του Κανόνα 5

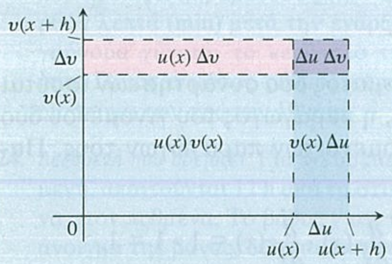
$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Για να μετατρέψουμε το κλάσμα αυτό σε ισοδύναμό του που περιέχει πηλίκα διαφορών ώστε να αναγνωρίσουμε τις παραγώγους των u και v, προσθαφαιρούμε τον όρο $u(x+h)v(x)$ στον αριθμητή:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

Γραφική απεικόνιση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου

Αν οι $u(x)$ και $v(x)$ είναι αμφότερες θετικές και αύξουσες, και αν $h > 0$,



τότε η συνολική σκιασμένη επιφάνεια στο σχήμα ισούται με

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\,\Delta v + v(x+h)\,\Delta u - \Delta u\,\Delta v.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής με h παίρνουμε

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}.$$

Καθώς $h \to 0^+$,

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0,$$

και άρα

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

Καθώς το h τείνει στο μηδέν, η $u(x+h)$ τείνει στην τιμή $u(x)$, αφού η συνάρτηση u είναι διαφορίσιμη και άρα συνεχής στο x. Έτσι τα δύο κλάσματα τείνουν, αντίστοιχα, στις τιμές dv/dx στο x και du/dx στο x. Με άλλα λόγια,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου.

Παράδειγμα 2 Υπολογισμός παραγώγου από αριθμητικές τιμές

Έστω $y = uv$ το γινόμενο δύο συναρτήσεων u και v. Να βρεθεί η $y'(2)$ αν δίδονται οι τιμές

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad \text{και} \quad v'(2) = 2.$$

Λύση Από τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου,

$$y' = (uv)' = uv' + vu',$$

θα έχουμε

$$y'(2) = u(2)v'(2) + v(2)u'(2) = (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2.$$

Πηλίκα

Κατά τον ίδιο τρόπο που η παράγωγος του γινομένου δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων δεν ισούται με το γινόμενο των παραγώγων τους, έτσι και η παράγωγος του πηλίκου δεν ισούται με το πηλίκο των παραγώγων. Αντ' αυτού, ισχύει ο λεγόμενος κανόνας παραγωγίσεως πηλίκου.

Κανόνας 6 **Παράγωγος πηλίκου**

Αν οι u και v είναι διαφορίσιμες στο x και αν $v(x) \neq 0$, τότε και το πηλίκο u/v θα είναι διαφορίσιμο στο x, και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Παράδειγμα 3 Κάνοντας χρήση του κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου

Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως

$$y = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως του πηλίκου με $u = t^2 - 1$ και $v = t^2 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Απόδειξη του Κανόνα 6

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{h\,v(x+h)v(x)}$$

Για να μετατρέψουμε το κλάσμα αυτό σε ισοδύναμό του που περιέχει πηλίκα διαφορών ώστε να αναγνωρίσουμε τις παραγώγους των u και v, προσθαφαιρούμε τον όρο $v(x)u(x)$ στον αριθμητή:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{h\,v(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.$$

Αν τώρα πάρουμε το όριο του κλάσματος, θα προκύψει ο κανόνας παραγωγίσεως πηλίκου.

Αρνητικές ακέραιες δυνάμεις του *x*

Η παράγωγος αρνητικής ακέραιας δύναμης δίνεται από τον ίδιο τύπο που ισχύει για θετική ακέραια δύναμη.

Κανόνας 7 **Παράγωγος αρνητικής ακέραιας δύναμης**

Αν n αρνητικός ακέραιος και $x \neq 0$, τότε

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Παράδειγμα 4 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 7

(α) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

(β) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
René Descartes
(Καρτέσιος)
(1596-1650)

Απόδειξη του Κανόνα 7 Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου. Αν n είναι αρνητικός ακέραιος, τότε $n = -m$, όπου m θετικός ακέραιος. Τότε θα είναι $x^n = x^{-m} = 1/x^m$, και συνεπώς

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right)$$

$$= \frac{x^m\cdot\dfrac{d}{dx}(1) - 1\cdot\dfrac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} \qquad \text{Παράγωγος πηλίκου για } u = 1 \text{ και } v = x^m$$

$$= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \qquad \text{Εφόσον } m > 0,\ \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$$

$$= -mx^{-m-1}$$

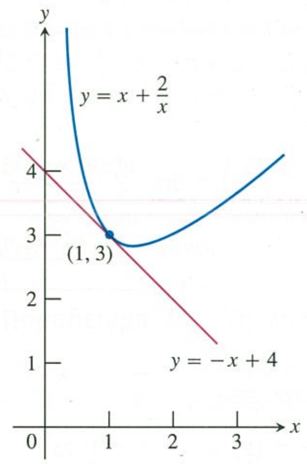
$$= nx^{n-1}. \qquad \text{Εφόσον } -m = n$$

Παράδειγμα 5 Εφαπτομένη καμπύλης

Βρείτε μια εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$y = x + \frac{2}{x}$$

στο σημείο (1, 3) (Σχήμα 2.24).



Σχημα 2.24 Η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x + (2/x)$ στο σημείο $(1, 3)$. Η καμπύλη έχει άλλο ένα σκέλος στο τρίτο τεταρτημόριο, το οποίο όμως δεν φαίνεται εδώ. Στο Κεφάλαιο 3 θα δείτε πώς σχεδιάζουμε τέτοιου είδους συναρτήσεις.

Λύση Η κλίση της καμπύλης είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

Στο σημείο $x = 1$ η κλίση έχει τιμή

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

Η ευθεία που διέρχεται από το (1, 3) με κλίση $m = -1$ θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{Εξίσωση σημείου-κλίσεως} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4. \end{aligned}$$

Αναλόγως του εκάστοτε προβλήματος, μερικοί κανόνες παραγώγισης είναι περισσότερο κοπιώδεις από άλλους στην εφαρμογή τους. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 Επιλέγοντας ποιον κανόνα θα εφαρμόσουμε

Αντί να εφαρμόσουμε τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου για να βρούμε την παράγωγο της

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

αναπτύσσουμε τον αριθμητή και διαιρούμε με x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Χρησιμοποιούμε, κατόπιν, τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος και δυνάμεως:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7 Η αντίδραση του οργανισμού σε φάρμακο

Η αντίδραση του οργανισμού σε μια χορηγούμενη δόση φαρμάκου παριστάνεται μερικές φορές από μια εξίσωση της μορφής

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right),$$

όπου C μια θετική σταθερά και M είναι η απορροφηθείσα από το αίμα ποσότητα του φαρμάκου. Αν ο οργανισμός αντιδρά αυξάνοντας την πίεση του αίματος, τότε η μεταβλητή R μετριέται σε χιλιοστά υδραργύρου· αν πάλι μεταβάλλει τη θερμοκρασία του, τότε η R μετριέται σε βαθμούς· κ.ο.κ.

Βρείτε την dR/dM. Η παράγωγος αυτή, ειδωμένη ως συνάρτηση της M, καλείται η *ευαισθησία* του οργανισμού στο φάρμακο.

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dM} &= 2M\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right) + M^2(-1/3) && \text{Παράγωγοι γινομένου, δύναμης, και σταθερού πολλαπλασίου} \\ &= MC - M^2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.3

Υπολογισμοί παραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-4, να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος κάθε συναρτήσεως.

1. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
2. $w = 3z^{-3} - \frac{1}{z}$
3. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
4. $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, να βρεθεί η y' **(α)** εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου και **(β)** εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των παραγόντων ώστε να προκύψει ένα άθροισμα απλούστερων όρων προς παραγώγιση.

5. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
6. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

Να βρεθεί η παράγωγος κάθε συναρτήσεως στις Ασκήσεις 7-14.

7. $y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$
8. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 0{,}5}$
9. $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$
10. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
11. $f(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$
12. $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$
13. $y = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$
14. $y = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

Στις Ασκήσεις 15-18, να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος κάθε συναρτήσεως.

15. $s = \frac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$
16. $r = \frac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$
17. $w = \left(\frac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$
18. $p = \left(\frac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\frac{q^4 - 1}{q^3}\right)$

Χρήση αριθμητικών τιμών

19. Έστω ότι οι u και v είναι συναρτήσεις του x διαφορίσιμες στο $x = 0$ και ότι

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = 3$$
$$v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων παραγώγων στο $x = 0$.

(α) $\frac{d}{dx}(uv)$ **(β)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

(γ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$ **(δ)** $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$

20. Έστω ότι οι u και v είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x και ότι

$$u(1) = 2, \qquad u'(1) = 0$$
$$v(1) = 5, \qquad v'(1) = -1.$$

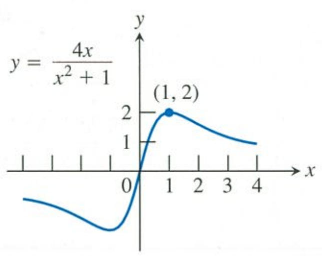
Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων παραγώγων στο $x = 1$.

(α) $\frac{d}{dx}(uv)$ (β) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

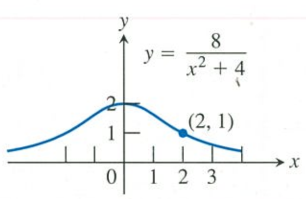
(γ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$ (δ) $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$

Κλίσεις και εφαπτομένες

21. Βρείτε την εφαπτομένη της *οφιοειδούς του Νεύτωνα* (δείτε το ακόλουθο σχήμα) στην αρχή των αξόνων και στο σημείο (1, 2).



22. Βρείτε την εφαπτομένη της *μάγισσας της Agnesi* (δείτε το ακόλουθο σχήμα) στο σημείο (2, 1).



23. Η καμπύλη $y = ax^2 + bx + c$ διέρχεται από το σημείο (1, 2) και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τα a, b, και c.

24. Οι καμπύλες $y = x^2 + ax + b$ και $y = cx - x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο (1, 0). Βρείτε τα a, b, και c.

Θεωρία και παραδείγματα

25. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση v που εμφανίζεται στον τύπο της παραγώγου γινομένου έχει σταθερή τιμή c. Τι δηλώνει τότε ο κανόνας παραγωγίσεως γινομένου, και τι σημαίνει αυτό για τον κανόνα παραγωγίσεως σταθερού πολλαπλασίου;

26. *Παράγωγος αντιστρόφου*

(α) Ο κανόνας παραγωγίσεως αντιστρόφου λέει ότι σε κάθε σημείο όπου η συνάρτηση $v(x)$ είναι διαφορίσιμη και διάφορη του μηδενός,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Δείξτε ότι ο κανόνας αυτός αποτελεί ειδική περίπτωση του κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου.

(β) Δείξτε ότι ο τύπος της παραγώγου αντιστρόφου συνδυαζόμενος με τον τύπο της παραγώγου γινομένου οδηγούν στον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου.

27. *Γενίκευση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου* Ο τύπος

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

μας δίνει την παράγωγο του γινομένου uv δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων του x.

(α) Ποιος είναι ο αντίστοιχος τύπος της παραγώγου του γινομένου uvw τριών διαφορίσιμων συναρτήσεων του x;

(β) Ποιος ο τύπος της παραγώγου του γινομένου $u_1u_2u_3u_4$ *τεσσάρων* διαφορίσιμων συναρτήσεων του x;

(γ) Ποιος ο τύπος της παραγώγου του γινομένου $u_1u_2u_3 \cdots u_n$ ενός πεπερασμένου πλήθους n διαφορίσιμων συναρτήσεων του x;

28. *Ρητές δυνάμεις*

(α) Βρείτε την $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$ γράφοντας το $x^{3/2}$ ως $x \cdot x^{1/2}$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου. Γράψτε την απάντησή σας σε μορφή γινομένου ρητού αριθμού επί μια ρητή δύναμη του x. Με παρόμοιο τρόπο απαντήστε στα (β) και (γ).

(β) Βρείτε το $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$.

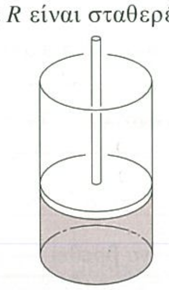
(γ) Βρείτε το $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$.

(δ) Τι συμπεραίνετε από τις απαντήσεις σας στα (α), (β), και (γ); Οι ρητές δυνάμεις θα μελετηθούν περαιτέρω στην Ενότητα 2.6.

29. *Πίεση κυλινδρικού δοχείου* Αν ένας κύλινδρος περιέχει αέριο σε σταθερή θερμοκρασία T, η πίεση P συνδέεται με τον όγκο V μέσω του τύπου

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

όπου a, b, n, και R είναι σταθερές. Βρείτε την dP/dV.



30. *Η βέλτιστη ποσότητα προς παραγγελία* Σύμφωνα με έναν τύπο απογραφής που χρησιμοποιείται στα οικονομικά, το μέσο εβδομαδιαίο κόστος παραγγελίας, πληρωμής, και αποθήκευσης εμπορεύματος ισούται με

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

όπου q είναι η ποσότητα του εμπορεύματος που παραγγέλλεται όταν έχουν λιγοστέψει τα αποθέματα (που μπορεί να είναι παπούτσια, ραδιόφωνα, σκούπες, ή οτιδήποτε)· k είναι το πάγιο κόστος ανά παραγγελία (σταθερό κάθε φορά, ανεξαρτήτως του πόσο συχνά γίνονται παραγγελίες)· c είναι το κόστος ενός τεμαχίου (σταθερό)· m είναι το πλήθος των τεμαχίων που πωλήθηκαν κάθε βδομάδα (σταθερό)· και h είναι το εβδομαδιαίο κόστος αποθήκευσης ανά τεμάχιο (σταθερά που περιλαμβάνει τα έξοδα ενοικίασης του χώρου, παροχής νερού, ρεύματος, τηλεφώνου, και ασφάλισης). Βρείτε τα dA/dq και d^2A/dq^2.

2.4 Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παράγωγος ημιτόνου • Παράγωγος συνημιτόνου • Απλή αρμονική κίνηση • Παράγωγοι των υπόλοιπων βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Πολλά από τα φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν έχουν περιοδικό χαρακτήρα (ηλεκτρομαγνητικά πεδία, καρδιακοί ρυθμοί, παλίρροιες, κλίμα). Ένα απροσδόκητο όσο και όμορφο θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού έρχεται να μας πληροφορήσει ότι κάθε περιοδική συνάρτηση (μοντέλο περιοδικού φαινομένου) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει ημιτόνων και συνημιτόνων. Συνεπώς, οι παράγωγοι των ημιτόνων και των συνημιτόνων έχουν βαρύνουσα σημασία στην περιγραφή περιοδικών μεταβολών. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πώς παραγωγίζονται οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Παράγωγος ημιτόνου

Για να βρούμε την παράγωγο της $y = \sin x$, συνδυάζουμε τα όρια του Παραδείγματος 10(α) καθώς και το Θεώρημα 6 της Ενότητας 1.2, με την ταυτότητα του αθροίσματος γωνίας:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h. \tag{1}$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} && \text{Ορισμός παραγώγου}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} && \text{Εξ. (1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 && \text{Παράδειγμα 10(α) και Θεώρημα 6, Ενότητα 1.2}\\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Το ακτινιακό μέτρο στον απειροστικό λογισμό

Αν διερωτάστε γιατί στον λογισμό χρησιμοποιούμε το ακτινιακό μέτρο, ενώ ο υπόλοιπος κόσμος φαίνεται να χρησιμοποιεί μοίρες, η απάντηση έγκειται στο ότι η παράγωγος του ημιτόνου είναι το συνημίτονο. Η παράγωγος του $\sin x$ ισούται με $\cos x$ μόνο αν το x μετριέται σε ακτίνια, αφού η σχέση

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

αληθεύει μόνο όταν το h μετριέται σε ακτίνια.

Η παράγωγος της συναρτήσεως ημιτόνου είναι η συνάρτηση συνημιτόνου.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Παράδειγμα 1 Παράγωγοι εκφράσεων που περιέχουν ημίτονο

(α) $y = x^2 - \sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Παράγωγος διαφοράς}\\
&= 2x - \cos x.
\end{aligned}$$

(β) $y = \frac{\sin x}{x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} && \text{Παράγωγος πηλίκου}\\
&= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.
\end{aligned}$$

CD-ROM Δικτυότοπος

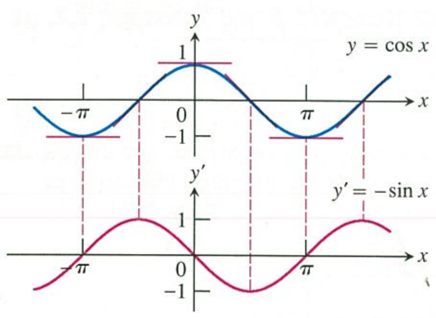
Παράγωγος συνημιτόνου

Βάσει του τύπου αθροίσματος γωνιών,

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h, \tag{2}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} && \text{Ορισμός παραγώγου}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} && \text{Εξ. (2)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 && \text{Παράδειγμα 10(α) και Θεώρημα 6, Ενότητα 1.2}\\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$



Σχημα 2.25 Η καμπύλη $y' = -\sin x$ προέκυψε με τον υπολογισμό των κλίσεων των εφαπτομένων της καμπύλης $y = \cos x$.

Η παράγωγος της συναρτήσεως συνημιτόνου είναι η αντίθετη της συναρτήσεως ημιτόνου.

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Το Σχήμα 2.25 δείχνει πώς μπορούμε να φθάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω γραφικών παραστάσεων.

Παράδειγμα 2 Κανόνες παραγώγισης ξανά

(α) $y = \sin x \cos x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Παράγωγος γινομένου}\\
&= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)\\
&= \cos^2 x - \sin^2 x.
\end{aligned}$$

(β) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1-\sin x)^2} && \text{Παράγωγος πηλίκου}\\
&= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1-\sin x)^2}\\
&= \frac{1 - \sin x}{(1-\sin x)^2} && \sin^2 x + \cos^2 x = 1\\
&= \frac{1}{1 - \sin x}.
\end{aligned}$$

Απλή αρμονική κίνηση

Η κίνηση ενός προσδεδεμένου σε ελατήριο σώματος που ταλαντώνεται ελεύθερα πάνω-κάτω αποτελεί παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε *απλή αρμονική κίνηση*. Το ακόλουθο παράδειγμα αναφέρεται στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να αντιτίθενται στην κίνηση επιβραδύνοντας το σώμα, π.χ. τριβές ή ανώσεις.

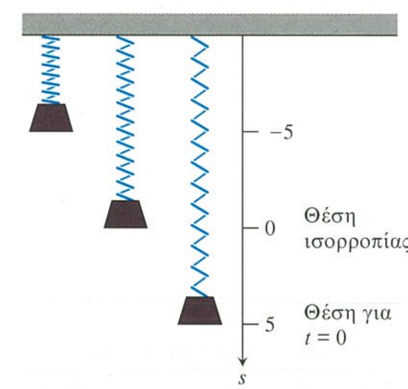
CD-ROM Δικτυότοπος

Παράδειγμα 3 Κίνηση σώματος προσδεδεμένου σε ελατήριο

Ένα σώμα που εξαρτάται από ελατήριο (Σχήμα 2.26) απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κατά 5 μονάδες μήκους και κατόπιν αφήνεται να ταλαντωθεί τη χρονική στιγμή $t = 0$. Σε τυχούσα μεταγενέστερη χρονική στιγμή t, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι

$$s = 5\cos t.$$

Ποια θα είναι τη στιγμή t η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του;



Σχημα 2.26 Το ταλαντούμενο σώμα του Παραδείγματος 3.

Λύση Έχουμε

Θέση: $s = 5\cos t$

Ταχύτητα: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5\cos t) = -5\sin t$

Επιτάχυνση: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5\sin t) = -5\cos t.$

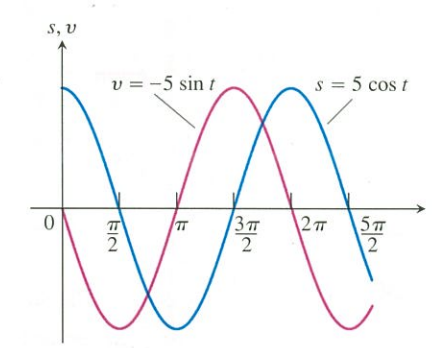
Ας δούμε τι μπορούν να μας πουν οι εξισώσεις αυτές:

1. Καθώς ο χρόνος περνά, το σώμα κινείται πάνω κάτω μεταξύ των ακραίων θέσεων $s = -5$ και $s = 5$ στον άξονα s. Το πλάτος της κίνησης ισούται με 5. Η περίοδος της κίνησης ισούται με 2π.

2. Η ταχύτητα $v = -5\sin t$ αποκτά τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της, 5, όταν $\cos t = 0$, καθώς φαίνεται στο Σχήμα 2.27. Έτσι το μέτρο της ταχύτητας, $|v| = 5|\sin t|$, μεγιστοποιείται όταν $\cos t = 0$, δηλαδή όταν $s = 0$ (το σώμα βρίσκεται τότε στη θέση ισορροπίας). Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\sin t = 0$, δηλαδή όταν $s = 5\cos t = \pm 5$, δηλαδή στα ακραία σημεία της κίνησης.

3. Η τιμή της επιτάχυνσης είναι πάντα ακριβώς αντίθετη από την τιμή της συνάρτησης θέσεως. Όταν το σώμα βρίσκεται ψηλότερα από τη θέση ισορροπίας, η βαρύτητα το τραβά προς τα κάτω· όταν πάλι βρίσκεται χαμηλότερα από τη θέση ισορροπίας, το ελατήριο το τραβά προς τα πάνω.

4. Η επιτάχυνση, $a = -5\cos t$, μηδενίζεται μονάχα στη θέση ισορροπίας, όπου $\cos t = 0$ καθώς η δύναμη βαρύτητας εξουδετερώνεται πλήρως από τη δύναμη του ελατηρίου. Σε κάθε άλλη θέση, οι δύο δυνάμεις έχουν άνισα μέτρα και η επιτάχυνση είναι μη μηδενική. Η επιτάχυνση παίρνει τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της στα ακραία σημεία της κίνησης, όπου $\cos t = \pm 1$.



Σχημα 2.27 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως και ταχύτητας του σώματος του Παραδείγματος 3.

Παράδειγμα 4 Παράγωγος επιτάχυνσης

Η παράγωγος επιτάχυνσης για την απλή αρμονική κίνηση του Παραδείγματος 3 ισούται με

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5\cos t) = 5\sin t\,.$$

Οι μέγιστες (κατά μέτρο) τιμές προκύπτουν όταν $\sin t = \pm 1$, όχι δηλαδή στα ακραία σημεία αλλά στη θέση ισορροπίας, όπου η επιτάχυνση αλλάζει φορά και συνεπώς πρόσημο.

Παράγωγοι των υπόλοιπων βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εφόσον οι $\sin x$ και $\cos x$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x, οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

θα είναι επίσης διαφορίσιμες σε κάθε x στο οποίο ορίζονται. Οι παράγωγοί τους, που μπορούν να υπολογιστούν από τον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου, δίδονται ακολούθως:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \tag{6}$$

Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο στους τύπους παραγώγων της συνεφαπτομένης και της συντέμνουσας.

Για να δείτε πώς γίνονται οι παραπάνω υπολογισμοί, θα αποδείξουμε εδώ την Εξίσωση (3). Οι υπόλοιπες παραγωγίσεις αφήνονται για την Άσκηση 44.

Παράδειγμα 5 Παράγωγος εφαπτομένης

Να βρεθεί η $d(\tan x)/dx$.

Λύση

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} && \text{Παράγωγος πηλίκου}\\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6 Μια δεύτερη παράγωγος τριγωνομετρικής συναρτήσεως

Να βρεθεί η y'' όπου $y = \sec x$.

Λύση

$$\begin{aligned}
y &= \sec x\\
y' &= \sec x \tan x && \text{Εξ. (4)}\\
y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)\\
&= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) && \text{Παράγωγος γινομένου}\\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x)\\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}$$

Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εφόσον οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, θα είναι και συνεχείς, βάσει του Θεωρήματος 1 της Ενότητας 2.1. Έτσι οι $\sin x$ και $\cos x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x, πράγμα που συμφωνεί με τα όσα είπαμε στην Ενότητα 1.4. Επίσης, οι συναρτήσεις $\sec x$ και $\tan x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x διάφορο ενός μη μηδενικού ακέραιου πολλαπλασίου του $\pi/2$, ενώ οι $\csc x$ και $\cot x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x διάφορο ενός ακέραιου πολλαπλασίου του π. Για καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές, λοιπόν, θα είναι $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ εφόσον η $f(c)$ ορίζεται. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε με απευθείας αντικατάσταση τα όρια διάφορων αλγεβρικών συνδυασμών ή και σύνθετων συναρτήσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7 Εύρεση τριγωνομετρικού ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4

Παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 1-12, βρείτε το dy/dx.

1. $y = -10x + 3\cos x$

2. $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$

3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

4. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

5. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

6. $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

7. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

8. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

11. $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

12. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x$

Στις Ασκήσεις 13-16, βρείτε το ds/dt.

13. $s = \tan t - t$

14. $s = t^2 - \sec t + 1$

15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

16. $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

Στις Ασκήσεις 17-20, βρείτε το $dr/d\theta$.

17. $r = 4 - \theta^2 \sin\theta$

18. $r = \theta\sin\theta + \cos\theta$

19. $r = \sec\theta\csc\theta$

20. $r = (1 + \sec\theta)\sin\theta$

Στις Ασκήσεις 21-24, βρείτε το dp/dq.

21. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

22. $p = (1 + \csc q)\cos q$

23. $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

24. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

25. Βρείτε το y'' αν

(α) $y = \csc x$. **(β)** $y = \sec x$.

26. Βρείτε το $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ αν

(α) $y = -2\sin x$. **(β)** $y = 9\cos x$.

Εφαπτομένες

Στις Ασκήσεις 27-30, σχεδιάστε τις καμπύλες και μαζί τις εφαπτομένες τους στα αναφερόμενα διαστήματα και σημεία, αντίστοιχα. Ονομάστε κάθε καμπύλη και την εφαπτομένη της σημειώνοντας στο διάγραμμα την εξίσωσή της.

27. $y = \sin x,\quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi,\ 0,\ 3\pi/2$

28. $y = \tan x,\quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3,\ 0,\ \pi/3$

29. $y = \sec x,\quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3,\ \pi/4$

30. $y = 1 + \cos x,\quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi/3,\ 3\pi/2$

T Έχουν οι γραφικές παραστάσεις των Ασκήσεων 31-34 οριζόντιες εφαπτομένες στο διάστημα $0 \le x \le 2\pi$; Αν ναι, σε ποια σημεία; Αν όχι, γιατί όχι; Σχεδιάστε τις συναρτήσεις με υπολογιστή για να υποστηρίξετε γραφικά τις απαντήσεις σας.

31. $y = x + \sin x$ **32.** $y = 2x + \sin x$

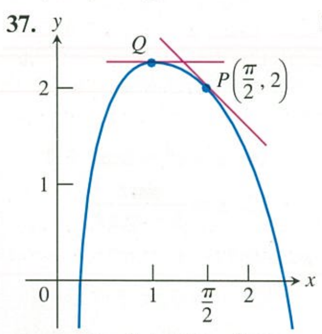
33. $y = x - \cot x$ **34.** $y = x + 2\cos x$

35. Βρείτε όλα τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, για τα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη της ευθείας $y = 2x$. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη και τις εφαπτομένες της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

36. Βρείτε όλα τα σημεία επί της καμπύλης $y = \cot x$, $0 < x < \pi$, για τα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη της ευθείας $y = -x$. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη και τις εφαπτομένες της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

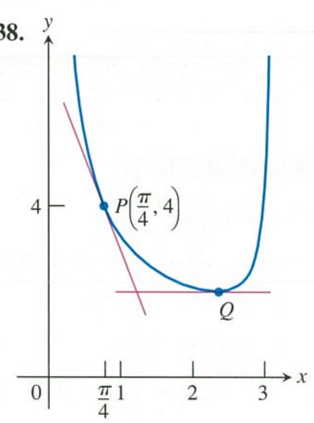
Στις Ασκήσεις 37 και 38, βρείτε μια εξίσωση για **(α)** την εφαπτομένη της καμπύλης στο P και **(β)** την οριζόντια εφαπτομένη στο Q.

37.



$y = 4 + \cot x - 2\csc x$
(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

38.



$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$
(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

Απλή αρμονική κίνηση

CD-ROM Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 39 και 40, οι εξισώσεις που δίδονται περιγράφουν τη θέση $s = f(t)$ σώματος που κινείται ευθύγραμμα (s σε m, t σε sec). Να βρείτε την ταχύτητα (μέτρο και φορά), την επιτάχυνση και την παράγωγο επιτάχυνσης του σώματος τη στιγμή $t = \pi/4$ sec.

39. $s = 2 - 2\sin t$ **40.** $s = \sin t + \cos t$

Θεωρία και παραδείγματα

41. *Μάθετε γράφοντας* Υπάρχει τιμή του c για την οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \ne 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

γίνεται συνεχής στο $x = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. *Μάθετε γράφοντας* Υπάρχει τιμή του b για την οποία η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \ge 0 \end{cases}$$

γίνεται συνεχής στο $x = 0$; Διαφορίσιμη στο $x = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

43. Υπολογίστε το $d^{999}/dx^{999}\,(\cos x)$.

44. Να βρεθεί ένας τύπος για την παράγωγο ως προς x των συναρτήσεων

(α) $\sec x$.

(β) $\csc x$.

(γ) $\cot x$.

T 45. Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = \cos x$ για $-\pi \le x \le 2\pi$. Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

για $h = 1, 0{,}5, 0{,}3$ και $0{,}1$. Κατόπιν, σε νέο σχήμα, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $h = -1, -0{,}5$ και $-0{,}3$. Τι συμβαίνει καθώς $h \to 0^+$; Τι συμβαίνει καθώς $h \to 0^-$; Ποιο φαινόμενο αναδεικνύεται εδώ;

T 46. Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = -\sin x$ για $-\pi \le x \le 2\pi$. Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

για $h = 1, 0{,}5, 0{,}3$ και $0{,}1$. Κατόπιν, σε νέο σχήμα, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $h = -1, -0{,}5$ και $-0{,}3$. Τι συμβαίνει καθώς $h \to 0^+$; Τι συμβαίνει καθώς $h \to 0^-$; Ποιο φαινόμενο αναδεικνύεται εδώ;

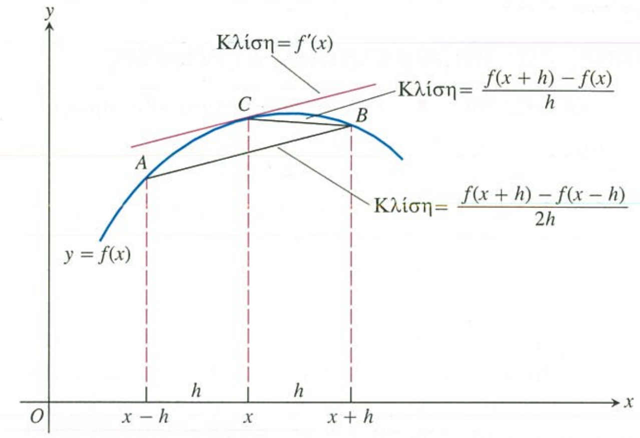
T 47. *Κεντρωμένα πηλίκα διαφορών* Το **κεντρωμένο πηλίκο διαφορών**

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

χρησιμοποιείται συχνά για να προσεγγίσουμε αριθμητικά (με υπολογιστή) την παράγωγο $f'(x)$, κι αυτό γιατί (1) το όριό του καθώς $h \to 0$ ισούται με $f'(x)$ όταν υπάρχει η $f'(x)$, και (2) για δεδομένη τιμή του h συνήθως προσεγγίζει την $f'(x)$ καλύτερα απ' ό,τι το πηλίκο διαφορών κατά Fermat

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Δείτε το επόμενο σχήμα.



(α) Για να δείτε πόσο γρήγορα συγκλίνει το κεντρωμένο πηλίκο της $f(x) = \sin x$ στην παράγωγο $f'(x) = \cos x$, σχεδιάστε την $y = \cos x$ σε κοινό σχήμα με την

$$y = \frac{\sin(x + h) - \sin(x - h)}{2h}$$

στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$ για $h = 1$, $0{,}5$ και $0{,}3$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της Ασκήσεως 45, για τις ίδιες τιμές του h.

(β) Για να δείτε πόσο γρήγορα συγκλίνει το κεντρωμένο πηλίκο της $f(x) = \cos x$ στην παράγωγο $f'(x) = -\sin x$, σχεδιάστε την $y = -\sin x$ σε κοινό σχήμα με την

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$ για $h = 1$, $0{,}5$ και $0{,}3$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της Ασκήσεως 46, για τις ίδιες τιμές του h.

48. *Προσοχή στον χειρισμό κεντρωμένων πηλίκων (Συνέχεια της Ασκήσεως 47)* Το πηλίκο

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

ενδέχεται να έχει όριο καθώς $h \to 0$, ακόμη και όταν η f δεν έχει παράγωγο στο x. Για παράδειγμα, θεωρήστε την $f(x) = |x|$ και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}.$$

Όπως θα δείτε, το όριο υπάρχει παρά το γεγονός ότι η $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$. *Δίδαγμα:* Προτού κάνετε χρήση κεντρωμένων πηλίκων διαφορών, βεβαιωθείτε ότι υπάρχει η παράγωγος.

T 49. *Μάθετε γράφοντας: Κλίση γραφικής παράστασης εφαπτομένης* Σχεδιάστε την $y = \tan x$ και την παράγωγό της, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Δείχνει να παίρνει μια ελάχιστη ή μια μέγιστη τιμή η κλίση της εφαπτομένης; Παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές η κλίση; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

T 50. *Μάθετε γράφοντας: Κλίση γραφικής παράστασης συνεφαπτομένης* Σχεδιάστε την $y = \cot x$ και την παράγωγό της, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $0 < x < \pi$. Δείχνει να παίρνει μια ελάχιστη ή μια μέγιστη τιμή η κλίση της συνεφαπτομένης; Παίρνει ποτέ θετικές τιμές η κλίση; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

T 51. *Μάθετε γράφοντας: Διερεύνηση του $(\sin kx)/x$* Σχεδιάστε τις $y = (\sin x)/x$, $y = (\sin 2x)/x$, και $y = (\sin 4x)/x$, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $-2 \le x \le 2$. Σε ποια σημεία δείχνουν να τέμνουν τον άξονα y οι καμπύλες; Τον τέμνουν πραγματικά; Τι είδους συμπεριφορά των συναρτήσεων $y = (\sin 5x)/x$ και $y = (\sin(-3x))/x$ θα αναμένατε καθώς $x \to 0$; Γιατί; Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη $y = (\sin kx)/x$ για άλλες τιμές του k; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

T 52. *Ακτίνια έναντι μοιρών: παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων με όρισμα σε μοίρες* Τι συμβαίνει με τις παραγώγους των $\sin x$ και $\cos x$ αν το x μετριέται σε μοίρες αντί σε ακτίνια; Για να το μάθετε, ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

(α) Αφού προγραμματίσετε τον υπολογιστή σας να μετρά γωνίες σε μοίρες, ("degree mode") παραστήστε γραφικά την

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

και προβείτε σε μια εκτίμηση του $\lim_{h \to 0} f(h)$. Συγκρίνετε την απάντησή σας με τον αριθμό $\pi/180$. Υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίο το όριο *οφείλει* να ισούται με $\pi/180$;

(β) Με τον υπολογιστή σας πάντα σε μοίρες, υπολογίστε κατ' εκτίμηση το

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

(γ) Επιστρέψτε στην απόδειξη του τύπου της παραγώγου του $\sin x$ στο κείμενο και επαναλάβετε τα στάδια της απόδειξης, με τον υπολογιστή σας σε μοίρες όταν υπολογίζετε όρια. Ποιος τύπος προκύπτει για την παράγωγο;

(δ) Επαναλάβετε την απόδειξη για την παράγωγο του $\cos x$, με τον υπολογιστή σας σε μοίρες όταν υπολογίζετε όρια. Ποιος τύπος προκύπτει τώρα για την παράγωγο;

(ε) Τα μειονεκτήματα των τύπων όπου οι γωνίες είναι σε μοίρες αναδύονται όλο και περισσότερο καθώς αρχίζετε να παίρνετε παραγώγους ανώτερης τάξεως. Δοκιμάστε το. Ποιες είναι οι δεύτερες και τρίτες παράγωγοι των $\sin x$ και $\cos x$ με το x σε μοίρες;

2.5 Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης και παραμετρικές εξισώσεις

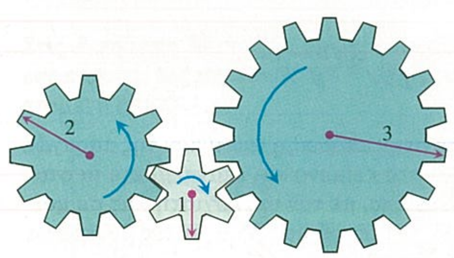
Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης • Παραγώγιση «από έξω προς τα μέσα» • Επανειλημμενη χρήση του κανόνα παραγώγισης • Κλίσεις παραμετρικοποιημένων καμπυλών • Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης δυνάμεων • Κύβοι πάγου που λειώνουν

Όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 3 και 4, πολλές τεχνικές εφαρμογές του απειροστικού λογισμού ενέχουν την εύρεση μιας συναρτήσεως της οποίας γνωρίζουμε την παράγωγο. Μερικές φορές η συνάρτηση αυτή βρίσκεται αμέσως. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι $\cos x$ είναι η παράγωγος του $\sin x$, ότι $2x$ είναι η παράγωγος του x^2, και ότι το άθροισμα $\cos x + 2x$ είναι η παράγωγος του $\sin x + x^2$. Αλλά τι γίνεται όταν μας δίδεται το *γινόμενο* (και όχι το άθροισμα) δύο παραγώγων; Γνωρίζουμε βέβαια ότι η ζητούμενη συνάρτηση δεν είναι το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων, αφού η παράγωγος του γινομένου δεν ισούται με το γινόμενο των παραγώγων.

Από πού προέρχεται λοιπόν το γινόμενο παραγώγων; Η απάντηση έχει να κάνει με έναν κανόνα παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων, που καλείται «κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης». Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε τον κανόνα αυτόν και τις χρήσεις του.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Ξεκινάμε με μερικά παραδείγματα.



C: y στροφές B: u στροφές A: x στροφές

ΣΧΗΜΑ 2.28 Όταν ο οδοντωτός τροχός A πάρει x στροφές, ο τροχός B παίρνει u στροφές και ο τροχός C παίρνει y στροφές. Αν συγκρίνουμε μεταξύ τους τις περιμέτρους ή τα γρανάζια των τροχών, θα δούμε ότι $y = u/2$ και $u = 3x$, οπότε $y = 3x/2$. Συνεπώς, $dy/du = 1/2$, $du/dx = 3$, και $dy/dx = 3/2 = (dy/du)(du/dx)$.

Παράδειγμα 1 Συσχετίζοντας παραγώγους

Η συνάρτηση $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ είναι η σύνθεση των $y = 2u$ και $u = 3x - 5$. Πώς συνδέονται οι παράγωγοι των τριών αυτών συναρτήσεων;

Λύση Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = 6, \qquad \frac{dy}{du} = 2, \qquad \text{και} \qquad \frac{du}{dx} = 3.$$

Εφόσον $6 = 2 \cdot 3$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Είναι άραγε τυχαίο το ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

Αν συλλογιστούμε ότι η παράγωγος δεν είναι παρά ένας ρυθμός μεταβολής, αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά ότι η παραπάνω σχέση είναι τουλάχιστον εύλογη. Αν η $y = f(u)$ μεταβάλλεται δύο φορές γρηγορότερα από την $u = g(x)$, η οποία μεταβάλλεται τρεις φορές γρηγορότερα από την x, τότε αναμένουμε ότι η y θα μεταβάλλεται έξι φορές γρηγορότερα από την x. Το τελικό αποτέλεσμα παραπέμπει σε ένα σύστημα οδοντωτών τροχών (Σχήμα 2.28).

Παράδειγμα 2 Συσχετίζοντας παραγώγους

Η συνάρτηση

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

είναι η σύνθεση των $y = u^2$ και $u = 3x^2 + 1$. Αν υπολογίσουμε τις

παραγώγους, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \qquad u = 3x^2 + 1 \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

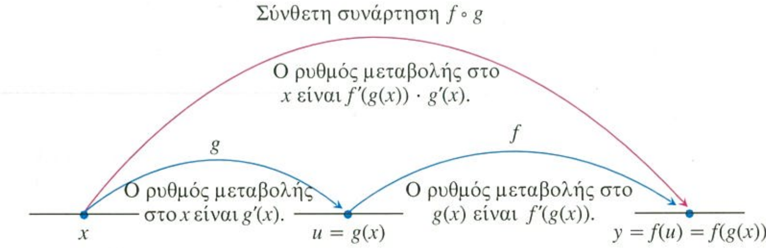
και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) = 36x^3 + 12x.$$

Και πάλι ισχύει ότι

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Η παράγωγος της σύνθετης συναρτήσεως $f(g(x))$ στο x ισούται με την παράγωγο της f στο $g(x)$ επί την παράγωγο της g στο x. Η παρατήρηση αυτή είναι γνωστή ως ο **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (Σχήμα 2.29).



ΣΧΗΜΑ 2.29 Οι ρυθμοί μεταβολής πολλαπλασιάζονται: Η παράγωγος της $f \circ g$ στο x ισούται με την παράγωγο της f στο σημείο $g(x)$ επί την παράγωγο της g στο σημείο x.

Θεώρημα 3 **Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης**

Αν η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $u = g(x)$ και η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ θα είναι διαφορίσιμη στο x, και θα ισχύει ότι

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{1}$$

Σε συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, ισχύει ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \tag{2}$$

όπου η dy/du έχει υπολογιστεί στο σημείο $u = g(x)$.

Μια εύλογη σκέψη είναι να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τον κανόνα αυτόν γράφοντας

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

και παίρνοντας το όριο $\Delta x \to 0$. Η μέθοδος αυτή θα ήταν σωστή αν γνωρίζαμε ότι το Δu, η μεταβολή του u, είναι μη μηδενικό, πράγμα που όμως δεν μπορούμε να εγγυηθούμε. Μια μικρή μεταβολή στο x θα μπορούσε, ενδεχομένως, να μην προκαλέσει καμία μεταβολή στο u. Για την απόδειξη λοιπόν του κανόνα απαιτείται μια άλλη τακτική, και θα κινηθούμε βάσει των εννοιών που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 3.6. (Δείτε το Παράρτημα 3.)

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

Ένα σώμα κινείται επί του άξονα x έτσι ώστε η θέση του για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ να δίδεται από τη σχέση $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Βρείτε την ταχύτητά του συναρτήσει του t.

Λύση Όπως ξέρουμε, η ταχύτητα ισούται με dx/dt. Εδώ x είναι μια σύνθετη συνάρτηση: $x = \cos(u)$ και $u = t^2 + 1$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u) \qquad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t. \qquad u = t^2 + 1$$

Βάσει του κανόνα σύνθετης παραγώγισης,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin(u) \cdot 2t \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1). \end{aligned}$$

Παραγώγιση «από έξω προς τα μέσα»

Ένας χρήσιμος μνημονικός κανόνας για την αλυσιδωτή παραγώγιση είναι ο εξής: Αν $y = f(g(x))$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{3}$$

Αυτό σημαίνει ότι παραγωγίζουμε την «έξω» συνάρτηση f, αφήνοντας τη «μέσα» συνάρτηση $g(x)$ ως έχει και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με την παράγωγο της «μέσα» συναρτήσεως.

Παράδειγμα 4 Παραγώγιση «από έξω προς τα μέσα»

Παραγωγίστε την $\sin(x^2 + x)$ ως προς x.

Λύση

$$\frac{dy}{dx} \sin \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{«μέσα» συνάρτηση}} = \cos \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{ως έχει}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{παράγωγος «μέσα» συνάρτησης}}$$

Επανειλημμένη χρήση του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

Μερικές φορές χρειάζεται να εφαρμόσουμε επανειλημμένα τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης μέχρι να βρούμε την παράγωγο. Ιδού ένα παράδειγμα.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Johann Bernoulli
(1667-1748)

Παράδειγμα 5 Μια «αλυσίδα» τριών κρίκων

Βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$.

Λύση Εδώ η εφαπτομένη (tan) είναι συνάρτηση του $5 - \sin 2t$, ενώ το ημίτονο είναι συνάρτηση του $2t$, που με τη σειρά του είναι συνάρτηση του t. Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) && \text{Παράγωγος της } \tan u \text{ με } u = 5 - \sin 2t \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)\right) && \text{Παράγωγος της } 5 - \sin u \text{ με } u = 2t \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \sin 2t). \end{aligned}$$

Κλίσεις παραμετρικοποιημένων καμπυλών

Μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη $(x(t), y(t))$ είναι **διαφορίσιμη** στο t αν οι x και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t. Αν σε ένα σημείο μιας διαφορίσιμης παραμετρικοποιημένης καμπύλης η μεταβλητή y αποτελεί επιπλέον διαφορίσιμη συνάρτηση του x, οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt, και dy/dx σχετίζονται μέσω του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης:

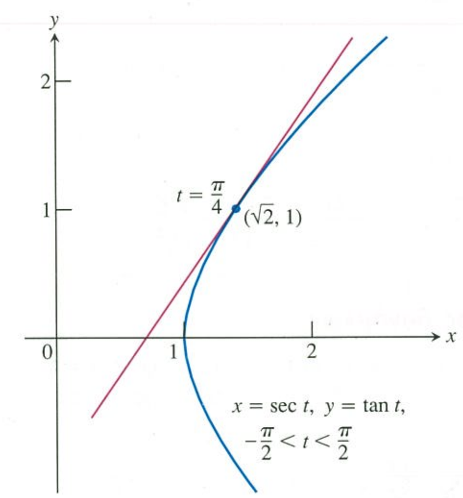
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Αν $dx/dt \neq 0$, μπορούμε διαιρώντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με το dx/dt να λύσουμε ως προς dy/dx.

Παραμετρικός τύπος της dy/dx

Αν και οι τρεις παράγωγοι υπάρχουν και είναι $dx/dt \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{4}$$



Σχημα 2.30 Ο ένας κλάδος της υπερβολής του Παραδείγματος 6. Η Εξίσωση (4) ισχύει για όλα τα σημεία της καμπύλης, πλην του $(1, 0)$.

Παράδειγμα 6 Παραγώγιση παραμετρικοποιημένης καμπύλης

Για τον δεξιό κλάδο της υπερβολής που ορίζεται παραμετρικά ως εξής:

$$x = \sec t, \qquad y = \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

να βρεθεί η εφαπτομένη στο σημείο $(\sqrt{2}, 1)$, όπου $t = \pi/4$ (Σχήμα 2.30).

Λύση Και οι τρεις παράγωγοι που εμφανίζονται στην Εξίσωση (4) υπάρχουν, και $dx/dt = \sec t \tan t \neq 0$ στο εν λόγω σημείο. Κατά συνέπεια ισχύει η Εξίσωση (4), και

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} \\ &= \frac{\sec t}{\tan t} \\ &= \csc t. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = \pi/4$ παίρνουμε

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \csc(\pi/4) = \sqrt{2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}x - 1. \end{aligned}$$

Αν το y ορίζεται παραμετρικά ως μια διπλή διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε εφαρμόζοντας την Εξίσωση (4) επί της συναρτήσεως $dy/dx = y'$ μπορούμε να υπολογίσουμε το d^2y/dx^2 συναρτήσει του t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad \text{Εξ. (4) με το } y' \text{ στη θέση του } y$$

Παραμετρικός τύπος της d^2y/dx^2

Αν οι εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ ορίζουν την y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε σε κάθε σημείο όπου $dx/dt \neq 0$, θα είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

Παράδειγμα 7 Εύρεση του d^2y/dx^2 επί παραμετρικοποιημένης καμπύλης

Βρείτε το d^2y/dx^2 συναρτήσει του t αν $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Εύρεση του d^2y/dx^2 συναρτήσει του t

Βήμα 1. Εκφράζουμε το $y' = dy/dx$ συναρτήσει του t.

Βήμα 2. Βρίσκουμε το dy'/dt.

Βήμα 3. Διαιρούμε το dy'/dt με το dx/dt.

Λύση

Βήμα 1: Εκφράζουμε το $y' = dy/dx$ συναρτήσει του t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Βήμα 2: Παραγωγίζουμε το y' ως προς t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2}. \qquad \text{Παράγωγος πηλίκου}$$

Βήμα 3: Διαιρούμε το dy'/dt με το dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3}$$

Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης δυνάμεων

Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της u η οποία είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε αντικαθιστώντας $y = f(u)$ στον τύπο της αλυσιδωτής παραγώγισης,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

οδηγούμαστε στη σχέση

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

Ιδού ένα παράδειγμα εφαρμογής στην πράξη: Αν ο n είναι ακέραιος και $f(u) = u^n$, τότε οι κανόνες παραγώγισης δυνάμεων (δηλαδή οι κανόνες 2 και 7) συνεπάγονται ότι $f'(u) = nu^{n-1}$. Αν τώρα η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης μπορούμε επεκτείνουμε τα παραπάνω και να πάρουμε τον **κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης δυνάμεων:**

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \frac{d}{du}(u^n) = nu^{n-1} \tag{5}$$

Το $\sin^n x$ αποτελεί συντομογραφία του $(\sin x)^n$, $n \neq -1$.

Παράδειγμα 8 Εύρεση κλίσεως εφαπτομένης

(α) Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = \sin^5 x$ στο σημείο $x = \pi/3$.

(β) Δείξτε ότι κάθε ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης $y = 1/(1-2x)^3$ έχει θετική κλίση.

Λύση

(α)
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5\sin^4 x \cdot \frac{d}{dx}\sin x \qquad \text{Παράγωγος δύναμης με } u = \sin x,\ n = 5 \\ &= 5\sin^4 x \cos x \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη έχει κλίση

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}.$$

(β)
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(1 - 2x)^{-3} \\ &= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}(1 - 2x) \qquad \text{Παράγωγος δύναμης με } u = (1 - 2x),\ n = -3 \\ &= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot (-2) \\ &= \frac{6}{(1 - 2x)^4} \end{aligned}$$

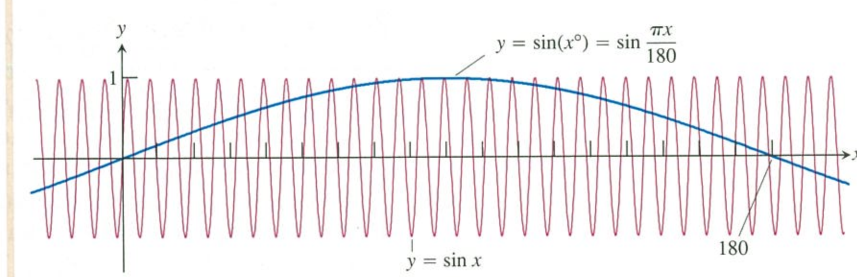
Σε τυχόν σημείο (x, y) επί της καμπύλης, $x \neq 1/2$ και η κλίση της εφαπτομένης ισούται με

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4},$$

δηλαδή με το πηλίκο δύο θετικών αριθμών.

Παράδειγμα 9 Ακτίνια έναντι μοιρών

Έχει σημασία να μην ξεχνούμε ότι οι τύποι των παραγώγων $\sin x$ και $\cos x$ προέκυψαν υπό την παραδοχή ότι το όρισμα x είναι εκπεφρασμένο σε ακτίνια, *όχι* σε μοίρες. Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης διασαφηνίζει ακόμα περαιτέρω τη διαφορά μεταξύ των δύο. Εφόσον $180° = \pi$ ακτίνια, $x° = \pi x/180$ ακτίνια, όπου το σύμβολο $x°$ δηλώνει ότι η γωνία x μετριέται σε μοίρες.



ΣΧΗΜΑ 2.31 Ο όρος $\sin(x°)$ ταλαντώνεται $\pi/180$ φορές λιγότερο απ' όσο ταλαντώνεται ο όρος $\sin x$. Η μέγιστη κλίση του ισούται με $\pi/180$. (Παράδειγμα 9)

Βάσει του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης,

$$\frac{d}{dx}\sin(x^\circ) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x^\circ).$$

Δείτε το Σχήμα 2.31. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η παράγωγος του $\cos(x^\circ)$ θα είναι $-(\pi/180)\sin(x^\circ)$.

Κάθε περαιτέρω παραγώγιση θα «επισυνάπτει» έναν επιπλέον παράγοντα $\pi/180$. Βλέπετε λοιπόν αμέσως για ποιον λόγο επιμείναμε στη χρήση των ακτινίων.

Κύβοι πάγου που λειώνουν

Η Πολιτεία της Καλιφόρνιας αντιμετωπίζει σοβαρό πρόβλημα λειψυδρίας και συνεχώς αναζητά νέους υδάτινους πόρους. Μία από τις προταθείσες λύσεις είναι να ρυμουλκηθούν παγόβουνα από πολικές περιοχές ώς τα ανοιχτά της νότιας Καλιφόρνιας, όπου λειώνοντας σταδικά θα παρέχουν το απαιτούμενο πόσιμο νερό. Ως πρώτη προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό, ας φανταστούμε ότι το παγόβουνο έχει σχήμα κύβου (ή οποιοδήποτε άλλο κανονικό σχήμα, π.χ. ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ή πυραμίδα).

Παράδειγμα 10 Κύβος πάγου που λειώνει

Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να λειώσει ένα κομμάτι πάγου κυβικού σχήματος;

Λύση Ξεκινάμε με ένα μαθηματικό μοντέλο. Υποθέτουμε ότι, καθώς λειώνει, ο κύβος διατηρεί το κυβικό σχήμα του. Αν η ακμή του έχει μήκος s, τότε ο όγκος του θα ισούται με $V = s^3$ και το εμβαδόν της επιφάνειάς του θα είναι $6s^2$. Έστω ότι οι ποσότητες V και s είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t. Έστω ακόμη ότι ο όγκος του κύβου μειώνεται με ρυθμό ανάλογο του εμβαδού της επιφάνειάς του. Η τελευταία αυτή υπόθεση φαίνεται εύλογη, αν αναλογιστούμε ότι η τήξη είναι μια διεργασία που λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια: Αν μεταβάλουμε το εμβαδόν θα μεταβληθεί ανάλογα και το ποσό του πάγου που είναι εκτεθειμένο στον ατμοσφαιρικό αέρα και λειώνει. Αυτό στη γλώσσα των μαθηματικών σημαίνει ότι,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει τη μείωση του όγκου με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής αναλογίας k είναι σταθερός. Βέβαια, στην πραγματικότητα θα πρέπει να εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως τη σχετική υγρασία του περιβάλλοντος αέρα, τη θερμοκρασία του ατμοσφαιρικού αέρα, την παρουσία ηλιοφάνειας ή όχι, κ.ά.

Τέλος, χρειαζόμαστε τουλάχιστον μία ακόμη πληροφορία: Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για την τήξη μιας δεδομένης ποσότητας του πάγου; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα χρειαστεί κανονικά να κάνουμε μια πειραματική παρατήρηση, αλλά ας υποθέσουμε εδώ ότι ο κύβος έχασε το 1/4 του όγκου του κατά την πρώτη ώρα. (Μπορείτε βέβαια να χρησιμοποιήσετε γενικά σύμβολα αντί συγκεκριμένων αριθμών, λέγοντας π.χ. ότι έλειωσε το n% του κυβικού όγκου σε r ώρες. Έτσι η τελική σας απάντηση θα είναι μια συνάρτηση των n και r.) Από μαθηματική, λοιπόν, σκοπιά έχουμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα.

Δίδονται: $V = s^3$ και $\frac{dV}{dt} = -k(6s^2)$

$V = V_0$ όταν $t = 0$

$V = (3/4)V_0$ όταν $t = 1$ h.

Ζητούνται: Η τιμή του t όταν $V = 0$.

Παραγωγίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση $V = s^3$ ως προς t:

$$\frac{dV}{dt} = 3s^2\frac{ds}{dt}.$$

Εξισώνουμε την παράγωγο αυτή με τον δοσμένο ρυθμό μεταβολής, $-k(6s^2)$, και παίρνουμε

$$3s^2\frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k.$$

Το μήκος λοιπόν της ακμής *μειώνεται* με σταθερό ρυθμό $2k$ μονάδων ανά ώρα. Έτσι, αν το αρχικό μήκος της ακμής είναι s_0, σε μία ώρα θα έχει γίνει $s_1 = s_0 - 2k$. Είναι δηλαδή

$$2k = s_0 - s_1.$$

Ο χρόνος τήξεως είναι η τιμή του χρόνου t για την οποία $2kt = s_0$. Συνεπώς,

$$t_{\text{τήξεως}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1-(s_1/s_0)},$$

ενώ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}V_0\right)^{1/3}}{(V_0)^{1/3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \approx 0{,}91.$$

Έτσι,

$$t_{\text{τήξεως}} = \frac{1}{1-0{,}91} \approx 11 \text{ h}.$$

Δηλαδή αν το 1/4 του κύβου λειώνει σε 1 h, θα απαιτηθούν 10 h επιπλέον μέχρι να λειώσει και το υπόλοιπο.

Βέβαια τα καίρια ερωτήματα που θα κληθούμε τελικά να απαντήσουμε για τη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι τι ποσοστό του παγόβουνου θα χαθεί κατά τη μεταφορά, και πόσος χρόνος απαιτείται για να μετατρέψουμε τον πάγο σε εκμεταλλεύσιμο νερό; Αν θέλαμε να διερευνήσουμε το ζήτημα περαιτέρω, το επόμενο βήμα μας θα ήταν να ελέγξουμε πειραματικά το μοντέλο· κατόπιν, βάσει των πειραματικών μετρήσεων, θα πρέπει να επανέλθουμε και να βελτιώσουμε το μοντέλο με σκοπό να το κάνουμε ρεαλιστικότερο, προκειμένου να είμαστε σε θέση να εμπιστευθούμε τις προβλέψεις του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.5

Υπολογισμοί παραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-6, δίδονται οι συναρτήσεις $y = f(u)$ και $u = g(x)$, και ζητείται η $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$ **2.** $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

3. $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$ **4.** $y = \cos u, \quad u = \sin x$

5. $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$ **6.** $y = -\sec u, u=x^2+7x$

Στις Ασκήσεις 7-12, να γραφεί η συνάρτηση στη μορφή $y = f(u)$ και $u = g(x)$. Κατόπιν να εκφραστεί η παράγωγος dy/dx ως συνάρτηση του x.

7. $y = (4 - 3x)^9$ **8.** $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

9. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$ **10.** $y = \sec(\tan x)$

11. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$ **12.** $y = \sin^3 x$

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 13-26.

13. $q = \sqrt{2r - r^2}$

14. $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

15. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$ **16.** $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$

17. $y = x^2 \sin^4 x + x\cos^{-2} x$ **18.** $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

19. $y = \frac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

20. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$

21. $h(x) = x\tan(2\sqrt{x}) + 7$ **22.** $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

23. $f(\theta) = \left(\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$ **24.** $r = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$

25. $r = \sec\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$ **26.** $q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$

Στις Ασκήσεις 27-32, υπολογίστε την παράγωγο dy/dt.

27. $y = \sin^2(\pi t - 2)$ **28.** $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$

29. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$ **30.** $y = \sin(\cos(2t - 5))$

31. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$

32. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$

Εφαπτομένες παραμετρικοποιημένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 33-40, γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που ορίζει το εκάστοτε t. Στο ίδιο σημείο να υπολογιστεί η τιμή της d^2y/dx^2.

33. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \pi/4$

34. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$

35. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$

36. $x = -\sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

37. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

38. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$

39. $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \pi/2$

40. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$

Δεύτερες παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 41-44, να βρεθεί η y''.

41. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$ **42.** $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$

43. $y = \frac{1}{9}\cot(3x - 1)$ **44.** $y = 9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

Εύρεση αριθμητικών τιμών παραγώγων

Στις Ασκήσεις 45-50, να βρεθεί η τιμή της $(f \circ g)'$ για την εκάστοτε τιμή του x.

45. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

46. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x = -1$

47. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

48. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$

49. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

50. $f(u) = \left(\frac{u - 1}{u + 1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

51. Στον πίνακα που ακολουθεί δίδονται οι τιμές των συναρτήσεων f και g και των παραγώγων τους ως προς x για $x = 2$ και $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Να βρεθούν οι τιμές των παραγώγων ως προς x των ακόλουθων συναρτήσεων, για τα x που δίδονται.

(α) $2f(x), \quad x = 2$ **(β)** $f(x) + g(x), \quad x = 3$

(γ) $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$ **(δ)** $f(x)/g(x), \quad x = 2$

(ε) $f(g(x)), \quad x = 2$ **(στ)** $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

(ζ) $1/g^2(x), \quad x = 3$ **(η)** $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

52. Στον πίνακα που ακολουθεί δίδονται οι τιμές των συναρτήσεων f και g και των παραγώγων τους ως προς x για $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Να βρεθούν οι τιμές των παραγώγων ως προς x των ακόλουθων συναρτήσεων, για τα x που δίδονται.

(α) $5f(x) - g(x), \quad x = 1$ **(β)** $f(x)g^3(x), \quad x = 0$

(γ) $\frac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$ **(δ)** $f(g(x)), \quad x = 0$

(ε) $g(f(x)), \quad x = 0$ **(στ)** $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

(ζ) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

53. Να βρεθεί η τιμή της παραγώγου ds/dt για $\theta = 3\pi/2$, αν $s = \cos\theta$ και $d\theta/dt = 5$.

54. Να βρεθεί η τιμή της παραγώγου dy/dt για $x = 1$, αν $y = x^2 + 7x - 5$ και $dx/dt = 1/3$.

Διαφορετικές γραφές σύνθετης συνάρτησης

Τι συμβαίνει όταν μια σύνθετη συνάρτηση μπορεί να γραφεί με περισσότερους από έναν τρόπους; Η παράγωγος της συναρτήσεως παραμένει η ίδια κάθε φορά; Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης μας λέει πως ναι. Διαπιστώστε αν έτσι έχουν τα πράγματα στις Ασκήσεις 55 και 56.

55. Να βρεθεί η παράγωγος dy/dx αν $y = x$. Εφαρμόστε τον κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης γράφοντας το y ως μια σύνθετη συνάρτηση των

(α) $y = (u/5) + 7$ και $u = 5x - 35$

(β) $y = 1 + (1/u)$ και $u = 1/(x - 1)$.

56. Να βρεθεί η παράγωγος dy/dx, αν $y = x^{3/2}$. Εφαρμόστε τον κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης, γράφοντας το y ως μια σύνθετη συνάρτηση των

(α) $y = u^3$ και $u = \sqrt{x}$ **(β)** $y = \sqrt{u}$ και $u = x^3$.

Εφαπτομένες και κλίσεις

57. **(α)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης $y = 2\tan(\pi x/4)$ στο $x = 1$.

(β) *Μάθετε γράφοντας: Κλίσεις της καμπύλης εφαπτομένης* Ποια η ελάχιστη τιμή της κλίσεως της καμπύλης στο διάστημα $-2 < x < 2$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

58. *Μάθετε γράφοντας: Κλίσεις της καμπύλης ημιτόνου*

(α) Να γραφούν εξισώσεις των εφαπτομένων των καμπυλών $y = \sin 2x$ και $y = -\sin(x/2)$ στην αρχή των αξόνων. Υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των εφαπτομένων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των εφαπτομένων των καμπυλών $y = \sin mx$ και $y = -\sin(x/m)$ στην αρχή των αξόνων (m είναι μια σταθερά $\neq 0$); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Για δεδομένο m, ποιες οι μέγιστες τιμές των κλίσεων των καμπυλών $y = \sin mx$ και $y = -\sin(x/m)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δ) Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η συνάρτηση $y = \sin x$ συμπληρώνει μία περίοδο, η $y = \sin 2x$ συμπληρώνει δύο περιόδους, η $y = \sin(x/2)$ συμπληρώνει μισή περίοδο, κ.ο.κ. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του αριθμού των περιόδων της $y = \sin mx$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και της κλίσεως της καμπύλης $y = \sin mx$ στην αρχή των αξόνων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θεωρία, παραδείγματα, και εφαρμογές

59. *Αύξηση στροφών κινητήρα* Υποθέστε ότι ένα έμβολο που κινείται πάνω-κάτω βρίσκεται τη χρονική στιγμή t sec στη θέση

$$s = A\cos(2\pi bt),$$

όπου A και b θετικοί αριθμοί. A είναι το πλάτος της κίνησης, και b είναι η συχνότητα (πόσες φορές κινείται πάνω-κάτω το έμβολο ανά δευτερόλεπτο). Πώς θα μεταβληθούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η παράγωγος επιτάχυνσης του εμβόλου αν διπλασιάσουμε τη συχνότητά του; (Λύνοντας το πρόβλημα αυτό θα καταλάβετε γιατί ο κινητήρας του αυτοκινήτου κινδυνεύει από θραύση αν τρέχετε πολύ γρήγορα.) Δείτε το Σχήμα 2.32.

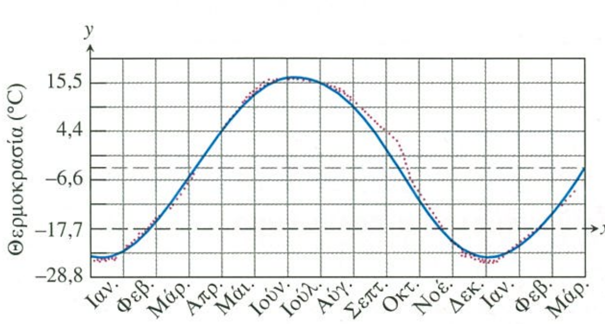
Σχημα 2.32 Για υπερβολικά μεγάλες ταχύτητες, οι εσωτερικές δυνάμεις στον κινητήρα αυξάνονται τόσο πολύ, ώστε είναι ικανές να τον διατρήσουν.

60. *Θερμοκρασίες στο Fairbanks της Αλάσκας* Στο Σχήμα 2.33 φαίνεται η μέση θερμοκρασία (στην κλίμακα Κελσίου) στην πόλη Fairbanks της Αλάσκας, κατά τη διάρκεια ενός τυπικού (δηλ. αντιπροσωπευτικού) έτους 365 ημερών. Η εξίσωση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία μιας τυχούσας ημέρας x είναι

$$y = 20{,}5\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3{,}8.$$

(α) Ποια ημέρα παρουσιάζεται η μέγιστη αύξηση της θερμοκρασίας;

(β) Κατά την περίοδο μέγιστης αύξησης της θερμοκρασίας, πόσους βαθμούς την ημέρα αυξάνεται η θερμοκρασία;



Σχημα 2.33 Οι μετρήσεις της μέσης θερμοκρασίας αέρα στην πόλη Fairbanks της Αλάσκας, φαίνονται ως κόκκινα σημεία στο διάγραμμα, ενώ με μπλε έχει σχεδιαστεί η προσεγγιστική ημιτονοειδής συνάρτηση. (Άσκηση 60)

61. *Κίνηση σωματιδίου* Η θέση ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα δίδεται από την εξίσωση $s = \sqrt{1+4t}$, όπου s είναι σε m και t σε sec. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου για $t = 6$ sec.

62. *Σταθερή επιτάχυνση* Έστω ότι η ταχύτητα σώματος που πέφτει ελεύθερα είναι $v = k\sqrt{s}$ m/sec (k μια σταθερά) τη στιγμή που το σώμα έχει πέσει s m από το σημείο από το οποίο αφέθηκε. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή.

63. *Μετεωρίτης που πέφτει* Η ταχύτητα ενός μεγάλου μετεωρίτη που εισέρχεται στη γήινη ατμόσφαιρα είναι αντιστρόφως ανάλογη του $\sqrt{s}$ όταν αυτός απέχει s km από το κέντρο της Γης. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του μετεωρίτη είναι αντιστρόφως ανάλογη του s^2.

64. *Επιτάχυνση σωματιδίου* Σωματίδιο κινείται επί του άξονα x με ταχύτητα $dx/dt = f(x)$. Δείξτε ότι η επιτάχυνσή του είναι $f(x)f'(x)$.

65. *Περίοδος εκκρεμούς και θερμοκρασία* Για μικρού πλάτους ταλαντώσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τη σχέση που συνδέει την περίοδο T με το μήκος L απλού εκκρεμούς. Το μοντέλο αυτό είναι η εξίσωση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

όπου g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο όπου βρίσκεται το εκκρεμές. Αν το g εκφράζεται σε cm ανά sec^2, τότε το L εκφράζεται σε cm και το T σε sec. Αν το εκκρεμές είναι μεταλλικό, το μήκος του θα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία και συγκεκριμένα θα αυξάνεται ή θα μειώνεται με ρυθμό που είναι περίπου ανάλογος του L. Αν u είναι η θερμοκρασία και k η σταθερά της εν λόγω αναλογίας, τότε θα ισχύει

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Αν έτσι έχουν τα πράγματα, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου ως προς τη θερμοκρασία ισούται με $kT/2$.

66. *Μάθετε γράφοντας: Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης* Έστω ότι $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$. Οι σύνθετες συναρτήσεις

$$(f\circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{και} \quad (g\circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

είναι αμφότερες διαφορίσιμες στο $x = 0$ παρά το ότι η ίδια η g δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$. Αντιβαίνει αυτό τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης; Εξηγήστε.

67. *Μάθετε γράφοντας: Εφαπτομένες* Έστω ότι η $u = g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = 1$ και η $y = f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο $u = g(1)$. Αν γνωρίζουμε ότι το γράφημα της $y = f(g(x))$ διαθέτει μια οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 1$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την εφαπτομένη του γραφήματος της g στο $x = 1$ ή για την εφαπτομένη του γραφήματος της f στο $u = g(1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

68. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η $u = g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = -5$, η $y = f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο $u = g(-5)$, ενώ η $(f\circ g)'(-5)$ είναι αρνητική. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις τιμές των $g'(-5)$ και $f'(g(-5))$;

T **69.** *Η παράγωγος του sin 2x* Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = 2\cos 2x$ για $-2 \le x \le 3{,}5$. Κατόπιν σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την

$$y = \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

για $h = 1{,}0$, $0{,}5$ και $0{,}2$. Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του h, συμπεριλαμβάνοντας και αρνητικές τιμές στις δοκιμές σας. Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει καθώς $h \to 0$; Εξηγήστε τη συμπεριφορά αυτή.

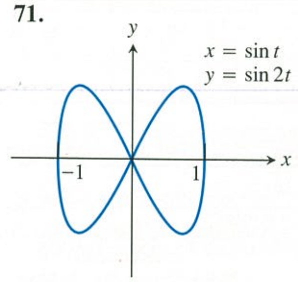
T **70.** *Η παράγωγος του cos (x^2)* Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = -2x\sin(x^2)$ για $-2 \le x \le 3$. Κατόπιν, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

για $h = 1{,}0$, $0{,}7$ και $0{,}3$. Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του h. Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει καθώς $h \to 0$; Εξηγήστε τη συμπεριφορά αυτή.

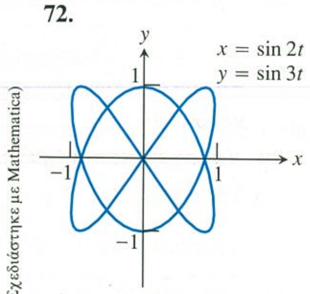
T Οι καμπύλες που εμφανίζονται στις Ασκήσεις 71 και 72 καλούνται *καμπύλες Bowditch* ή *σχήματα Lissajous*. Για καθεμία από αυτές να βρεθεί το σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης είναι οριζόντια. Επίσης, να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο εφαπτομένων στην αρχή των αξόνων.

71.



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

72.



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

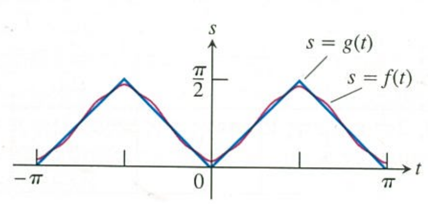
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

73. Όπως δείχνει το Σχήμα 2.34, το τριγωνομετρικό «πολυώνυμο»

$$s = f(t) = 0{,}78540 - 0{,}63662\cos 2t - 0{,}07074\cos 6t - 0{,}02546\cos 10t - 0{,}01299\cos 14t$$

αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της πριονωτής συναρτήσεως $s = g(t)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Πόσο καλά προσεγγίζει η παράγωγος της f την παράγωγο της g στα σημεία όπου ορίζεται η dg/dt; Για να το μάθετε, εκτελέστε τα παρακάτω βήματα.



Σχημα 2.34 Προσεγγίζοντας μια πριονωτή συνάρτηση με ένα τριγωνομετρικό «πολυώνυμο». (Άσκηση 73)

(α) Σχεδιάστε την dg/dt (όπου αυτή ορίζεται) στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

(β) Βρείτε την df/dt.

(γ) Σχεδιάστε την df/dt. Σε ποια σημεία δείχνει να αποδίδει καλύτερα η προσέγγιση της dg/dt από την df/dt; Σε ποια σημεία αποδίδει χειρότερα; Τέτοιου είδους προσεγγίσεις μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουν εφαρμογές στη θεωρία της θερμότητας και των ταλαντώσεων – αν και δεν θα πρέπει να έχουμε παράλογες προσδοκίες από αυτές, όπως θα δούμε στην επόμενη άσκηση.

74. *(Συνέχεια της Ασκήσεως 73)* Στην Άσκηση 73, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $f(t)$ που χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγιστεί η πριονωτή συνάρτηση $g(t)$ στο $[-\pi, \pi]$ είχε παράγωγο που προσέγγιζε την παράγωγο της πριονωτής συναρτήσεως. Ωστόσο, είναι δυνατόν ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο να προσεγγίζει ικανοποιητικά μια συνάρτηση χωρίς ταυτόχρονα η παράγωγός του να προσεγγίζει την παράγωγο της προσεγγισθείσας συναρτήσεως. Για παράδειγμα, το «πολυώνυμο»

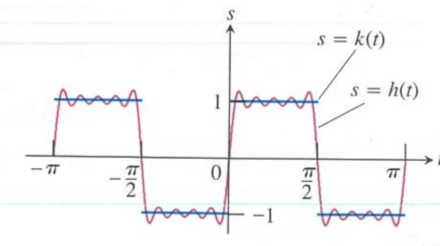
$$s = h(t) = 1{,}2732\sin 2t + 0{,}4244\sin 6t + 0{,}25465\sin 10t + 0{,}18189\sin 14t + 0{,}14147\sin 18t$$

που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.35 προσεγγίζει την κλιμακωτή συνάρτηση $s = k(t)$ που επίσης φαίνεται. Ωστόσο η παράγωγος της συναρτήσεως h δεν έχει καμία σχέση με την παράγωγο της k.

(α) Σχεδιάστε την dk/dt (όπου αυτή ορίζεται) στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

(β) Βρείτε την dh/dt.

(γ) Σχεδιάστε την dh/dt για να διαπιστώσετε πόσο λίγο ταιριάζει το γράφημα αυτό με το γράφημα της dk/dt. Σχολιάστε αυτό που βλέπετε.



Σχημα 2.35 Προσεγγίζοντας μια κλιμακωτή συνάρτηση με ένα τριγωνομετρικό «πολυώνυμο». (Άσκηση 74)

Παραμετρικοποιημένες καμπύλες

Χρησιμοποιώντας υπολογιστή, εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα για κάθε παραμετρικοποιημένη καμπύλη των Ασκήσεων 75-80.

(α) Σχεδιάστε την καμπύλη για το διάστημα τιμών t που δίδεται.

(β) Βρείτε τις dy/dx και d^2y/dx^2 στο σημείο t_0.

(γ) Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο t_0. Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα την καμπύλη και την εφαπτομένη της.

75. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = 1/2$

76. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = 3/2$

77. $x = e^t - t^2, \quad y = t + e^{-t}, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

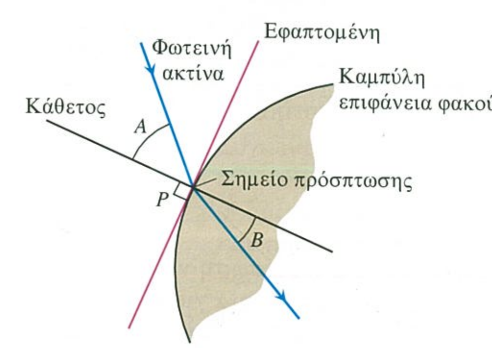
78. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/4$

79. $x = e^t + \sin 2t, \quad y = e^t + \cos(t^2), \quad -\sqrt{2\pi} \le t \le \pi/4, \quad t_0 = -\pi/4$

80. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/2$

2.6 Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Πεπλεγμένες συναρτήσεις • Παράγωγοι υψηλότερης τάξεως • Ρητές δυνάμεις διαφορίσιμων συναρτήσεων



Σχημα 2.36 Πλάγια όψη φακού, όπου φαίνεται η αλλαγή της διεύθυνσης διάδοσης (διάθλαση) μιας φωτεινής ακτίνας καθώς αυτή διασχίζει την επιφάνεια του φακού.

Στον νόμο που περιγράφει πώς αλλάζει διεύθυνση το φως καθώς εισέρχεται σε φακό, οι γωνίες που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με την κάθετο στην επιφάνεια του φακού στο σημείο προσπτώσεως (οι γωνίες A και B του Σχήματος 2.36). Στην κατατομή (πλάγια όψη) του Σχήματος 2.36, η κάθετος στην επιφάνεια είναι η κάθετος στην εφαπτομένη της καμπύλης του φακού στο σημείο πρόσπτωσης.

Οι καμπύλες που περιγράφουν την κατατομή των φακών παριστάνονται συχνά από εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$. Για την εύρεση της καθέτου σε σημείο της καμπύλης, θα πρέπει πρώτα να βρούμε την κλίση της εκεί εφαπτομένης dy/dx. Αλλά τι γίνεται αν δεν μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση στην επιθυμητή μορφή $y = f(x)$, ώστε να παραγωγίσουμε; Στην περίπτωση αυτή ενδέχεται να μπορούμε ακόμη να βρούμε την dy/dx μέσω μιας διαδικασίας που καλείται *παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως*. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε την

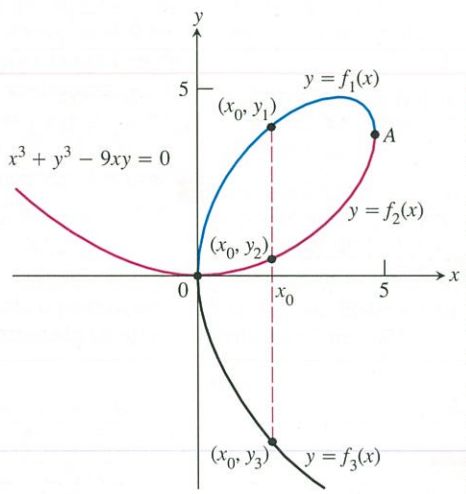
Πότε είναι διαφορίσιμες οι συναρτήσεις που ορίζονται μέσω της $F(x, y) = 0$;

Για να νομιμοποιηθεί η παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως, θα πρέπει να ξέρουμε ότι οι παράγωγοι που ζητούμε όντως υπάρχουν. Με άλλα λόγια, χρειάζεται να γνωρίζουμε πότε είναι διαφορίσιμες οι συναρτήσεις που ορίζονται από τη σχέση $F(x, y) = 0$. Υπάρχει ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού που εγγυάται τη διαφορισιμότητα, αν πληρούνται ορισμένες συνθήκες από τη συνάρτηση F. Όλες οι συναρτήσεις που θα συναντήσουμε στην παρούσα ενότητα πληρούν τις συνθήκες αυτές.

τεχνική αυτή και θα την εφαρμόσουμε, ώστε να επεκτείνουμε τον κανόνα παραγώγισης δυνάμεων σε περιπτώσεις ρητών εκθετών.

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ (Σχήμα 2.37) έχει καλώς ορισμένη κλίση σχεδόν σε κάθε της σημείο, αφού είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, και $y = f_3(x)$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες παντού πλην της αρχής και του σημείου A. Αλλά πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση όταν δεν μπορούμε (όχι χωρίς κόπο, τουλάχιστον) να λύσουμε την εξίσωση και να βρούμε τις εκφράσεις των επιμέρους συναρτήσεων; Η απάντηση είναι να θεωρήσουμε το y ως μια διαφορίσιμη συνάρτηση του x και να παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξισώσεως ως προς x, εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, πηλίκου, γινομένου, καθώς και τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Κατόπιν να λύσουμε ως προς dy/dx συναρτήσει των x και y *μαζί* εξάγοντας έτσι έναν τύπο για την κλίση στο σημείο (x, y) του γραφήματος συναρτήσει των εκεί τιμών x και y. Η διαδικασία αυτή εύρεσης της dy/dx καλείται **παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως**, διότι η εξίσωση $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ορίζει τις συναρτήσεις f_1, f_2, και f_3 *κατά τρόπο πεπλεγμένο*, χωρίς να μας δίδονται *άμεσες, αναλυτικές* εκφράσεις για καθεμία από αυτές. [Σ.τ.Μ. Οι συναρτήσεις που ορίζονται μέσω της κοινής εξίσωσης, έχουν την εύγλωττη ονομασία *πεπλεγμένες*.]



Σχημα 2.37 Η καμπύλη $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ δεν αποτελεί τη γραφική παράσταση συνάρτησης του x. Ωστόσο, μπορούμε να χωρίσουμε την καμπύλη σε διαφορετικά τόξα (μέρη) τα οποία *είναι* γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x. Η συγκεκριμένη καμπύλη, που καλείται *φύλλο (folium) του Καρτέσιου*, χρονολογείται από το 1638.

Παράδειγμα 1 Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

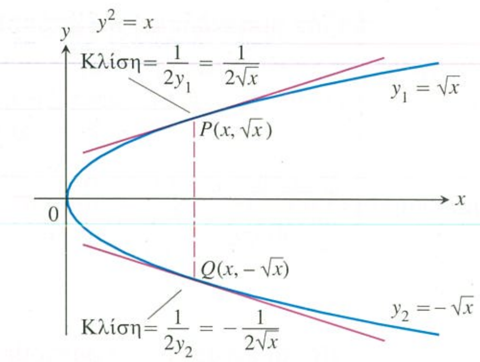
Βρείτε την dy/dx αν $y^2 = x$.

Λύση Η εξίσωση $y^2 = x$ ορίζει δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις του x που βρίσκονται εύκολα: Πρόκειται για τις $y_1 = \sqrt{x}$ και $y_2 = -\sqrt{x}$ (Σχήμα 2.38). Για $x > 0$, οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών είναι:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Αλλά ας υποθέσουμε ότι γνωρίζαμε μόνον ότι η εξίσωση $y^2 = x$ ορίζει μία ή περισσότερες διαφορίσιμες συναρτήσεις του x για $x > 0$ τις οποίες δεν μπορούσαμε να απομονώσουμε. Μπορούμε και τώρα να βρούμε την dy/dx;

Η απάντηση είναι καταφατική. Για να βρούμε την dy/dx, παραγωγίζουμε απλώς κάθε μέλος της εξίσωσης $y^2 = x$ ως προς x, θεωρώντας ότι η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x:



Σχημα 2.38 Η εξίσωση $y^2 - x = 0$, ή $y^2 = x$, όπως συνηθέστερα λέμε, ορίζει δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις του x στο διάστημα $x \geq 0$. Το Παράδειγμα 1 δείχνει πώς να βρούμε τις παραγώγους των συναρτήσεων αυτών χωρίς να λύσουμε την εξίσωση $y^2 = x$ ως προς y.

$$y^2 = x \qquad \text{Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης δίδει}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Ο τελευταίος τύπος μας δίδει την παράγωγο *και των δύο* αναλυτικών λύσεων που βρήκαμε πιο πάνω, δηλαδή των $y_1 = \sqrt{x}$ και $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων άλλων πεπλεγμένων συναρτήσεων, εργαζόμαστε όπως στο Παράδειγμα 1. Θεωρούμε δηλαδή ότι το y είναι μια διαφορίσιμη πεπλεγμένη συνάρτηση του x και παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ορισμού βάσει των γνωστών κανόνων παραγώγισης.

Τα τέσσερα βήματα της παραγώγισης πεπλεγμένης συναρτήσεως

Βήμα 1. Παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x, θεωρώντας τη μεταβλητή y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x.

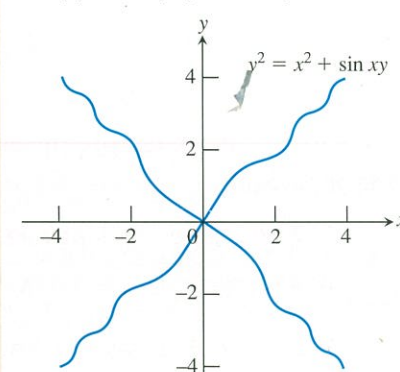
Βήμα 2. Συγκεντρώνουμε στο ένα μέλος όλους τους όρους που περιέχουν την παράγωγο dy/dx.

Βήμα 3. Βγάζουμε κοινό παράγοντα την παράγωγο dy/dx.

Βήμα 4. Λύνουμε ως προς dy/dx.

Παράδειγμα 2 Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Να βρεθεί η dy/dx αν $y^2 = x^2 + \sin xy$ (Σχήμα 2.39).



Σχημα 2.39 Γραφική παράσταση της $y^2 = x^2 + \sin xy$ του Παραδείγματος 2. Στο παράδειγμα επεξηγείται η εύρεση κλίσεων πεπλεγμένων καμπυλών.

Λύση

$$y^2 = x^2 + \sin xy \qquad \text{Παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς } x \ldots$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \qquad \ldots \text{θεωρώντας την } y \text{ ως συνάρτηση του } x \text{ και εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης..}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \qquad \text{Συγκεντρώνουμε τους όρους που περιέχουν την παράγωγο } dy/dx \ldots$$

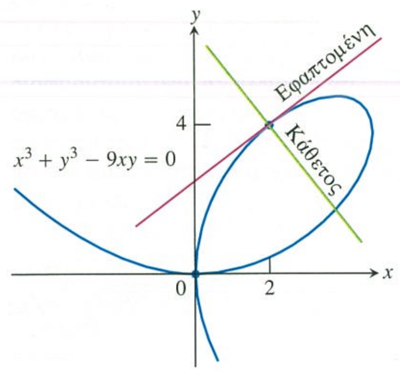
$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$ ... βγάζοντας κοινό παράγοντα το dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$ Λύνουμε ως προς dy/dx.

Σημειώστε ότι ο τύπος της dy/dx ισχύει για κάθε σημείο όπου η πεπλεγμένη συνάρτηση διαθέτει κλίση. Επίσης ότι η παράγωγος περιέχει τόσο τη μεταβλητή x όσο και την y, και όχι μονάχα τη x.

Παράδειγμα 3 Εφαπτομένη και κάθετος στο φύλλο του Καρτέσιου

Δείξτε ότι το σημείο (2, 4) κείται επί της καμπύλης $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Κατόπιν βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη, στο σημείο αυτό (Σχήμα 2.40).



Σχημα 2.40 Στο Παράδειγμα 3 επεξηγείται η εύρεση εξισώσεων της εφαπτομένης και της καθέτου στην καμπύλη στο σημείο (2, 4).

Λύση Το σημείο (2, 4) ανήκει στην καμπύλη διότι οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Για να βρούμε την κλίση της καμπύλης στο (2, 4), παραγωγίζουμε πρώτα έμμεσα για να βρούμε την dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$ Παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς x.

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$ Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο xy θεωρώντας την y ως συνάρτηση του x.

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$ Συγκεντρώνουμε ομοειδείς όρους.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$ Λύνουμε ως προς dy/dx.

Κατόπιν υπολογίζουμε την παράγωγο στο σημείο $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (2, 4) είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (2, 4) με κλίση 4/5:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Η κάθετος στην καμπύλη στο σημείο (2, 4) είναι η κάθετος στην εφαπτομένη, δηλαδή η ευθεία που διέρχεται από το (2, 4) με κλίση $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξεως

Η παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση παραγώγων υψηλότερης τάξεως. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4 Εύρεση δεύτερης παραγώγου με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Βρείτε την d^2y/dx^2 αν $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Λύση Κατ' αρχάς, παραγωγίζουμε κατά τα γνωστά κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x προκειμένου να βρούμε την $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \quad \text{για } y \neq 0$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου για να βρούμε την y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την $y' = x^2/y$ ώστε να πάρουμε μια έκφραση για την y'' συναρτήσει των x και y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \quad \text{για } y \neq 0.$$

Ρητές δυνάμεις διαφορίσιμων συναρτήσεων

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε ότι ο κανόνας

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ισχύει για n ακέραιο. Με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι ο κανόνας ισχύει και για τυχόντα ρητό αριθμό n.

Θεώρημα 4 **Παράγωγος ρητής δύναμης**

Αν n είναι ρητός αριθμός, τότε η x^n είναι διαφορίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x^{n-1}, και ισχύει ότι

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

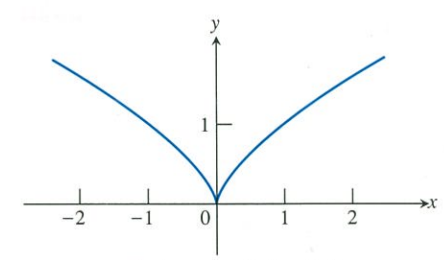
Παράδειγμα 5 Χρησιμοποιώντας τον τύπο παραγώγου ρητής δύναμης

(α) $$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}$ ορίζεται στο $x = 0$, ενώ η $1/(2\sqrt{x})$ όχι.

(β) $$\frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}(x^{-1/3}) = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

Η αρχική συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, αλλά η παράγωγός της δεν ορίζεται στο $x = 0$. Η γραφική της παράσταση έχει *σημείο ανακάμψεως* στο $x = 0$ (Σχήμα 2.41).



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

Σχημα 2.41 Η γραφική παράσταση της $y = x^{2/3}$ έχει ένα σημείο ανακάμψεως στο $x = 0$. (Παράδειγμα 5)

Απόδειξη του Θεωρήματος 4 Έστω p και q ακέραιοι με $q > 0$ και $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Θα είναι τότε

$$y^q = x^p.$$

Εφόσον οι p και q είναι ακέραιοι (για τους οποίους ισχύει ήδη ο κανόνας παραγώγισης ακέραιας δύναμης), μπορούμε να παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x και να πάρουμε

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Αν $y \neq 0$, διαιρούμε κάθε μέλος με qy^{q-1} για να λύσουμε ως προς dy/dx, οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Ιδιότητα εκθετικών} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1},
\end{aligned}$$

ό.έ.δ.

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης, μπορούμε να επεκτείνουμε τον κανόνα αυτό σε ρητές δυνάμεις του u: Αν ο n είναι ρητός αριθμός και u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε η u^n θα είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \qquad (2)$$

δεδομένου ότι $u \neq 0$ για $n < 1$.

Η απαγορευτική συνθήκη $u \neq 0$ όταν $n < 1$ είναι απαραίτητη, αφού το 0 ενδέχεται να ανήκει στο πεδίο ορισμού της u^n, αλλά δεν μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της u^{n-1}, όπως θα δούμε στο ακόλουθο Παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 Συνδυάζοντας την παράγωγο ρητής δύναμης με τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

(α)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\overbrace{(1-x^2)^{1/4}}^{\text{συνάρτηση ορισμένη στο } [-1,1]} &= \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x) && \text{Εξ. (2) με } u = 1 - x^2 \text{ και } n = 1/4 \\
&= \underbrace{\frac{-x}{2(1-x^2)^{3/4}}}_{\text{η παράγωγος ορίζεται μόνο στο } (-1,\,1)}
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x) \\
&= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x) \\
&= \frac{1}{5}(\sin x)(\cos x)^{-6/5}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.6

Παράγωγοι ρητών δυνάμεων

Να βρεθεί η dy/dx στις Ασκήσεις 1-6.

1. $y = x^{9/4}$ **2.** $y = \sqrt[3]{2x}$

3. $y = 7\sqrt{x+6}$ **4.** $y = (1-6x)^{2/3}$

5. $y = x(x^2+1)^{1/2}$ **6.** $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

Να βρεθούν οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 7-12.

7. $s = \sqrt[7]{t^2}$ **8.** $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

9. $y = \sin((2t+5)^{-2/3})$ **10.** $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

11. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$ **12.** $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Με τη μέθοδο παραγώγισης πεπλεγμένης συναρτήσεως βρείτε την dy/dx στις Ασκήσεις 13-22.

13. $x^2y + xy^2 = 6$ **14.** $2xy + y^2 = x + y$

15. $x^3 - xy + y^3 = 1$ **16.** $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

17. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ **18.** $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$

19. $x = \tan y$ **20.** $x + \sin y = xy$

21. $y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$ **22.** $y^2\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

Βρείτε την $dr/d\theta$ στις Ασκήσεις 23-26.

23. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$ **24.** $r - 2\sqrt{\theta} = \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}$

25. $\sin(r\theta) = \dfrac{1}{2}$ **26.** $\cos r + \cos\theta = r\theta$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Στις Ασκήσεις 27-30, εφαρμόστε παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως για να βρείτε την dy/dx και κατόπιν την d^2y/dx^2.

27. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ **28.** $y^2 = x^2 + 2x$

29. $2\sqrt{y} = x - y$ **30.** $xy + y^2 = 1$

31. Αν $x^3 + y^3 = 16$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(2, 2)$.

32. Αν $xy + y^2 = 1$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(0, -1)$.

Παραμετρικοποιήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα

Αν οι εξισώσεις των Ασκήσεων 33-36 ορίζουν τις πεπλεγμένες και διαφορίσιμες συναρτήσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$, να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$ για την τιμή t που δίδεται κάθε φορά.

33. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

34. $x = \sqrt{5-\sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \ln y, \quad t = 1$

35. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

36. $x\sin t + 2x = t, \quad t\sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

Κλίσεις, εφαπτομένες, και κάθετες

Στις Ασκήσεις 37 και 38, βρείτε την κλίση της καμπύλης στα σημεία που δίδονται.

37. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ στα σημεία $(-2, 1)$ και $(-2, -1)$

38. $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(1, -1)$

Στις Ασκήσεις 39-46, αφού βεβαιωθείτε ότι το σημείο που δίδεται ανήκει στην καμπύλη, βρείτε **(α)** την εφαπτομένη και **(β)** την κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

39. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$ **40.** $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

41. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $(-2, 1)$

42. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$

43. $2xy + \pi\sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$

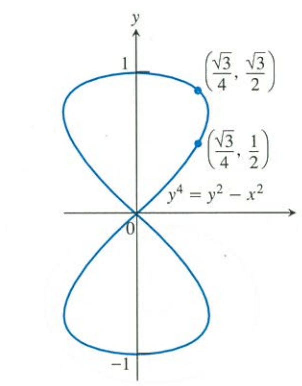
44. $x\sin 2y = y\cos 2x$, $(\pi/4, \pi/2)$

45. $y = 2\sin(\pi x - y)$, $(1, 0)$ **46.** $x^2\cos^2 y - \sin y = 0$, $(0, \pi)$

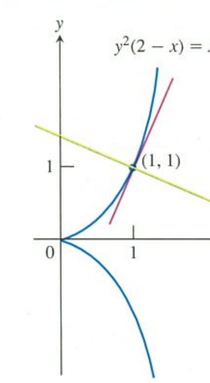
47. *Παράλληλες εφαπτομένες* Να βρείτε τα δύο σημεία τομής της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ με τον άξονα x και να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της καμπύλης στα σημεία αυτά είναι παράλληλες. Ποια η κοινή κλίση των εφαπτομένων αυτών;

48. *Εφαπτομένες παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων* Βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ **(α)** η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα x και **(β)** η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα y. Στην τελευταία περίπτωση, η dy/dx δεν ορίζεται, ορίζεται όμως η dx/dy. Ποιες τιμές παίρνει η dx/dy στα σημεία αυτά;

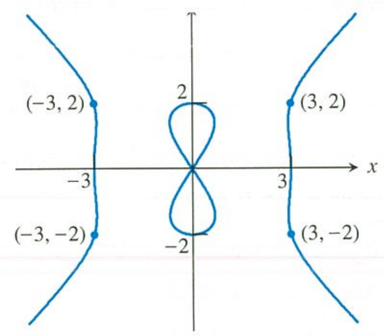
49. *Η καμπύλη του οχτώ* Βρείτε την κλίση της καμπύλης $y^4 = y^2 - x^2$ στα δύο σημεία της που σημειώνονται στο σχήμα.



50. *Κισσοειδής του Διοκλή (περίπου 200 π.Χ.)* Βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην κισσοειδή του Διοκλή $y^2(2-x) = x^3$ στο σημείο $(1, 1)$.



51. *Η «καμπύλη του … διαβόλου» (του Gabriel Cramer, γνωστού και από τον ομώνυμο κανόνα, 1750)* Βρείτε την κλίση της «καμπύλης του διαβόλου» $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ στα τέσσερα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα.



52. *Το φύλλο του Καρτέσιου* (Δείτε το Σχήμα 2.37)

(α) Βρείτε την κλίση του φύλλου του Καρτέσιου, $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ στα σημεία (4, 2) και (2, 4).

(β) Σε ποια σημεία, πλην της αρχής των αξόνων, έχει οριζόντια εφαπτομένη η καμπύλη;

(γ) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A στο Σχήμα 2.37, όπου η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

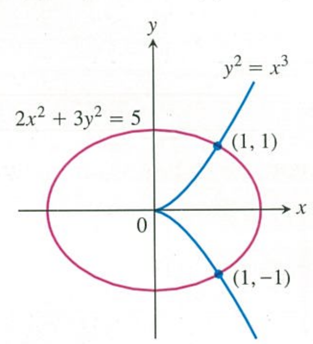
Θεωρία και παραδείγματα

53. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύει αν $f''(x) = x^{-1/3}$;

(α) $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ **(β)** $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

(γ) $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ **(δ)** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

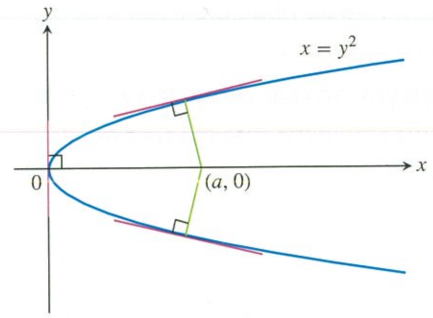
54. *Μάθετε γράφοντας* Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζουν οι εφαπτομένες των καμπυλών $2x^2 + 3y^2 = 5$ και $y^2 = x^3$ στα σημεία $(1, \pm 1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



55. *Τέμνουσα κάθετος* Σε ποιο άλλο σημείο τέμνει την καμπύλη $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ η κάθετος σε αυτήν στο σημείο (1, 1);

56. *Κάθετες παράλληλες σε ευθεία* Να βρεθούν οι κάθετες στην καμπύλη $xy + 2x - y = 0$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $2x + y = 0$.

57. *Κάθετες σε παραβολή* Δείξτε ότι αν είναι δυνατόν να φέρουμε τρεις καθέτους από το σημείο $(a, 0)$ στην παραβολή $x = y^2$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα, τότε το a οφείλει να είναι μεγαλύτερο του 1/2. Μια από τις καθέτους αυτές είναι ο άξονας x. Για ποια τιμή του a είναι κάθετες μεταξύ τους οι άλλες δύο κάθετες στην παραβολή;



58. *Μάθετε γράφοντας* Ποιες γεωμετρικές θεωρήσεις υπαγορεύουν τους περιορισμούς επί των πεδίων ορισμού των παραγώγων στα Παραδείγματα 5 και 6(α);

T Στις Ασκήσεις 59 και 60, να βρεθούν αμφότερες οι παράγωγοι dy/dx (όπου η y θεωρείται διαφορίσιμη συνάρτηση του x) και dx/dy (όπου η x θεωρείται διαφορίσιμη συνάρτηση του y). Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των dy/dx και dx/dy; Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής.

59. $xy^3 + x^2y = 6$ **60.** $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

61. (α) Δεδομένου ότι $x^4 + 4y^2 = 1$, βρείτε την dy/dx με δύο τρόπους: (1) λύνοντας ως προς y και παραγωγίζοντας τις προκύπτουσες συναρτήσεις κατά τα συνήθη και (2) με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως. Συμφωνούν τα δύο αποτελέσματα μεταξύ τους;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Λύστε την εξίσωση $x^4 + 4y^2 = 1$ ως προς y και σχεδιάστε τις προκύπτουσες συναρτήσεις σε ενιαίο σχήμα ώστε να πάρετε ένα πλήρες γράφημα της εξίσωσης $x^4 + 4y^2 = 1$. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε τα γραφήματα των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων. Θα μπορούσατε άραγε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά των γραφημάτων των παραγώγων κάνοντας απλώς μια επόπτευση του γραφήματος της $x^4 + 4y^2 = 1$; Αντιστρόφως, θα μπορούσατε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά του γραφήματος της $x^4 + 4y^2 = 1$ με απλή επόπτευση των γραφημάτων των παραγώγων; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

62. (α) Δεδομένου ότι $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, βρείτε την dy/dx με δύο τρόπους: (1) λύνοντας ως προς y και παραγωγίζοντας τις προκύπτουσες συναρτήσεις κατά τα συνήθη και (2) με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως. Συμφωνούν τα δύο αποτελέσματα μεταξύ τους;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Λύστε την εξίσωση $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ως προς y και σχεδιάστε τις προκύπτουσες συναρτήσεις σε ενιαίο σχήμα ώστε να πάρετε ένα πλήρες γράφημα της εξίσωσης $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε τα γραφήματα των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων. Θα μπορούσατε άραγε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά των γραφημάτων των παραγώγων κάνοντας απλώς μια επόπτευση του γραφήματος της $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; Αντιστρόφως, θα μπορούσατε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά του γραφήματος της $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ με απλή επόπτευση των γραφημάτων των παραγώγων; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Στις Ασκήσεις 63-70, χρησιμοποιήστε υπολογιστή για να εκτελέσετε τα εξής:

(α) Σχεδιάστε την εξίσωση με τον υπολογιστή σας στην επιλογή «πεπλεγμένης σχεδίασης» ("implicit plotting"). Βεβαιωθείτε ότι το σημείο P όντως ικανοποιεί την εξίσωση.

(β) Με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως βρείτε μια έκφραση για την παράγωγο dy/dx και υπολογίστε την στο σημείο P.

(γ) Χρησιμοποιώντας την κλίση που βρήκατε στο (β), βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο P. Κατόπιν σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα την πεπλεγμένη καμπύλη και την εφαπτομένη της.

63. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

64. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

65. $y^2 + y = \frac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

66. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

67. $x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

68. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

69. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

70. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

2.7 Συναφείς ρυθμοί

Εξισώσεις συναφών ρυθμών • Στρατηγική επίλυσης

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητάται να μετρήσουμε την ταχύτητα προωθήσεως ενός πυραύλου ο οποίος ανέρχεται κατακόρυφα μετά την εκτόξευσή του. Θα μπορούσαμε βέβαια μέσω μιας περίπλοκης και πολυδάπανης διάταξης να τοποθετήσουμε κάποιον μηχανισμό στην άτρακτο του πυραύλου ο οποίος θα λαμβάνει τις απαραίτητες μετρήσεις. Θα ήταν όμως ασφαλέστερο –και πολύ οικονομικότερο– να σταθούμε σε κάποια απόσταση d από το σημείο εκτόξευσης και να μετρήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ανυψώσεως θ. Κατόπιν, με χρήση απλής τριγωνομετρίας, θα εκφράζαμε το ύψος του πυραύλου h συναρτήσει της γωνίας και της απόστασης ως $h = d \tan\theta$. Παραγωγίζοντας κάθε μέλος της εξίσωσης αυτής ως προς t θα παίρναμε το ζητούμενο dh/dt, συναρτήσει του ρυθμού $d\theta/dt$, ο οποίος είναι εύκολα μετρήσιμος. Το πρόβλημα προσδιορισμού ενός μη εύκολα μετρήσιμου ρυθμού μέσω ενός άλλου ρυθμού που μπορούμε να μετρήσουμε, καλείται *πρόβλημα συναφών ρυθμών*. Η παρούσα ενότητα πραγματεύεται τέτοια προβλήματα συναφών ρυθμών.

Εξισώσεις συναφών ρυθμών

Έστω ότι το σωματίδιο $P(x, y)$ κινείται επί της καμπύλης C στο επίπεδο κατά τρόπο ώστε οι συντεταγμένες του x και y να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t. Αν D είναι η απόσταση του P από την αρχή των αξόνων, τότε μπορούμε εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης να βρούμε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς dD/dt, dx/dt, και dy/dt.

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

Από κάθε εξίσωση η οποία περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες μεταβλητές που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t μπορούμε να εξαγάγουμε μια εξίσωση που να συνδέει τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής.

Παράδειγμα 1 Εύρεση εξισώσεων συναφών ρυθμών

Έστω ότι η ακτίνα r και το ύψος h ενός κώνου είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t και ότι V είναι ο όγκος του κώνου. Βρείτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς dV/dt, dr/dt, και dh/dt.

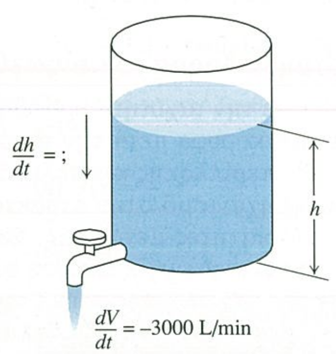
Λύση

$$V = \frac{\pi}{3}r^2 h \qquad \text{Τύπος όγκου κώνου}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + 2r\frac{dr}{dt} \cdot h\right) = \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

Στρατηγική επίλυσης

Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του υγρού σε μια κλειστή κατακόρυφη δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος, από την οποία αντλούμε υγρό με σταθερό ρυθμό; Τέτοιου είδους ερωτήματα μας ζητούν να υπολογίσουμε έναν ρυθμό μεταβολής που δεν μετρείται άμεσα, συναρτήσει ενός άλλου ρυθμού τον οποίο μπορούμε να μετρήσουμε. Θα βρούμε λοιπόν μια εξίσωση που να συνδέει τις σχετικές μεταβλητές και θα την παραγωγίσουμε, ώστε να προκύψει μια εξίσωση με τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής.



Σχημα 2.42 Η κυλινδρική δεξαμενή του Παραδείγματος 2.

Παράδειγμα 2 Άντληση από δεξαμενή

Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του υγρού σε μια κλειστή κατακόρυφη δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος, από την οποία αντλούμε υγρό με σταθερό ρυθμό 3000 L/min;

Λύση Σχεδιάζουμε την κυλινδρική δεξαμενή σε μια τυχούσα χρονική στιγμή στην οποία το ύψος της στάθμης του υγρού είναι h και ο όγκος του είναι V. Η ακτίνα της κυκλικής βάσεως είναι r (Σχήμα 2.42).

Καθώς ο χρόνος περνά, η ακτίνα παραμένει σταθερή, αλλά τα V και h μεταβάλλονται. Θεωρούμε ότι οι V και h είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου, τον οποίο συμβολίζουμε με t. Μας δίδεται ο ρυθμός

$$\frac{dV}{dt} = -3000. \qquad \text{Ο ρυθμός άντλησης είναι 3000 L/min. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι ο όγκος μειώνεται.}$$

Μας ζητείται ο ρυθμός

$$\frac{dh}{dt}. \qquad \text{Πόσο γρήγορα κατέρχεται η στάθμη του υγρού στη δεξαμενή;}$$

Για να βρούμε το dh/dt, χρειαζόμαστε πρώτα μια εξίσωση που να συνδέει τα h και V. Η ακριβής μορφή της εξισώσεως εξαρτάται από τις μονάδες που θα επιλέξουμε για τα V, r, και h. Αν εκφράσουμε το V σε λίτρα και τα r και h σε μέτρα, η εξίσωση του όγκου του κυλίνδρου παίρνει τη μορφή

$$V = 1000\pi r^2 h \qquad \text{Η ακτίνα } r \text{ παραμένει σταθερή.}$$

αφού ένα κυβικό μέτρο περιέχει 1000 L.

Εφόσον οι V και h είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t, θα παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξίσωσης $V = 1000\pi r^2 h$ ως προς t για να πάρουμε μια εξίσωση που συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dh/dt και dV/dt:

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

Από τα δεδομένα, αντικαθιστούμε $dV/dt = -3000$ και λύνουμε ως προς dh/dt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}.$$

Η στάθμη του υγρού θα μειώνεται λοιπόν με ρυθμό $3/(\pi r^2)$ m/min.

Ερμηνεία

Η εξίσωση $dh/dt = -3/\pi r^2$ μας δείχνει την εξάρτηση του ρυθμού μείωσης της στάθμης του υγρού από την ακτίνα βάσεως. Για μικρές ακτίνες r, το dh/dt είναι μεγάλο· για μεγάλες ακτίνες r, το dh/dt μειώνεται.

Για $r = 1$ m: $\quad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0{,}95$ m/min $= -95$ cm/min.

Για $r = 10$ m: $\quad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0{,}0095$ m/min $= -0{,}95$ cm/min.

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων συναφών ρυθμών

Βήμα 1. *Κάνετε σχήμα και σημειώστε σε αυτό τις μεταβλητές και τις σταθερές ποσότητες.* Συμβολίστε με t τον χρόνο. Υποθέστε ότι όλες οι μεταβλητές είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t.

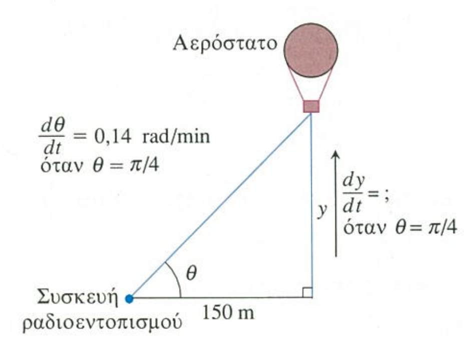
Βήμα 2. *Σημειώστε στο σχήμα όποια άλλα δεδομένα υπάρχουν* (συναρτήσει των συμβόλων που έχετε επιλέξει).

Βήμα 3. *Σημειώστε το ζητούμενο* (συνήθως κάποιος ρυθμός, εκπεφρασμένος ως παράγωγος).

Βήμα 4. *Γράψτε την εξίσωση που συνδέει τις μεταβλητές.* Ίσως χρειαστεί να συνδυάσετε δύο ή περισσότερες εξισώσεις προκειμένου να βρείτε μια τελική εξίσωση που συσχετίζει τη μεταβλητή της οποίας τον ρυθμό ζητάτε με τις άλλες μεταβλητές των οποίων τους ρυθμούς γνωρίζετε.

Βήμα 5. *Παραγωγίστε ως προς t.* Κατόπιν εκφράστε τον ζητούμενο ρυθμό, συναρτήσει των γνωστών μεταβλητών (ή των ρυθμών μεταβολής τους).

Βήμα 6. *Υπολογίστε.* Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα βρείτε τον ρυθμό μεταβολής που ζητάτε.



Σχημα 2.43 Το αερόστατο του Παραδείγματος 3.

Παράδειγμα 3 Ανυψούμενο αερόστατο

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή εντοπίζεται από μια συσκευή ραδιοεντοπισμού που απέχει 150 m από το σημείο απογείωσης. Τη στιγμή που η γωνία ανύψωσης (ως προς τη συσκευή ραδιοεντοπισμού) είναι $\pi/4$, ο ρυθμός αύξησης της γωνίας αυτής ισούται με 0,14 rad/min. Πόση είναι τότε η ταχύτητα ανύψωσης του αερόστατου;

Λύση Ακολουθούμε τα έξι βήματα της στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων συναφών ρυθμών.

Βήμα 1: *Κάνουμε σχήμα στο οποίο σημειώνουμε τις μεταβλητές και τις* *σταθερές ποσότητες* (Σχήμα 2.43). Μεταβλητές είναι οι

θ = ακτινιακό μέτρο της γωνίας ανυψώσεως του αερόστατου
y = ύψος (σε μέτρα) του αερόστατου.

Έστω t ο χρόνος σε λεπτά (min) και έστω ότι οι θ και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t.

Η μόνη σταθερή ποσότητα του σχήματος είναι η απόσταση της συσκευής ραδιοεντοπισμού από το σημείο απογείωσης (150 m). Δεν υπάρχει λόγος να της δώσουμε ιδιαίτερο σύμβολο.

Βήμα 2: *Σημειώνουμε στο σχήμα όποια άλλα δεδομένα υπάρχουν.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}14 \text{ rad/min} \qquad \text{όταν} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Βήμα 3: *Σημειώνουμε το ζητούμενο.* Εδώ μας ζητείται το dy/dt όταν $\theta = \pi/4$.

Βήμα 4: *Γράφουμε μια εξίσωση που περιέχει τα y και θ.*

$$\frac{y}{150} = \tan\theta \qquad \text{δηλαδή} \qquad y = 150 \tan\theta$$

Βήμα 5: *Παραγωγίζουμε ως προς t βάσει του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης.* Έτσι βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ του dy/dt (που ζητούμε) και του $d\theta/dt$ (που γνωρίζουμε).

$$\frac{dy}{dt} = 150(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

Βήμα 6: *Υπολογίζουμε με $\theta = \pi/4$ και $d\theta/dt = 0{,}14$, βρίσκοντας έτσι το dy/dt.*

$$\frac{dy}{dt} = 150(\sqrt{2})^2(0{,}14) = 42 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Ερμηνεία

Κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή, το αερόστατο ανυψώνεται με ταχύτητα 42 m/min.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843)

Παράδειγμα 4 Καταδίωξη στην εθνική οδό

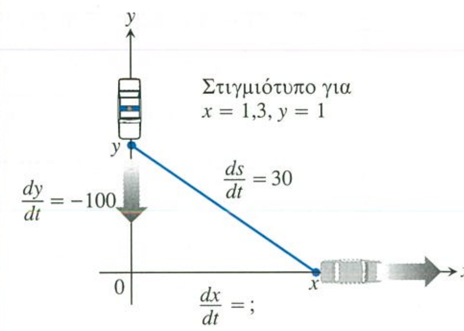
Περιπολικό της αστυνομίας καταδιώκει ένα ταχέως κινούμενο προπορευόμενο όχημα. Το περιπολικό κινείται προς νότο πλησιάζοντας διασταύρωση στην οποία το ύποπτο αυτοκίνητο έχει ήδη στρίψει και κινείται ανατολικά. Τη στιγμή που το περιπολικό βρίσκεται 1 km βόρεια της διασταύρωσης και το αυτοκίνητο 1,3 km ανατολικά της, αστυνομικός του περιπολικού προσδιορίζει με ραντάρ ότι η απόσταση που τον χωρίζει από το καταδιωκόμενο όχημα αυξάνεται με ρυθμό 30 km/h. Αν η ταχύτητα του περιπολικού τη στιγμή της μέτρησης είναι 100 km/h, ποια η ταχύτητα του καταδιωκόμενου αυτοκινήτου;

Λύση Ακολουθούμε και πάλι τα βήματα της στρατηγικής επίλυσης.

Βήμα 1: *Σχήμα και μεταβλητές.* Σχεδιάζουμε στο επίπεδο το καταδιωκόμενο όχημα και το περιπολικό, με τον θετικό ημιάξονα x να δείχνει ανατολικά και τον θετικό ημιάξονα y να δείχνει βόρεια (Σχήμα 2.44). Έστω t ο χρόνος. Θέτουμε

x = θέση καταδιωκόμενου οχήματος τη στιγμή t
y = θέση περιπολικού τη στιγμή t
s = απόσταση μεταξύ οχήματος και περιπολικού τη στιγμή t

Υποθέτουμε ότι οι x, y, και s είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t.



Σχημα 2.44 Το σχήμα του Παραδείγματος 4.

Βήμα 2: *Αριθμητικά δεδομένα.* Τη χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει, είναι

$$x = 1{,}3 \text{ km}, \qquad y = 1 \text{ km}, \qquad \frac{dy}{dt} = -100 \text{ km/h}, \qquad \frac{ds}{dt} = 30 \text{ km/h}.$$

Ο ρυθμός dy/dt είναι αρνητικός εφόσον το y μειώνεται.

Βήμα 3: *Ζητούμενο:* dx/dt.

Βήμα 4: *Σχέση μεταξύ μεταβλητών:*

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πάρουμε την $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.)

Βήμα 5: *Παραγωγίζουμε ως προς t.*

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

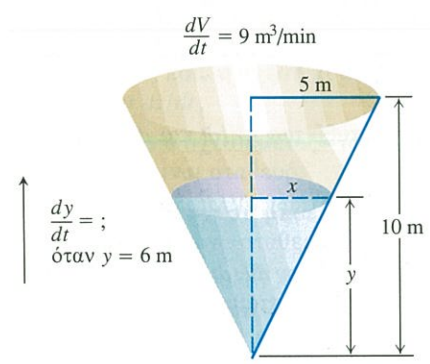
Βήμα 6: *Υπολογίζουμε.* Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα $x = 1{,}3$, $y = 1$, $dy/dt = -100$, $ds/dt = 30$, και λύνουμε ως προς dx/dt.

$$30 = \frac{1}{\sqrt{1{,}3^2 + 1^2}}\left(1{,}3\,\frac{dx}{dt} + 1\,(-100)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{30\sqrt{1{,}3^2+1} + 100}{1{,}3} \cong 114$$

Ερμηνεία

Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, η ταχύτητα του καταδιωκόμενου οχήματος είναι 114 km/h.



Σχημα 2.45 Η κωνική δεξαμενή του Παραδείγματος 5.

Παράδειγμα 5 Γεμίζοντας μια κωνική δεξαμενή

Νερό εισρέει σε μια κωνική δεξαμενή με ρυθμό 9 m³/min. Η δεξαμενή είναι κατακόρυφη με το μυτερό της άκρο προς τα κάτω. Έχει ύψος 10 m και ακτίνα κυκλικής βάσης 5 m. Πόσο γρήγορα ανέρχεται η στάθμη όταν το νερό έχει βάθος 6 m;

Λύση Ακολουθούμε τα βήματα της στρατηγικής επίλυσης.

Βήμα 1: *Σχήμα και μεταβλητές.* Το Σχήμα 2.45 δείχνει την κωνική δεξαμενή ενώ γεμίζει. Μεταβλητές ποσότητες είναι οι

V = όγκος (m^3) νερού στη δεξαμενή τη στιγμή t (min)

x = ακτίνα (m) υδάτινης επιφάνειας τη στιγμή t

y = βάθος (m) νερού στη δεξαμενή τη στιγμή t.

Υποθέτουμε ότι οι V, x, και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t. Οι σταθερές του προβλήματος είναι οι διαστάσεις της δεξαμενής.

Βήμα 2: *Αριθμητικά δεδομένα.* Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει,

$$y = 6 \text{ m} \qquad \text{και} \qquad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Βήμα 3: *Ζητούμενο:* dy/dt.

Βήμα 4: *Σχέση μεταξύ μεταβλητών:* Το νερό σχηματίζει κώνο όγκου

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει τις ποσότητες x, V και y. Επειδή όμως δεν έχουμε πληροφορίες ούτε για το x ούτε για την παράγωγό του dx/dt τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, χρειάζεται να απαλείψουμε το x. Όντως, από τα όμοια τρίγωνα του Σχήματος 2.45 βλέπουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το x συναρτήσει του y:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{δηλαδή} \qquad x = \frac{y}{2}.$$

Έτσι,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3.$$

Βήμα 5: *Παραγωγίζουμε ως προς t.*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

Βήμα 6: *Υπολογίζουμε.* Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα $y = 6$ και $dV/dt = 9$, και λύνουμε ως προς dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32 \text{ m/min}$$

Ερμηνεία

Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, η υδάτινη στάθμη ανέρχεται με ρυθμό 0,32 m/min.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.7

1. *Εμβαδόν* Έστω ότι η ακτίνα r και το εμβαδόν $A = \pi r^2$ ενός κύκλου είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t. Γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dA/dt και dr/dt.

2. *Εμβαδόν επιφανείας* Έστω ότι η ακτίνα r και το εμβαδόν της επιφάνειας $S = 4\pi r^2$ μιας σφαίρας είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t. Γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dS/dt και dr/dt.

3. *Όγκος* Η ακτίνα r και το ύψος h ενός ορθού κυλίνδρου συνδέονται με τον όγκο του, V, μέσω της σχέσης $V = \pi r^2 h$.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dh/dt αν το r είναι σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dr/dt αν το h είναι σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt, dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

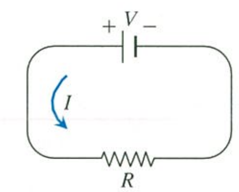
4. *Όγκος* Η ακτίνα r και το ύψος h ενός ορθού κυκλικού κώνου συνδέονται με τον όγκο του, V, μέσω της σχέσης $V = (1/3)\pi r^2 h$.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dh/dt αν το r είναι σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dr/dt αν το h είναι σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt, dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

5. *Μεταβαλλόμενη τάση* Η τάση V (Volt, V), το ρεύμα I (Ampère, A), και η αντίσταση R (Ohm, Ω) του ηλεκτρικού κυκλώματος που φαίνεται στο σχήμα συνδέονται μέσω της σχέσης $V = IR$. Έστω ότι το V αυξάνεται με ρυθμό 1 V/sec ενώ το I μειώνεται με ρυθμό 1/3 A/sec. Έστω t ο χρόνος σε sec.



(α) Ποια η τιμή του dV/dt;

(β) Ποια η τιμή του dI/dt;

(γ) Ποια σχέση συνδέει τους ρυθμούς dR/dt, dV/dt και dI/dt;

(δ) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του R, όταν $V = 12$ V και $I = 2$ A. Αυξάνεται ή μειώνεται τότε το R;

6. *Ηλεκτρική ισχύς* Η ισχύς P (Watt, W) ενός ηλεκτρικού κυκλώματος συνδέεται με την αντίσταση του κυκλώματος R (Ω) και το ρεύμα που το διαρρέει i (A) μέσω της εξίσωσης $P = Ri^2$.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dP/dt, dR/dt, και di/dt αν κανένα εκ των P, R, και i δεν είναι σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dR/dt και di/dt αν το P είναι σταθερό;

7. *Απόσταση* Έστω x και y διαφορίσιμες συναρτήσεις του t και έστω $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση μεταξύ των σημείων $(x, 0)$ και $(0, y)$ στο επίπεδο xy.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt και dx/dt αν το y είναι σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt, dx/dt και dy/dt αν ούτε το x ούτε το y είναι σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dx/dt και dy/dt αν το s είναι σταθερό;

8. *Διαγώνιοι* Αν x, y, και z είναι τα μήκη των ακμών ενός ορθογώνιου κιβωτίου, τότε το κοινό μήκος των διαγωνίων του κιβωτίου είναι $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(α) Αν τα x, y, και z είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t, ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt, dx/dt, dy/dt, και dz/dt;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt, dy/dt και dz/dt αν το x είναι σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dx/dt, dy/dt, και dz/dt αν το s είναι σταθερό;

9. *Εμβαδόν* Το εμβαδόν A τριγώνου με μήκη πλευρών a και b και περιεχόμενη γωνία μέτρου θ ισούται με

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt και $d\theta/dt$ αν τα a και b είναι σταθερά;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt, $d\theta/dt$ και da/dt αν μόνο το b είναι σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt, $d\theta/dt$, da/dt, και db/dt αν κανένα εκ των a, b, και θ δεν είναι σταθερό;

10. *Θερμαίνοντας ένα πιάτο* Καθώς θερμαίνεται στον φούρνο ένα μεταλλικό πιάτο κυκλικού σχήματος, η ακτίνα του αυξάνεται με ρυθμό 0,01 cm/min. Ποιος ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού του πιάτου τη στιγμή που η ακτίνα του έχει γίνει ίση με 50 cm;

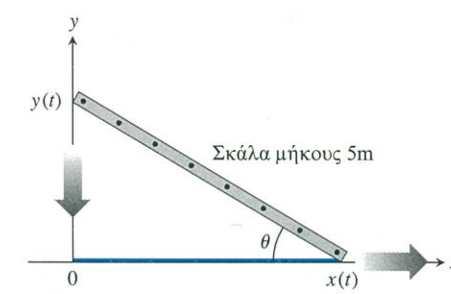
11. *Μεταβαλλόμενες διαστάσεις ορθογωνίου* Το μήκος l ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec ενώ το πλάτος του w αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Τη στιγμή που είναι $l = 12$ cm και $w = 5$ cm, να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής **(α)** του εμβαδού, **(β)** της περιμέτρου, και **(γ)** των μηκών των διαγωνίων του ορθογωνίου. Ποιες από τις ποσότητες αυτές μειώνονται, και ποιες αυξάνονται;

12. *Μεταβαλλόμενες διαστάσεις ορθογώνιου κιβωτίου* Ας υποθέσουμε ότι τα μήκη των ακμών x, y, και z ενός κλειστού ορθογώνιου κιβωτίου μεταβάλλονται ως ακολούθως:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \qquad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sec}, \qquad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}.$$

Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής **(α)** του όγκου, **(β)** του εμβαδού της επιφάνειας, και **(γ)** του μήκους της διαγωνίου $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ τη στιγμή που $x = 4$, $y = 3$, και $z = 2$.

13. *Σκάλα που ολισθαίνει* Μια σκάλα μήκους 5 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν τοίχο όταν η βάση της αρχίζει να ολισθαίνει. Τη στιγμή που η βάση απέχει 4 m από τον τοίχο, η ταχύτητα ολίσθησης της βάσης είναι 1,5 m/sec.



(α) Με ποια ταχύτητα κινείται εκείνη τη στιγμή η κορυφή της σκάλας;

(β) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο, και το έδαφος;

(γ) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος;

14. *Εναέρια κυκλοφορία* Δυο αεροσκάφη της πολιτικής αεροπορίας πετούν στα 40.000 πόδια σε ευθείες τροχιές που τέμνονται κάθετα. Το αεροσκάφος A πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 442 κόμβων (1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι την ώρα· 1 ναυτικό μίλι ≈ 1852 m). Το αεροσκάφος B πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 481 κόμβων. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης μεταξύ των αεροσκαφών τη στιγμή που τα A και B απέχουν 5 και 12 ναυτικά μίλια, αντίστοιχα, από το σημείο τομής;

15. *Χαρταετός* Η Ελένη πετά τον χαρταετό της σε ύψος 100

m, και ο αέρας τον παρασύρει οριζόντια μακριά από αυτήν με ταχύτητα 7 m/sec. Πόσο γρήγορα θα πρέπει να ξετυλίγει τον σπάγγο η Ελένη τη στιγμή που ο χαρταετός απέχει 150 m από αυτήν;

16. *Διαπλάτυνση κυλίνδρου* Οι μηχανικοί της Lincoln Automotive διαπλατύνουν την κοιλότητα ενός κυλίνδρου κινητήρα βάθους 6 cm προκειμένου να εφαρμόζει σε ένα καινούριο έμβολο. Το μηχάνημα που χρησιμοποιούν μεγαλώνει την ακτίνα του κυλίνδρου κατά ένα χιλιοστό του cm κάθε 3 min. Πόσο γρήγορα αυξάνεται ο όγκος του κυλίνδρου όταν η διάμετρός του είναι 3.800 cm;

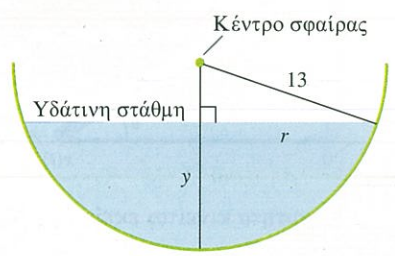
17. *Σωρός άμμου που μεγαλώνει* Από έναν ιμάντα μεταφοράς προστίθεται άμμος σε σωρό κωνικού σχήματος με ρυθμό 10 m^3/min. Το ύψος του κωνικού σωρού ισούται πάντα με τρία όγδοα της διαμέτρου βάσεως. Πόσο γρήγορα μεταβάλλονται **(α)** το ύψος και **(β)** η ακτίνα τη στιγμή που ο σωρός έχει 4 m ύψος; Δώστε τις απαντήσεις σας σε cm/min.

18. *Κωνικού σχήματος δεξαμενή που αδειάζει* Από μια ρηχή κωνικού σχήματος τσιμεντένια δεξαμενή (με την κορυφή της προς τα κάτω) χύνεται νερό με ρυθμό 50 m^3/min. Η δεξαμενή έχει ακτίνα βάσεως 45 m και ύψος 6 m.

(α) Πόσο γρήγορα (cm/min) πέφτει η στάθμη του νερού όταν το νερό έχει βάθος 5 m;

(β) Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται την ίδια στιγμή η ακτίνα της κυκλικής υδάτινης επιφάνειας; Δώστε την απάντησή σας σε cm/min.

19. *Ημισφαιρικού σχήματος δεξαμενή που αδειάζει* Νερό χύνεται με ρυθμό 6 m^3/min από μια ημισφαιρικού σχήματος δεξαμενή ακτίνας 13 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, δεδομένου ότι ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι ανά πάσα στιγμή $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ όπου R η ακτίνα της δεξαμενής και y βάθος του νερού σε m.



(α) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το ύψος της υδάτινης στάθμης όταν το νερό έχει βάθος 8 m;

(β) Ποια η ακτίνα r της υδάτινης επιφάνειας όταν το νερό έχει βάθος y m;

(γ) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η ακτίνα r όταν το νερό έχει βάθος 8 m;

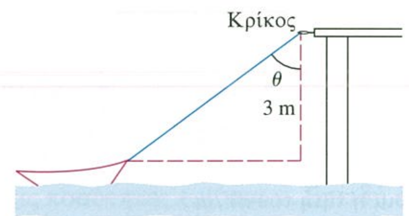
20. *Μια δροσοσταγόνα που διογκώνεται* Έστω ότι μια σταγόνα της πρωινής δροσιάς έχει τέλειο σφαιρικό σχήμα και ότι, εξαιτίας της συμπύκνωσης, η σταγόνα προσλαμβάνει μόρια υγρασίας από το περιβάλλον της με ρυθμό ανάλογο του εμβαδού της επιφάνειάς της. Δείξτε ότι υπό τις συνθήκες αυτές η ακτίνα της σταγόνας θα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

21. *Η ακτίνα ενός μπαλονιού που φουσκώνει* Ένα σφαιρικό μπαλόνι γεμίζεται με το στοιχείο ήλιο με ρυθμό 10π m^3/min. Πόσο γρήγορα μεγαλώνει η ακτίνα του μπαλονιού τη στιγμή που αυτή ισούται με 5 m; Πόσο γρήγορα αυξάνεται το εμβαδόν της σφαιρικής του επιφάνειας;

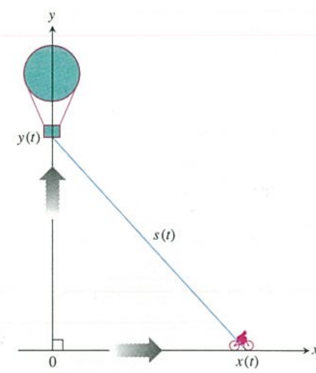
22. *Βαρκάκι* Ένα μικρό βαρκάκι τραβιέται με σκοινί προς την αποβάθρα. Το σκοινί, που είναι περασμένο σε έναν κρίκο στερεωμένο 3 m ψηλότερα από την πλώρη, τραβιέται με ρυθμό 1 m/sec.

(α) Πόσο γρήγορα πλησιάζει το βαρκάκι την αποβάθρα όταν το μήκος του σχοινιού είναι 5 m;

(β) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η γωνία θ;



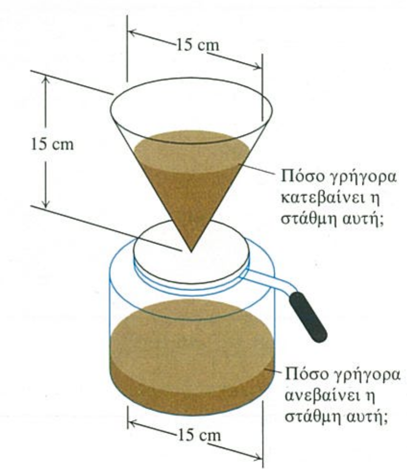
23. *Αερόστατο και ποδήλατο* Αερόστατο ανυψώνεται κατακόρυφα πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο, με σταθερό ρυθμό ανύψωσης 1 m/sec. Τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 65 m, ένα μοτοποδήλατο που κινείται με 17 m/sec περνά ακριβώς κάτω από το αερόστατο. Πόσο γρήγορα θα αυξάνεται η απόσταση $s(t)$ μεταξύ ποδηλάτου και αερόστατου μετά από 3 sec;



24. *Καφές φίλτρου* Από ένα κωνικό φίλτρο χύνεται καφές σε μια κυλινδρική καφετιέρα με ρυθμό 100 cm^3/min.

(α) Πόσο γρήγορα ανεβαίνει η στάθμη του καφέ στην καφετιέρα τη στιγμή που στο φίλτρο ο καφές έχει βάθος 5 cm;

(β) Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του καφέ στο φίλτρο τότε;



25. *Καρδιακός ρυθμός άντλησης* Στα τέλη της δεκαετίας του 1860, ο Adolf Fick, καθηγητής φυσιολογίας στην Ιατρική Σχολή του Πανεπιστημίου του Würtzburg της Γερμανίας, ανέπτυξε μια μέθοδο που χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα για τη μέτρηση της ποσότητας του αίματος που αντλείται από τους καρδιακούς μυς ανά δευτερόλεπτο. Καθώς διαβάζετε αυτή τη φράση η καρδιά σας αντλεί αίμα με ρυθμό μάλλον κοντά στα 7 L/min. Όταν αναπαύεστε ο ρυθμός αυτός πέφτει λίγο κάτω από 6 L/min. Αν είστε ασκημένος μαραθωνοδρόμος, τη στιγμή που τρέχετε στον μαραθώνιο η καρδιά σας μπορεί να αντλεί ακόμα και 30 L/min.

Ο καρδιακός σας ρυθμός άντλησης αίματος υπολογίζεται από τον τύπο

$$y = \frac{Q}{D},$$

όπου Q η ποσότητα (σε ml) CO_2 που εκπνέετε ανά λεπτό και D η διαφορά μεταξύ των συγκεντρώσεων CO_2 (ml/L) στο αίμα που πηγαίνει στους πνεύμονες και στο αίμα που επιστρέφει από αυτούς. Με τιμές $Q = 233$ ml/min και $D = 97 - 56 = 41$ ml/L, βρίσκουμε

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5{,}68 \text{ L/min},$$

αποτέλεσμα το οποίο πλησιάζει τα 6 L/min που αντλεί η καρδιά των περισσότερων ανθρώπων σε συνθήκες ανάπαυσης (ύπνου). (Ευχαριστούμε τον J. Kenneth Herd, M.D., του Quillan College of Medicine, East Tennessee State University για τα αριθμητικά δεδομένα.)

Έστω τώρα ότι γνωρίζουμε πως για $Q = 233$ και $D = 41$, η ποσότητα D μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδων ανά λεπτό, ενώ η ποσότητα Q παραμένει αμετάβλητη. Πώς μεταβάλλεται τότε ο καρδιακός ρυθμός άντλησης;

26. *Κόστος, έσοδα, και κέρδος* Μια επιχείρηση παράγει x τεμάχια κάποιου προϊόντος συνολικού κόστους $c(x)$ χιλιάδων ευρώ, εξασφαλίζοντας έτσι έσοδα από πωλήσεις $r(x)$ χιλιάδων ευρώ, και καθαρό κέρδος $p(x) = r(x) - c(x)$ χιλιάδων ευρώ. Να βρεθούν οι ρυθμοί dc/dt, dr/dt, και dp/dt που αντιστοιχούν στις ακόλουθες τιμές των x και dx/dt.

(α) $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, και $dx/dt = 0{,}1$ για $x = 2$

(β) $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$, και $dx/dt = 0{,}05$ για $x = 1{,}5$

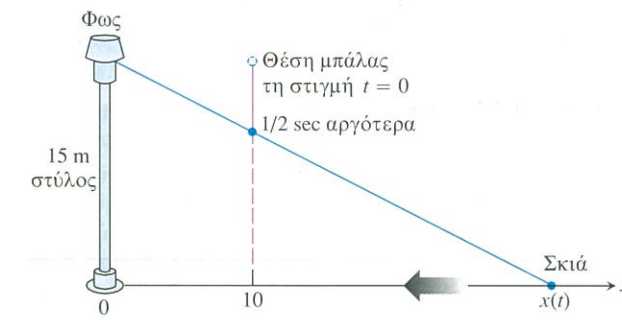
27. *Κίνηση σε παραβολική τροχιά* Σωματίδιο κινείται επί της παραβολής $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο έτσι ώστε η συντεταγμένη x της θέσης του (που μετριέται σε m) να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 10 m/sec. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ την οποία σχηματίζει με τον άξονα x η ευθεία που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων για $x = 3$ m;

28. *Κίνηση σε παραβολική τροχιά* Σωματίδιο κινείται με κατεύθυνση από δεξιά προς αριστερά επί της παραβολής $y = \sqrt{-x}$ έτσι ώστε η συντεταγμένη x της θέσης του (που μετριέται σε m) να μειώνεται με ρυθμό 8 m/sec. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ την οποία σχηματίζει με τον άξονα x η ευθεία που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων για $x = -4$ m;

29. *Κίνηση στο επίπεδο* Οι συντεταγμένες θέσεως σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t με $dx/dt = -1$ m/sec και $dy/dt = -5$ m/sec. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων καθώς αυτό περνά από το σημείο (5, 12);

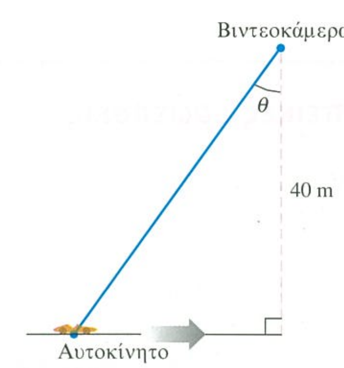
30. *Σκιά διαβάτη* Διαβάτης ύψους 2 m κινείται με ταχύτητα 2 m/sec προς έναν φανοστάτη που έχει λάμπα σε ύψος 5 m. Με ποιον ρυθμό κινείται η άκρη της σκιάς του διαβάτη; Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το μήκος της σκιάς του διαβάτη όταν αυτός απέχει 5 m από τη βάση του φανοστάτη;

31. *Σκιά μπάλας* Μια λάμπα ανάβει σε φανοστάτη ύψους 15 m. Από το ίδιο ύψος αλλά σε απόσταση 10 m αφήνουμε μια μπάλα να πέσει. (Δείτε το ακόλουθο σχήμα.) Πόσο γρήγορα κινείται η σκιά της μπάλας επί του εδάφους 1/2 sec αργότερα; (Υποθέστε ότι σε χρόνο t sec η μπάλα διανύει πέφτοντας απόσταση $s = 4{,}9t^2$ m.)



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

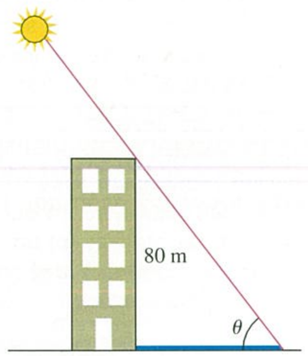
32. *Μαγνητοσκόπηση κινούμενου οχήματος* Έστω ότι μαγνητοσκοπείτε έναν αγώνα αυτοκινήτων σε απόσταση 40 m από τον δρόμο, και παρακολουθείτε ένα αμάξι που κινείται με 288 km/h (80 m/sec). Πόσο γρήγορα θα πρέπει να περιστρέφετε τη βιντεοκάμερα τη στιγμή που το αμάξι αυτό βρίσκεται ακριβώς μπροστά σας; Το ίδιο ερώτημα για μισό δευτερόλεπτο αργότερα.



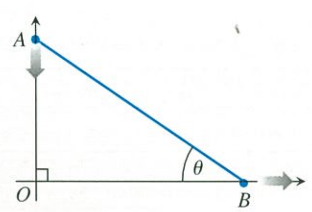
33. *Στρώμα πάγου που λειώνει* Μια σφαιρική μπάλα από σίδηρο διαμέτρου 8 cm καλύπτεται από ομοιόμορφο στρώμα πάγου. Αν ο πάγος λειώνει με ρυθμό 10 cm^3/min, τότε πόσο γρήγορα μειώνεται το πάχος του πάγου όταν αυτό ισούται με 2 cm; Πόσο γρήγορα μειώνεται το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας του πάγου τότε;

34. *Περιπολία στην εθνική οδό* Ένα μικρό αεροσκάφος περιπολεί στην εθνική οδό σε ύψος 3 km πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο, πετώντας με ταχύτητα 120 km/h. Ο πιλότος βλέπει ένα όχημα και με το ραντάρ του προσδιορίζει ότι τη στιγμή που η απόσταση αεροπλάνου-οχήματος είναι 5 km, η απόσταση αυτή μειώνεται με ρυθμό 160 km/h. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος ως προς το έδαφος.

35. *Σκιά κτηρίου* Το πρωί μιας μέρας που ο ήλιος θα περάσει ακριβώς κατακόρυφα, η σκιά ενός κτηρίου ύψους 80 m έχει μήκος 60 m. Την ίδια στιγμή, η γωνία θ που σχηματίζει ο ήλιος με το επίπεδο έδαφος αυξάνεται με ρυθμό $0{,}27°/\text{min}$. Με τι ρυθμό μειώνεται η σκιά του κτηρίου τότε; (Θυμηθείτε να χρησιμοποιήσετε ακτίνια. Εκφράστε τη λύση σας σε cm ανά λεπτό, με προσέγγιση χιλιοστού.)



36. *Διαβάτες* Οι A και B κινούνται σε δύο κάθετους δρόμους. Ο A πλησιάζει τη διασταύρωση με ταχύτητα 2 m/sec ,ενώ ο B απομακρύνεται από αυτήν με ταχύτητα 1 m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ τη στιγμή που οι A και B απέχουν 10 m και 20 m αντίστοιχα από τη διασταύρωση; Εκφράστε τη λύση σας σε μοίρες ανά sec, με προσέγγιση μίας μοίρας.

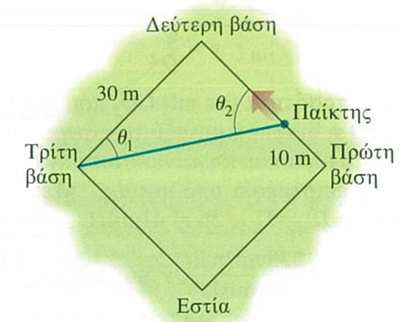


37. *Παίκτες του μπέιζμπολ* Το «διαμάντι» του μπέιζμπολ είναι μια τετράγωνη περιοχή πλευράς 30 m. Ένας παίκτης τρέχει από την πρώτη στη δεύτερη «βάση» με ταχύτητα 5 m/sec (δείτε το σχήμα).

(α) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του παίκτη από την τρίτη βάση τη στιγμή που απέχει 10 m από την πρώτη βάση;

(β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής των γωνιών θ_1 και θ_2 (δείτε το σχήμα) την ίδια στιγμή;

(γ) Τη στιγμή που ο παίκτης φθάνει στη δεύτερη βάση τρέχει με 4 m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής των γωνιών θ_1 και θ_2 τη στιγμή εκείνη;



38. *Πλοία* Δύο πλοία αποπλέουν από το σημείο O και κινούνται σε ευθείες πορείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120°. Το πλοίο A πλέει με ταχύτητα 14 κόμβων (1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι την ώρα· 1 ναυτικό μίλι ≈ 1852 m). Το πλοίο B κινείται με ταχύτητα 21 κόμβων. Πόσο γρήγορα απομακρύνονται μεταξύ τους τα πλοία τη στιγμή που $OA = 5$ και $OB = 3$ ναυτικά μίλια;

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι η παράγωγος συναρτήσεως f; Πώς σχετίζεται το πεδίο ορισμού της με αυτό της f; Δώστε παραδείγματα.
2. Τι ρόλο παίζει η παράγωγος στον ορισμό της κλίσης, της εφαπτομένης, και του ρυθμού μεταβολής;
3. Πώς μπορούμε μερικές φορές να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συναρτήσεως βάσει του πίνακα τιμών της συναρτήσεως;
4. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ανοιχτό διάστημα; Το ίδιο ερώτημα για κλειστό διάστημα.
5. Ποια η σχέση μεταξύ παραγώγων και πλευρικών παραγώγων;
6. Περιγράψτε γεωμετρικά μια χαρακτηριστική περίπτωση στην οποία μια συνάρτηση *δεν* έχει παράγωγο σε ένα σημείο.
7. Ποια σχέση υπάρχει (εφόσον υπάρχει) μεταξύ της διαφορισιμότητας και της συνέχειας συναρτήσεως σε σημείο;
8. Θα μπορούσε η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$
να είναι η παράγωγος κάποιας άλλης συνάρτησης στο διάστημα $[-1, 1]$; Εξηγήστε.
9. Ποιους κανόνες υπολογισμού παραγώγων γνωρίζετε; Δώστε μερικά παραδείγματα.
10. Εξηγήστε πώς οι ακόλουθοι τρεις τύποι
(α) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (β) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$
(γ) $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$
μας επιτρέπουν την παραγώγιση οποιουδήποτε πολυωνύμου.
11. Ποιον επιπλέον τύπο χρειαζόμαστε ώστε μαζί με αυτούς της Ερωτήσεως 10 να μπορούμε να παραγωγίζουμε ρητές συναρτήσεις;

12. Τι είναι η δεύτερη παράγωγος; Τι η τρίτη παράγωγος; Πόσες παραγώγους έχουν οι συναρτήσεις που γνωρίζετε; Δώστε μερικά παραδείγματα.
13. Ποια η σχέση μεταξύ του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής μιας συναρτήσεως; Δώστε ένα παράδειγμα.
14. Πώς προκύπτουν οι παράγωγοι στη μελέτη της κίνησης; Τι πληροφορία μεταφέρουν για την κίνηση σώματος σε ευθεία οι παράγωγοι της συναρτήσεως θέσεως του σώματος; Δώστε παραδείγματα.
15. Πώς προκύπτουν οι παράγωγοι στα οικονομικά;
16. Δώστε κι άλλα παραδείγματα εφαρμογής των παραγώγων.
17. Τι σχέση έχουν τα όρια $\lim_{h\to 0}((\sin h)/h)$ και $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ με τις παραγώγους των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου; Ποιες *είναι* οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών;
18. Πώς μπορείτε, αν γνωρίζετε τις παραγώγους των $\sin x$ και $\cos x$, να υπολογίσετε τις παραγώγους των $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, και $\csc x$; Ποιες *είναι* οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών;
19. Ποια είναι τα σημεία συνέχειας των έξι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Πώς το ξέρετε;
20. Με ποιον κανόνα βρίσκουμε την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως που προκύπτει από δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις; Πώς υπολογίζουμε την τιμή αυτής της παραγώγου; Δώστε παραδείγματα.
21. Με ποιον κανόνα βρίσκουμε την κλίση dy/dx μιας παραμετρικοποιημένης καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$; Πότε ισχύει ο κανόνας αυτός; Πότε περιμένουμε να είμαστε σε θέση να βρούμε και τη δεύτερη παράγωγο d^2y/dx^2; Δώστε παραδείγματα.
22. Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, πώς υπολογίζουμε την $(d/dx)(u^n)$ για n ακέραιο; Για n ρητό; Δώστε παραδείγματα.
23. Τι είναι η παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως; Πότε αποβαίνει χρήσιμη; Δώστε παραδείγματα.
24. Πώς προκύπτουν τα προβλήματα συναφών ρυθμών; Δώστε παραδείγματα.
25. Περιγράψτε μια μέθοδο λύσεως προβλημάτων συναφών ρυθμών. Επεξηγήστε με ένα παράδειγμα.

Ασκήσεις κεφαλαίου

Παράγωγοι συναρτήσεων

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 1-40.

1. $y = x^5 - 0{,}125x^2 + 0{,}25x$
2. $y = 3 - 0{,}7x^3 + 0{,}3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$
11. $y = 2\tan^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{\sin x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \cot^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta}\sin\theta$
18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$
19. $r = \sin\sqrt{2\theta}$
20. $r = \sin(\theta + \sqrt{\theta + 1})$
21. $y = \dfrac{1}{2}x^2\csc\dfrac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$
25. $y = 5\cot x^2$
26. $y = x^2\cot 5x$
27. $y = x^2\sin^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2}\sin^2(x^3)$
29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$
35. $r = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$
36. $r = \left(\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$
37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$
38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$
39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \sin 2x)^{3/2}}$
40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως

Στις Ασκήσεις 41-48, βρείτε την dy/dx.

41. $xy + 2x + 3y = 1$
42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
45. $\sqrt{xy} = 1$
46. $x^2y^2 = 1$
47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$
48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

Στις Ασκήσεις 49 και 50, βρείτε την dp/dq.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$ **50.** $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

Στις Ασκήσεις 51 και 52, βρείτε την dr/ds.

51. $r\cos 2s + \sin^2 s = \pi$ **52.** $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Βρείτε την d^2y/dx^2 με παραγώγιση πεπλεγμένης συναρτήσεως:

(α) $x^3 + y^3 = 1$ (β) $y^2 = 1 - \dfrac{2}{x}$

54. (α) Παραγωγίστε τη σχέση $x^2 - y^2 = 1$, για να δείξετε ότι $dy/dx = x/y$.

(β) Κατόπιν δείξτε ότι $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Αριθμητικές τιμές παραγώγων

55. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και οι πρώτες τους παράγωγοι έχουν τις ακόλουθες τιμές στα $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	−3	1/2
1	3	5	1/2	−4

Βρείτε τις πρώτες παραγώγους των ακόλουθων συνδυασμών για την τιμή του x που δίδεται.

(α) $6f(x) - g(x)$, $x = 1$ (β) $f(x)g^2(x)$, $x = 0$

(γ) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$, $x = 1$ (δ) $f(g(x))$, $x = 0$

(ε) $g(f(x))$, $x = 0$ (στ) $(x + f(x))^{3/2}$, $x = 1$

(ζ) $f(x + g(x))$, $x = 0$

56. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ και η πρώτη της παράγωγος έχουν τις ακόλουθες τιμές στα $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	−2
1	−3	1/5

Βρείτε τις πρώτες παραγώγους των ακόλουθων συνδυασμών για την τιμή του x που δίδεται.

(α) $\sqrt{x}\,f(x)$, $x = 1$ (β) $\sqrt{f(x)}$, $x = 0$

(γ) $f(\sqrt{x})$, $x = 1$ (δ) $f(1 - 5\tan x)$, $x = 0$

(ε) $\dfrac{f(x)}{2 + \cos x}$, $x = 0$ (στ) $10\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) f^2(x)$, $x = 1$

57. Βρείτε την τιμή της dy/dt για $t = 0$ αν $y = 3\sin 2x$ και $x = t^2 + \pi$.

58. Βρείτε την τιμή της ds/du για $u = 2$ αν $s = t^2 + 5t$ και $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.

59. Βρείτε την τιμή της dw/ds για $s = 0$ αν $w = \sin(\sqrt{r} - 2)$ και $r = 8\sin(s + \pi/6)$.

60. Βρείτε την τιμή της dr/dt για $t = 0$ αν $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ και $\theta^2 t + \theta = 1$.

61. Αν $y^3 + y = 2\cos x$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(0, 1)$.

62. Αν $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(8, 8)$.

Ορισμός παραγώγων

Στις Ασκήσεις 63 και 64, βρείτε την παράγωγο εφαρμόζοντας τον ορισμό.

63. $f(t) = \dfrac{1}{2t+1}$ **64.** $g(x) = 2x^2 + 1$

65. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 0$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

66. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 0$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

67. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 1$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 1$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

68. *Μάθετε γράφοντας* Για ποια τιμή ή τιμές της σταθεράς m, αν υπάρχουν, είναι η

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

(α) συνεχής στο $x = 0$;

(β) διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Κλίσεις, εφαπτομένες και κάθετες

69. *Εφαπτομένες με καθορισμένη κλίση* Υπάρχουν σημεία της καμπύλης $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ με κλίση $-3/2$; Αν ναι, βρείτε τα.

70. *Εφαπτομένες με καθορισμένη κλίση* Υπάρχουν σημεία της καμπύλης $y = x - 1/(2x)$ με κλίση 3; Αν ναι, βρείτε τα.

71. *Οριζόντιες εφαπτομένες* Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ όπου η εφαπτομένη γίνεται παράλληλη στον άξονα x.

72. *Τετμημένες και τεταγμένες εφαπτομένων* Βρείτε την τετμημένη και την τεταγμένη της ευθείας που εφάπτεται της καμπύλης $y = x^3$ στο σημείο $(-2, -8)$.

73. *Εφαπτομένες κάθετες ή παράλληλες σε ευθείες* Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ όπου η εφαπτομένη είναι

(α) κάθετη στην ευθεία $y = 1 - (x/24)$

(β) παράλληλη στην ευθεία $y = \sqrt{2} - 12x$.

74. *Εφαπτομένες που τέμνονται* Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της καμπύλης $y = (\pi \sin x)/x$ στα $x = \pi$ και $x = -\pi$ τέμνονται κάθετα.

75. *Κάθετες παράλληλες σε ευθεία* Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, όπου η κάθετος είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x/2$. Σχεδιάστε πρόχειρα σε κοινό σχήμα την καμπύλη και τις καθέτους της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

76. *Εφαπτομένες και κάθετες* Βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη $y = 1 + \cos x$ στο σημείο $(\pi/2, 1)$. Σχεδιάστε πρόχειρα σε κοινό σχήμα την καμπύλη, την εφαπτομένη και την κάθετο, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

77. *Εφαπτόμενη παραβολή* Η παραβολή $y = x^2 + C$ εφάπτεται της ευθείας $y = x$. Βρείτε το C.

78. *Κλίση εφαπτομένης* Δείξτε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^3$ σε τυχόν σημείο της (a, a^3) τέμνει την καμπύλη σε σημείο στο οποίο η κλίση είναι τετραπλάσια της κλίσης στο (a, a^3).

79. *Εφαπτόμενη υπερβολή* Για ποια τιμή του c εφάπτεται η καμπύλη $y = c/(x + 1)$ της ευθείας που διέρχεται από τα $(0, 3)$ και $(5, -2)$;

80. *Κάθετος σε κύκλο* Δείξτε ότι η κάθετος σε τυχόν σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$ διέρχεται από την αρχή.

Εφαπτομένες και κάθετες πεπλεγμένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 81-86, βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη στο σημείο που δίδεται.

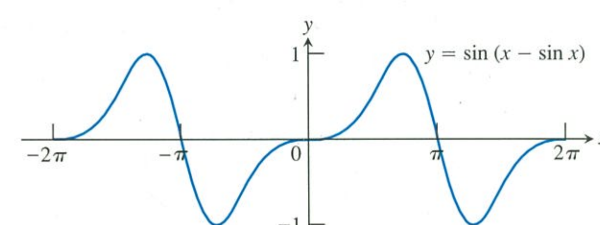
81. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$ **82.** $x^3 + y^2 = 2$, $(1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$ **84.** $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$ **86.** $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$

87. Βρείτε την κλίση της καμπύλης $x^3y^3 + y^2 = x + y$ στα σημεία $(1, 1)$ και $(1, -1)$.

88. *Μάθετε γράφοντας* Στην ακόλουθη γραφική παράσταση η καμπύλη $y = \sin(x - \sin x)$ μοιάζει να έχει οριζόντιες εφαπτομένες στον άξονα x. Αληθεύει αυτό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

Εφαπτομένες παραμετρικοποιημένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 89 και 90, βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία του επιπέδου xy η οποία εφάπτεται της καμπύλης στο σημείο που αντιστοιχεί στο t που δίδεται. Στο ίδιο σημείο βρείτε την d^2y/dx^2.

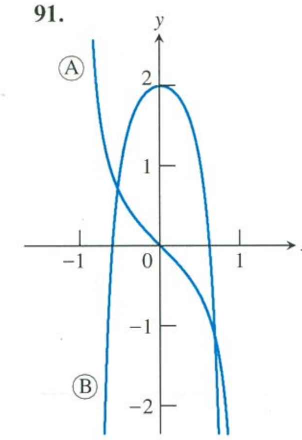
89. $x = (1/2)\tan t$, $y = (1/2)\sec t$· $t = \pi/3$

90. $x = 1 + 1/t^2$, $y = 1 - 3/t$· $t = 2$

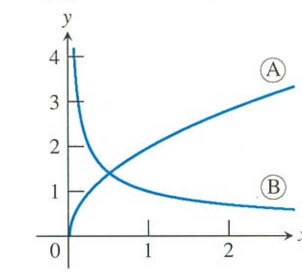
Ανάλυση γραφικών παραστάσεων

Κάθε σχήμα στις Ασκήσεις 91 και 92 δείχνει δύο γραφήματα: το γράφημα της συναρτήσεως $y = f(x)$ μαζί με αυτό της παραγώγου της $f'(x)$. Εξηγήστε πώς μπορούμε να ξεχωρίσουμε το γράφημα της καθεμίας.

91.



92.

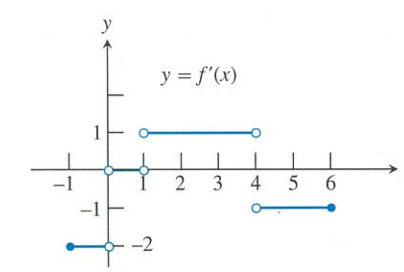


93. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες πληροφορίες για να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $y = f(x)$ για $-1 \le x \le 6$.

i. Το γράφημα της f αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους.

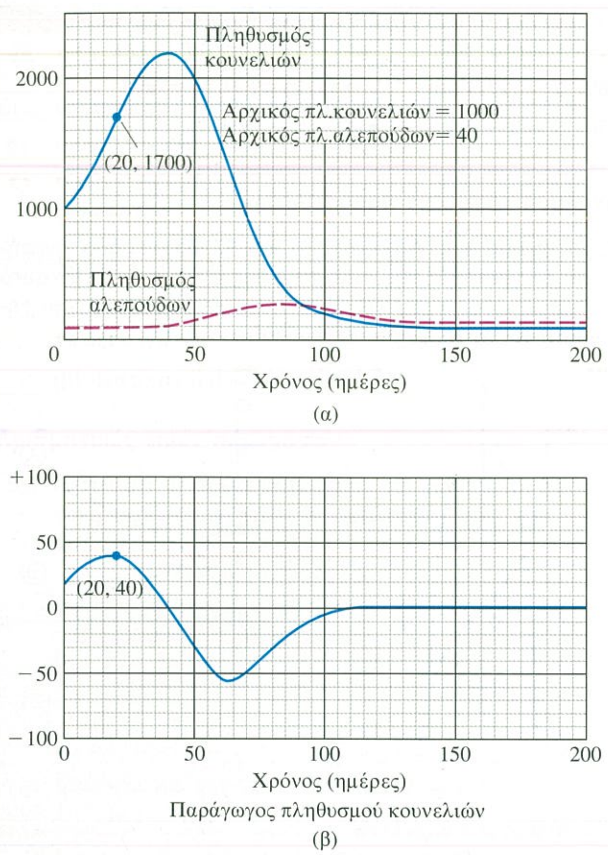
ii. Το γράφημα αρχίζει στο σημείο $(-1, 2)$.

iii. Η παράγωγος της f, στα σημεία όπου ορίζεται, ισούται με την κλιμακωτή συνάρτηση που παρατίθεται.



94. Επαναλάβετε την Άσκηση 93, υποθέτοντας ότι το γράφημα αρχίζει από το σημείο $(-1, 0)$ αντί του $(-1, 2)$.

Οι Ασκήσεις 95 και 96 αναφέρονται στα διαγράμματα του Σχήματος 2.46. Στο σχήμα (α) φαίνονται οι πληθυσμοί κουνελιών και αλεπούδων ενός μικρού οικοσυστήματος στην Αρκτική. Οι πληθυσμοί είναι σχεδιασμένοι συναρτήσει του χρόνου, για ένα διάστημα 200 ημερών. Ο πληθυσμός των κουνελιών αρχικά αυξάνεται, καθώς αυτά αναπαράγονται. Όμως οι αλεπούδες τρέφονται με τα κουνέλια και, καθώς ο πληθυσμός των αλεπούδων αυξάνεται, ο πληθυσμός των κουνελιών σταθεροποιείται και κατόπιν αρχίζει να μειώνεται. Στο Σχήμα 2.46β φαίνεται η παράγωγος του πληθυσμού των κουνελιών· κάναμε τη σχεδίαση αυτή υπολογίζοντας κλίσεις στο σχήμα (α).



ΣΧΗΜΑ 2.46 Πληθυσμοί κουνελιών (θηραμάτων) και αλεπούδων (θηρευτών), στην τροφική αλυσίδα μιας αρκτικής περιοχής.

95. **(α)** Ποια τιμή της παραγώγου του πληθυσμού των κουνελιών αντιστοιχεί στον μέγιστο πληθυσμό κουνελιών; Ποια στον ελάχιστο;

(β) Ποιος πληθυσμός κουνελιών στο Σχήμα 2.46 αντιστοιχεί στη μέγιστη παράγωγο; Ποιος στην ελάχιστη (αρνητική);

96. Σε τι μονάδες μετρώνται οι κλίσεις των καμπυλών που αντιστοιχούν στους πληθυσμούς αλεπούδων και κουνελιών;

Συναφείς ρυθμοί

97. *Ορθός κυκλικός κύλινδρος* Το ολικό εμβαδόν επιφάνειας S κυλίνδρου εξαρτάται από την ακτίνα βάσης r και το ύψος h βάσει της εξίσωσης $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dr/dt για h σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dh/dt για r σταθερό;

(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt, dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

(δ) Ποια η σχέση μεταξύ των dr/dt και dh/dt για S σταθερό;

98. *Ορθός κυκλικός κώνος* Το εμβαδόν της πλευρικής επιφάνειας S ενός κώνου εξαρτάται από την ακτίνα βάσης r και το ύψος h βάσει της εξίσωσης $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dr/dt για h σταθερό;

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dh/dt για r σταθερό;

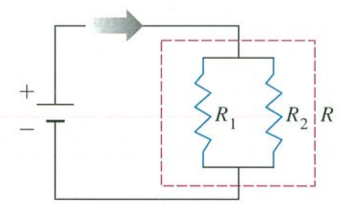
(γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt, dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

99. *Μεταβαλλόμενο εμβαδόν κύκλου* Η ακτίνα κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό $-2/\pi$ m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του κύκλου όταν $r = 10$ m;

100. *Μεταβαλλόμενες ακμές κύβου* Ο όγκος κύβου αυξάνεται με ρυθμό 1200 cm^3/min τη στιγμή που το μήκος μιας ακμής του είναι 20 cm. Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το μήκος της ακμής;

101. *Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων* Αν δύο αντιστάτες των R_1 και R_2 Ω συνδεθούν παράλληλα σε ηλεκτρικό κύκλωμα, η ισοδύναμη ολική αντίσταση R δίδεται από τη σχέση

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Αν το R_1 μειώνεται με ρυθμό 1 Ω/sec και το R_2 αυξάνεται με ρυθμό 0,5 Ω/sec, τότε ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του R για $R_1 = 75$ Ω και $R_2 = 50$ Ω;

102. *Εμπέδηση κυκλώματος σε σειρά* Η εμπέδηση Z (Ω) ενός κυκλώματος σε σειρά συνδέεται με την αντίσταση R (Ω) και την άεργη αντίσταση X (Ω) μέσω της εξίσωσης $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Αν το R αυξάνεται με ρυθμό 3 Ω/sec και το X μειώνεται με ρυθμό 2 Ω/sec, τότε με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το Z όταν $R = 10$ Ω και $X = 20$ Ω;

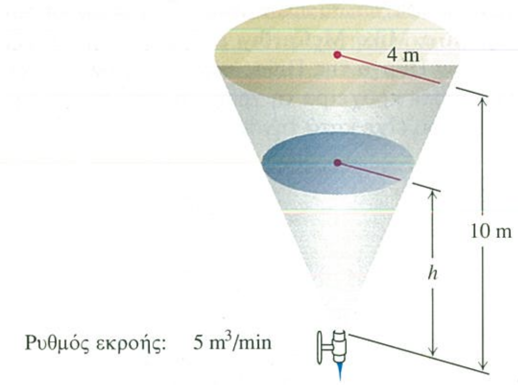
103. *Ταχύτητα κινούμενου σωματιδίου* Οι συντεταγμένες θέσεως ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t με $dx/dt = 10$ m/sec και $dy/dt = 5$ m/sec. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται το σωματίδιο από την αρχή καθώς περνά από το σημείο $(3, -4)$;

104. *Κίνηση σωματιδίου* Σωματίδιο κινείται επί της καμπύλης $y = x^{3/2}$ στο πρώτο τεταρτημόριο, έτσι ώστε η απόστασή του από την αρχή να αυξάνεται με ρυθμό 11 μονάδες ανά sec. Βρείτε το dx/dt για $x = 3$.

105. *Δεξαμενή που αδειάζει* Από την κωνική δεξαμενή του Σχήματος 2.47 χύνεται νερό με ρυθμό 5 m^3/min.

(α) Ποια η σχέση μεταξύ των μεταβλητών h και r στο σχήμα;

(β) Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η υδάτινη στάθμη όταν $h = 6$ m;



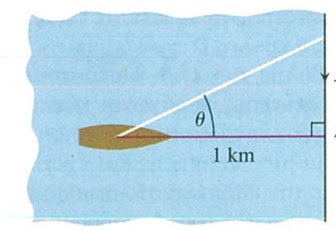
ΣΧΗΜΑ 2.47 Η κωνική δεξαμενή της Άσκησης 105.

106. *Περιστρεφόμενο καρούλι* Κατά μήκος ενός δρόμου ξετυλίγεται καλώδιο για να τοποθετηθεί σε στύλους. Το ξετύλιγμα γίνεται από καρούλι όπου το καλώδιο ηταν τυλιγμένο ομοιόμορφα, σε επιστρώσεις σταθερής ακτίνας (δείτε το Σχήμα 2.48). Αν το φορτηγό που τραβά το καλώδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec (δηλαδή λίγο παραπάνω από 7 km/h), χρησιμοποιήστε την εξίσωση $s = r\theta$ για να βρείτε πόσο γρήγορα (σε rad/sec) γυρίζει το καρούλι τη στιγμή που ξετυλίγεται η επίστρωση ακτίνας 1,2 m.

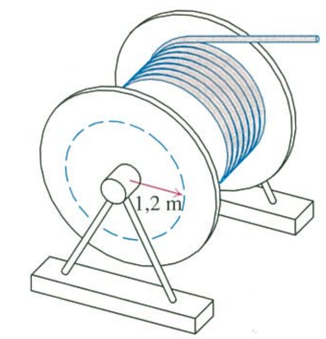
107. *Προβολέας που σαρώνει* Το σχήμα δείχνει σκάφος σε απόσταση 1 km από την ακτή, την οποία σαρώνει με προβολέα. Ο προβολέας περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό, $d\theta/dt = -0{,}6$ rad/sec.

(α) Με τι ταχύτητα κινείται το φως του προβολέα στην ακτή όταν το σκάφος φθάνει στο σημείο A;

(β) Ρυθμός περιστροφής 0,6 rad/sec πόσες περιστροφές ανά λεπτό σημαίνει;



108. *Σημεία κινούμενα στους άξονες συντεταγμένων* Τα σημεία A και B κινούνται στους άξονες x και y, αντίστοιχα, κατά τρόπο ώστε η απόσταση r (σε m) της ευθείας AB από την αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μήκος OA (αυξάνεται ή μειώνεται;) τη στιγμή που $OB = 2r$ και το B πλησιάζει την αρχή O με ταχύτητα $0{,}3r$ m/sec;



ΣΧΗΜΑ 2.48 Το τηλεφωνικό καλώδιο της Άσκησης 106.

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

1. Η εξίσωση $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ καλείται **ταυτότητα** εφόσον ισχύει για όλες τις τιμές του θ. Η εξίσωση $\sin\theta = 0{,}5$ δεν είναι ταυτότητα διότι ισχύει μονάχα για συγκεκριμένες τιμές του θ, όχι για όλες. Αν παραγωγίσετε ως προς θ και τα δύο μέλη μιας τριγωνομετρικής ταυτότητας του θ, η καινούρια εξίσωση θα είναι επίσης ταυτότητα.

Παραγωγίστε τις ακόλουθες ταυτότητες ώστε να δείξετε ότι οι προκύπτουσες εξισώσεις ισχύουν για κάθε θ.

(α) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(β) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2. *Μάθετε γράφοντας* Αν η ταυτότητα $\sin(x + a) = \sin x\cos a + \cos x\sin a$ παραγωγιστεί ως προς x, η εξίσωση που προκύπτει είναι ταυτότητα; Μπορούμε να πούμε το ίδιο για την εξίσωση $x^2 - 2x - 8 = 0$; Εξηγήστε.

3. **(α)** Βρείτε τις τιμές των σταθερών a, b, και c ώστε οι

$$f(x) = \cos x \quad \text{και} \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad \text{και} \quad f''(0) = g''(0).$$

(β) Βρείτε τις τιμές των σταθερών b και c ώστε οι

$$f(x) = \sin(x + a) \quad \text{και} \quad g(x) = b\sin x + c\cos x$$

να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$f(0) = g(0) \quad \text{και} \quad f'(0) = g'(0).$$

(γ) Για τις τιμές των a, b, και c που βρήκατε στα (α) και (β), τι προκύπτει για την τρίτη και τέταρτη παράγωγο των f και g;

4. *Λύσεις διαφορικών εξισώσεων*

(α) Δείξτε ότι οι $y = \sin x$, $y = \cos x$, και $y = a\cos x + b\sin x$ (a και b σταθερές) ικανοποιούν την εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

(β) Πώς θα τροποποιούσατε τις συναρτήσεις στο (α) ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$y'' + 4y = 0;$$

Γενικεύστε το αποτέλεσμα αυτό.

5. *Συνεφαπτόμενος κύκλος* Βρείτε τις τιμές των h, k, και a για τις οποίες ο κύκλος $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ εφάπτεται της παραβολής $y=x^2+1$ στο σημείο (1, 2) και επιπλέον οι δεύτερες παράγωγοι κύκλου και παραβολής d^2y/dx^2 έχουν την ίδια τιμή. Τέτοιου είδους κύκλοι που εφάπτονται μιας καμπύλης και έχουν ίδια δεύτερη παράγωγο με την καμπύλη στο σημείο επαφής καλούνται *συνεφαπτόμενοι*. Θα τους ξαναδούμε στο Κεφάλαιο 10.

6. *Οριακό έσοδο* Ένα λεωφορείο χωρά 60 άτομα. Ο αριθμός x των ανά διαδρομή επιβατών που χρησιμοποιούν το λεωφορείο συνδέεται με το αντίτιμο του εισιτηρίου p (σε ευρώ) μέσω της σχέσης $p=[3-(x/40)]^2$. Γράψτε μια εξίσωση για το συνολικό έσοδο ανά διαδρομή $r(x)$ που εισπράττεται από την εταιρεία που εκμεταλλεύεται τη διαδρομή. Με πόσους επιβάτες ανά διαδρομή μηδενίζεται ο ρυθμός dr/dx; Ποιο είναι τότε το αντίτιμο του εισιτηρίου; (Το αντίτιμο αυτό μεγιστοποιεί τα έσοδα, προτρέποντας την εταιρεία να επαναπροσδιορίσει το τιμολόγιό της.)

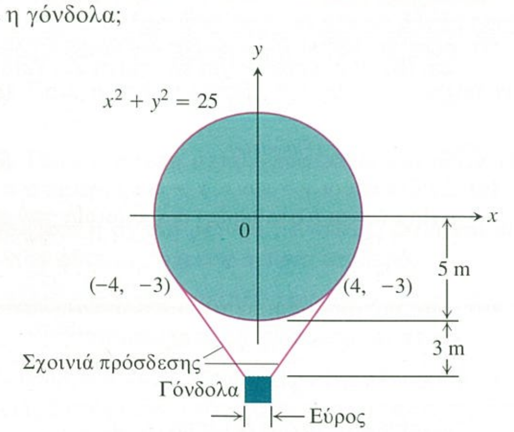
7. *Βιομηχανική παραγωγή*

(α) Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν συχνά τον όρο «ρυθμός αύξησης» κατά σχετική έννοια. Για παράδειγμα, έστω $u=f(t)$ ο αριθμός των εργατών τη χρονική στιγμή t σε μια βιομηχανία. (Θεωρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι διαφορίσιμη παρά το ότι παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, έχει δηλαδή κλιμακωτό χαρακτήρα.)

Έστω $v=g(t)$ η μέση παραγωγή ανά εργάτη τη στιγμή t. Η συνολική παραγωγή ισούται τότε με $y=uv$. Αν το εργατικό δυναμικό αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 4% ($du/dt=0{,}04u$) και η παραγωγή ανά εργάτη αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 5% ($dv/dt=0{,}05v$), να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της συνολικής παραγωγής, y.

(β) Έστω ότι το εργατικό δυναμικό στο ερώτημα (α) μειώνεται με ετήσιο ρυθμό 2% ενώ η παραγωγή ανά εργάτη αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 3%. Η συνολική παραγωγή αυξάνεται τότε ή μειώνεται, και με τι ρυθμό;

8. *Σχεδιάζοντας μια γόνδολα* Ο σχεδιαστής ενός σφαιρικού αερόστατου διαμέτρου 10 m θέλει να μεταφέρει με αυτό μια γόνδολα. Με σχοινιά που εφάπτονται του μπαλονιού προσδένει τη γόνδολα (δείτε το σχήμα) 3 m χαμηλότερα από το κατώτατο σημείο του αερόστατου. Στο σχήμα φαίνονται δύο από τα σχοινιά πρόσδεσης, τα οποία εφάπτονται της σφαιρικής επιφάνειας στα σημεία $(-4,-3)$ και $(4,-3)$. Πόσο φαρδιά πρέπει να είναι η γόνδολα;



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

9. *Πτώση με αλεξίπτωτο από την Πίζα* Στη φωτογραφία εικονίζεται ο Mike McCarthy ενώ πέφτει με αλεξίπτωτο από τον Πύργο της Πίζας στις 5 Αυγούστου του 1988. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της ταχύτητας που είχε κατά την πτώση του.

Ο Λονδρέζος Mike McCarthy πήδηξε από τον Πύργο της Πίζας, κάνοντας παγκόσμιο ρεκόρ πτώσεως με αλεξίπτωτο από χαμηλό ύψος (55 m).
Πηγή: Boston Globe, Aug. 6, 1988.)

10. *Κίνηση σωματιδίου* Για χρονικές στιγμές $t\ge 0$ η θέση ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα δίδεται από τη σχέση

$$s=10\cos(t+\pi/4).$$

(α) Ποια η αρχική θέση του σωματιδίου (για $t=0$);

(β) Ποια τα ακρότατα σημεία (εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων) της κίνησης του σωματιδίου;

(γ) Στα σημεία του ερωτήματος (β) να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου.

(δ) Πότε διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχή των αξόνων το σωματίδιο; Ποια είναι τη στιγμή εκείνη η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνσή του;

11. *Εκτοξεύοντας έναν συνδετήρα* Πάνω στη Γη μπορείτε εύκολα να εκτοξεύσετε κατακόρυφα έναν συνδετήρα σε ύψος 20 m με ένα λαστιχάκι. Σε χρόνο t sec μετά την εκτόξευσή του ο συνδετήρας βρίσκεται σε ύψος $s=20t-4{,}9t^2$ m πάνω από το κεφάλι σας.

(α) Πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος ο συνδετήρας; Με πόση ταχύτητα φεύγει από το χέρι σας;

(β) Πάνω στη Σελήνη, η ίδια αρχική επιτάχυνση από το λαστιχάκι θα εκσφενδονίσει τον συνδετήρα σε ύψος $s=20t-0{,}8t^2$ m μέσα σε t sec. Περίπου πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να φθάσει σε μέγιστο ύψος ο συνδετήρας, και ποιο είναι αυτό;

12. *Ταχύτητες δύο σωματιδίων* Τη χρονική στιγμή t sec, οι θέσεις δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1=3t^3-12t^2+18t+5$ m και $s_2=-t^3+9t^2-12t$ m. Πότε έχουν ίσες ταχύτητες τα σωματίδια;

13. *Ταχύτητα σωματιδίου* Ένα σωματίδιο σταθερής μάζας m κινείται επί του άξονα x. Η ταχύτητα v και η θέση του x ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=\frac{1}{2}k(x_0^2-x^2),$$

όπου k, v_0, και x_0 είναι σταθερές. Δείξτε ότι για $v\neq 0$, θα ισχύει

$$m\frac{dv}{dt}=-kx.$$

14. *Μέση και στιγμιαία ταχύτητα*

(α) Δείξτε ότι αν η θέση x ενός κινητού δίδεται από τη δευτεροβάθμια συνάρτηση του t, $x=At^2+Bt+C$, τότε η μέση ταχύτητα στο τυχόν χρονικό διάστημα $[t_1,t_2]$ ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα στον μέσον του χρονικού διαστήματος.

(β) Ποια η γεωμετρική σημασία του αποτελέσματος (α);

15. Να βρεθούν όλες οι τιμές των σταθερών m και b για τις οποίες η συνάρτηση

$$y=\begin{cases}\sin x, & \text{για } x<\pi\\ mx+b, & \text{για } x\ge\pi\end{cases}$$

είναι

(α) συνεχής στο $x=\pi$.

(β) διαφορίσιμη στο $x=\pi$.

16. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε αν και γιατί η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{για } x\neq 0\\ 0, & \text{για } x=0\end{cases}$$

διαθέτει παράγωγο στο $x=0$.

17. **(α)** Για ποιες τιμές των a και b είναι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}ax, & x<2\\ ax^2-bx+3, & x\ge 2\end{cases}$$

διαφορίσιμη για κάθε x;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης της f.

18. **(α)** Για ποιες τιμές των a και b είναι η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}ax+b, & x\le -1\\ ax^3+x+2b, & x>-1\end{cases}$$

διαφορίσιμη για κάθε x;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης της g.

19. *Περιττές διαφορίσιμες συναρτήσεις* Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζει η παράγωγος μιας περιττής διαφορίσιμης συναρτήσεως του x; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

20. *Άρτιες διαφορίσιμες συναρτήσεις* Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζει η παράγωγος μιας άρτιας διαφορίσιμης συναρτήσεως του x; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

21. *Ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα* Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το σημείο x_0. Έστω ακόμη ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, ότι $f(x_0)=0$, και ότι η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι το γινόμενο fg είναι διαφορίσιμο στο x_0. Βλέπετε έτσι ότι, ενώ η $|x|$ (για παράδειγμα) δεν είναι διαφορίσιμη στο $x=0$, το γινόμενο $x|x|$ *είναι* διαφορίσιμο στο $x=0$.

22. *(Συνέχεια της Άσκησης 21)* Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Ασκήσεως 21 για να αποδείξετε τη διαφορισιμότητα των παρακάτω συναρτήσεων στο $x=0$.

(α) $|x|\sin x$ **(β)** $x^{2/3}\sin x$ **(γ)** $\sqrt[3]{x}(1-\cos x)$

(δ) $h(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

23. *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε αν η παράγωγος της συναρτήσεως

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x=0$. Το ίδιο για την παράγωγο της $k(x)=xh(x)$. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

24. Έστω ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες για όλες τις τιμές των x και y:

i. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

ii. $f(x)=1+xg(x)$, όπου $\lim_{x\to 0} g(x)=1$.

Δείξτε ότι η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x και ότι $f'(x)=f(x)$.

25. *Ο γενικευμένος τύπος της παραγώγου γινομένου* Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής (Παράρτημα 1) δείξτε ότι αν $y=u_1u_2\cdots u_n$ είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο διαφορίσιμων συναρτήσεων, τότε η συνάρτηση y είναι διαφορίσιμη στο κοινό πεδίο ορισμού τους και ότι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}u_2\cdots u_n+u_1\frac{du_2}{dx}\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}.$$

26. *Ο κανόνας του Leibniz για υψηλότερης τάξης παραγώγους γινομένων* Ο κανόνας του Leibniz για παραγώγους υψηλότερης τάξης γινομένων διαφορίσιμων συναρτήσεων λέει ότι

(α) $\dfrac{d^2(uv)}{dx^2}=\dfrac{d^2u}{dx^2}v+2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}+u\dfrac{d^2v}{dx^2}$

(β) $\dfrac{d^3(uv)}{dx^3}=\dfrac{d^3u}{dx^3}v+3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx}+3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2}+u\dfrac{d^3v}{dx^3}$

(γ)
$$\frac{d^n(uv)}{dx^n}=\frac{d^nu}{dx^n}v+n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k}+\cdots+u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Οι εξισώσεις (α) και (β) αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (γ). Αποδείξτε τη (γ) με μαθηματική επαγωγή, κάνοντας χρήση της πρότασης

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\frac{m!}{k!(m-k)!}+\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

$||B|| \le |A - B|$. Για $A = g(x)$ και $B = M$, η ανισότητα αυτή παίρνει τη μορφή

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|,$$

η οποία, συνδυαζόμενη με την ανισότητα στο δεξιό μέλος της Εξ. (3), μας δίνει διαδοχικά,

$$\begin{aligned} ||g(x)| - |M|| &< \frac{|M|}{2} \\ -\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| &< \frac{|M|}{2} \\ \frac{|M|}{2} < |g(x)| &< \frac{3|M|}{2} \qquad (4) \\ |M| < 2|g(x)| &< 3|M| \\ \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} &< \frac{3}{|g(x)|}. \end{aligned}$$

Έτσι, η $0 < |x - c| < \delta_1$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)| \\ &< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)|. \qquad \text{Ανισότητα (4)} \end{aligned} \qquad (5)$$

Εφόσον $(1/2)|M|^2 \epsilon > 0$, θα υπάρχει αριθμός $\delta_2 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \qquad (6)$$

Παίρνοντας ως δ τον μικρότερο των δ_1 και δ_2, οι σχέσεις (5) και (6) ισχύουν ταυτόχρονα για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < |x - c| < \delta$. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα αυτά παίρνουμε

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη του τύπου ορίου πηλίκου.

Θεώρημα 4 Θεώρημα «σάντουιτς»
Έστω ότι η ανισότητα $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ισχύει για κάθε x κάποιου ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c, εκτός ίσως από το ίδιο το $x = c$. Έστω ακόμη ότι $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Τότε θα είναι $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Απόδειξη για δεξιά όρια Έστω ότι $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x η ανισότητα $c < x < c + \delta$ να συνεπάγεται ότι

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{και} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Συνδυαζόμενες οι παραπάνω με την $g(x) \le f(x) \le h(x)$ μας δίνουν

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \le f(x) &\le h(x) < L + \epsilon, \\ L - \epsilon < f(x) &< L + \epsilon, \\ -\epsilon < f(x) - L &< \epsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε x, η ανισότητα $c < x < c + \delta$ συνεπάγεται ότι $|f(x) - L| < \epsilon$.

Απόδειξη για αριστερά όρια Έστω ότι $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x η ανισότητα $c - \delta < x < c$ να συνεπάγεται ότι

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{και} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν όπως και πριν πως για κάθε x, η ανισότητα $c - \delta < x < c$ συνεπάγεται ότι $|f(x) - L| < \epsilon$.

Απόδειξη για αμφίπλευρα όρια Αν $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, τότε οι $g(x)$ και $h(x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο L καθώς $x \to c^+$ και καθώς $x \to c^-$· οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ και $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Συνεπώς, το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει και ισούται με L.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Π.2

1. *Γενικός τύπος ορίου αθροίσματος* Έστω ότι οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, και $f_3(x)$ έχουν όρια L_1, L_2, και L_3, αντίστοιχα, καθώς $x \to c$. Δείξτε ότι το άθροισμά τους έχει όριο $L_1 + L_2 + L_3$. Εφαρμόστε μαθηματική επαγωγή (Παράρτημα 1) για να γενικεύσετε το αποτέλεσμα αυτό στο άθροισμα κάθε πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων.

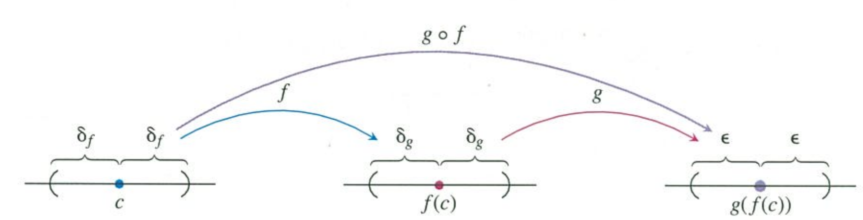
2. *Γενικός τύπος ορίου γινομένου* Εφαρμόστε τη μαθηματική επαγωγή και τον τύπο ορίου γινομένου του Θεωρήματος 1 για να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ έχουν όρια $L_1, L_2, \ldots, L_n$ καθώς $x \to c$, τότε
$$\lim_{x\to c} f_1(x) f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

3. *Όριο θετικής ακέραιας δύναμης* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to c} x = c$ και το αποτέλεσμα της Άσκησης 2 για να δείξετε ότι $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ για κάθε ακέραιο $n > 1$.

4. *Όρια πολυωνύμων* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to c}(k) = k$ για κάθε k, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 1 και 3, για να δείξετε ότι $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

5. *Όρια ρητών συναρτήσεων* Εφαρμόστε το Θεώρημα 1 και το αποτέλεσμα της Άσκησης 4 για να δείξετε ότι αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και $g(c) \ne 0$, τότε
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. *Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων* Στο Σχήμα Π.1 δίδεται μια διαγραμματική απόδειξη του ότι η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Με βάση το σχήμα, να δοθεί η απόδειξη. Η αποδεικτέα πρόταση είναι η ακόλουθη: Αν η f είναι συνεχής στο $x = c$ και η g είναι συνεχής στο $f(c)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο c.
Έστω ότι το c είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και ότι το $f(c)$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g. Θα χρησιμοποιήσετε λοιπόν αμφίπλευρα όρια. (Στην περίπτωση που έχουμε πλευρικά όρια, η επιχειρηματολογία είναι παρόμοια.)



ΣΧΗΜΑ Π.1 Διάγραμμα για την απόδειξη της πρότασης ότι η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Η συνέχεια της τελικής συνάρτησης ισχύει για κάθε σύνθεση πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων. Μοναδική απαίτηση είναι ότι η κάθε συνάρτηση οφείλει να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Στο σχήμα, η f είναι συνεχής στο c και η g στο $f(c)$.

Π.3 Απόδειξη του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

Εδώ θα αποδείξουμε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης της Ενότητας 2.5, χρησιμοποιώντας έννοιες από την Ενότητα 3.6.

Θεώρημα 3 Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

Αν η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $u = g(x)$ και η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ θα είναι διαφορίσιμη στο x, και θα ισχύει ότι

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{1}$$

Στον συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \tag{2}$$

όπου η dy/du έχει υπολογιστεί στο σημείο $u = g(x)$.

Απόδειξη Για να ακριβολογούμε, δείχνουμε εδώ ότι αν η g είναι διαφορίσιμη στο x_0 και η f είναι διαφορίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους θα είναι διαφορίσιμη στο x_0 και θα ισχύει

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Έστω Δx μια μεταβολή του x και έστω Δu και Δy οι αντίστοιχες μεταβολές των u και y. Όπως μπορείτε να δείτε στο Σχήμα Π.2,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

οπότε στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το όριο αυτό είναι $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Βάσει της Εξίσωσης (3) της Ενότητας 3.6,

$$\Delta u = g'(x_0)\,\Delta x + \epsilon_1\,\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\,\Delta x,$$

όπου $\epsilon_1 \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Ομοίως,

$$\Delta y = f'(u_0)\,\Delta u + \epsilon_2\,\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\,\Delta u,$$

όπου $\epsilon_2 \to 0$ καθώς $\Delta u \to 0$. Σημειώστε επίσης ότι $\Delta u \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις για τα Δu και Δy παίρνουμε

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\,\Delta x,$$

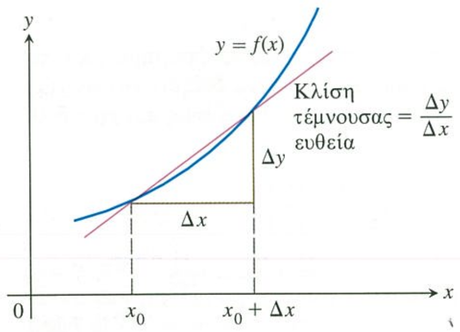
οπότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\,g'(x_0) + \epsilon_2\,g'(x_0) + f'(u_0)\,\epsilon_1 + \epsilon_2\,\epsilon_1.$$

Εφόσον τα ϵ_1 και ϵ_2 τείνουν στο μηδέν καθώς το Δx τείνει στο μηδέν, οι τρεις από τους τέσσερις όρους του δεξιού μέλους μηδενίζονται καθώς παίρνουμε το όριο, οπότε

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\,g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη.



Σχημα Π.2 Γραφική παράσταση του y συναρτήσει του x. Η παράγωγος του y ως προς x στο $x = x_0$ είναι $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$.

Π.4 Μιγαδικοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι εκφράσεις της μορφής $a + ib$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και το i συμβολίζει τον αριθμό $\sqrt{-1}$. Δυστυχώς, οι όροι «πραγματικός» και «φανταστικός» περιέχουν εννοιολογικές αποχρώσεις που κατά κάποιον τρόπο θέτουν τον αριθμό $\sqrt{-1}$ σε υποδεέστερη μοίρα στο μυαλό μας σε σχέση με τον $\sqrt{2}$, για παράδειγμα. Στην πραγματικότητα, όμως, απαιτήθηκε αρκετή φαντασία, υπό την έννοια της *εφευρετικότητας*, για να κατασκευαστεί το σύνολο των *πραγματικών* αριθμών, στο οποίο βασίζεται ο απειροστικός λογισμός. Στο παρόν παράρτημα, θα κάνουμε μια ανασκόπηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, παρουσιάζοντας τα διάφορα στάδια εξέλιξής τους. Αφού το έχουμε κάνει αυτό, η περαιτέρω επινόηση των μιγαδικών αριθμών δεν θα μας φανεί και τόσο παράδοξη.

Η εξέλιξη των πραγματικών αριθμών

Το πρωταρχικό στάδιο στην ανάπτυξη των αριθμών ήταν η αναγνώριση των **αριθμών καταμέτρησης** 1, 2, 3, . . . , τους οποίους τώρα αποκαλούμε **φυσικούς αριθμούς** ή **θετικούς ακεραίους.** Τους αριθμούς αυτούς μπορούμε να τους προσθέσουμε ή να τους πολλαπλασιάσουμε χωρίς να χρειαστεί να «βγούμε» από το σύνολο που τους περιέχει. Με άλλα λόγια, το σύνολο των θετικών ακεραίων είναι **κλειστό** στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Έτσι, αν m και n είναι τυχόντες θετικοί ακέραιοι, τότε και οι

$$m + n = p \qquad \text{και} \qquad mn = q \tag{1}$$

είναι επίσης θετικοί ακέραιοι.

Δοθέντων των δύο θετικών ακεραίων του αριστερού μέλους μίας εκ των Εξισώσεων (1), μπορούμε να βρούμε τον αντίστοιχο θετικό ακέραιο του δεξιού μέλους. Μάλιστα, μερικές φορές είναι δυνατόν να καθορίσουμε τους θετικούς αριθμούς m και p και κατόπιν να βρούμε τον θετικό ακέραιο n που ικανοποιεί τη σχέση $m + n = p$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $3 + n = 7$ μπορεί να λυθεί ακόμη και όταν οι μόνοι αριθμοί που γνωρίζουμε είναι οι θετικοί ακέραιοι. Όμως η εξίσωση $7 + n = 3$, δεν μπορεί να λυθεί παρά αφού διευρύνουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων.

Ο αριθμός μηδέν και οι αρνητικοί αριθμοί επινοήθηκαν προκειμένου να μπορούν να λυθούν εξισώσεις όπως η $7 + n = 3$. Σε έναν πολιτισμό που αναγνωρίζει όλους τους **ακεραίους**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

ένα μορφωμένο άτομο μπορεί πάντοτε να λύσει την εξίσωση $m + n = p$ μόλις του δοθούν δύο ακέραιοι της εξίσωσης αυτής.

Υποθέστε ότι το άτομο αυτό γνωρίζει πώς να πολλαπλασιάζει δύο τυχόντες ακεραίους της Εξίσωσης (2). Αν λοιπόν, του δοθούν οι m και q της Εξίσωσης (1), θα διαπιστώσει ότι μερικές φορές μπορεί να βρει το n και άλλες όχι. Αν διαθέτει φαντασία, ίσως εμπνευστεί από την κατάσταση αυτή και επινοήσει κάποιους επιπρόσθετους αριθμούς, εισάγοντας την έννοια των κλασμάτων ως διατεταγμένων ζευγών m/n των ακεραίων m και n. Ο αριθμός μηδέν έχει ειδικές ιδιότητες που μπορεί κατ' αρχάς να ξενίσουν τον ερευνητή μας, όμως εν τέλει θα διαπιστώσει ότι είναι βολικό να έχει όλους τους λόγους ακεραίων m/n, εξαιρώντας μόνον αυτούς με μηδενιζόμενο παρονομαστή. Το σύνολο αυτό, που καλείται σύνολο των **ρητών αριθμών,** παρέχει τώρα τη δυνατότητα εκτέλεσης των λεγόμενων **ρητών αριθμητικών πράξεων:**

1. (α) πρόσθεση
(β) αφαίρεση

2. (α) πολλαπλασιασμός
(β) διαίρεση

μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών του συνόλου, *με εξαίρεση τη διαίρεση με το μηδέν.*

Η γεωμετρία του μοναδιαίου τετραγώνου (Σχήμα Π.3) και το Πυθαγόρειο Θεώρημα έδειξαν ότι ήταν δυνατή γεωμετρικά η κατα-

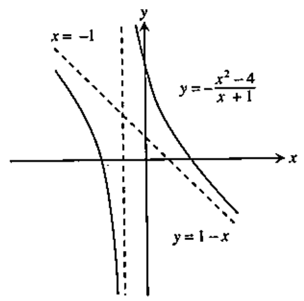
51. Στο ∞: ∞, στο $-\infty$: 0

53. Στο ∞: 0, στο $-\infty$: 0

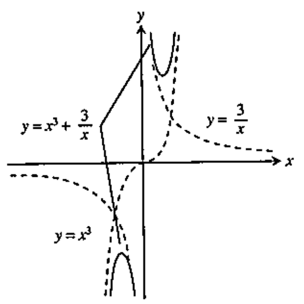
55. 1

57. 3

59. $y = -\dfrac{x^2-4}{x+1} = 1 - x + \dfrac{3}{x+1}$



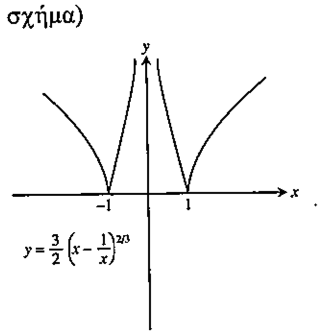
61. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ακολουθεί τον όρο που κυριαρχεί σε κάθε περιοχή.



63. (α) $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)

(β) $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)

(γ) Σημεία ανακάμψεως για $x = \pm 1$ (δείτε το ακόλουθο σχήμα)



Ενότητα 1.4, σελ. 128-130

1. Όχι· ασυνεχής στο $x = 2$· δεν ορίζεται στο $x = 2$

3. Συνεχής

5. (α) Ναι (β) Ναι (γ) Ναι (δ) Ναι

7. (α) Όχι (β) Όχι

9. 0

13. Ασυνεχής για $x = 2$

15. Ασυνεχής για $t = 3$ και για $t = 1$

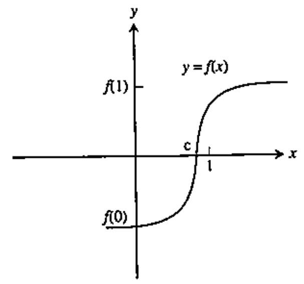
17. Ασυνεχής για $\theta = 0$

19. Συνεχής στο διάστημα $\left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

21. 0· συνεχής

23. 1· συνεχής

25. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) < 0$, $f(1) > 0 \Rightarrow$ λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής η $f(x)$ θα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(0)$ και $f(1) \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει τουλάχιστον μια λύση μεταξύ $x = 0$ και $x = 1$.



27. Και τα πέντε ερωτήματα ζητούν το ίδιο πράγμα, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής συνεχών συναρτήσεων.

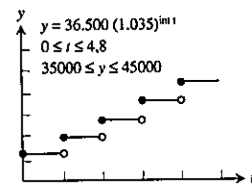
29. Υπάρχουν πολλές πιθανές εξηγήσεις. Για παράδειγμα, η $f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο $x = 2$ εφόσον δεν ορίζεται στο σημείο αυτό. Ωστόσο η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί, διότι η f έχει όριο (ίσο με 1) καθώς $x \to 2$.

31. $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \approx -1{,}791$, $r_2 = r_3 = r_4 = 0$, και

$r_5 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}791$

35. Ναι, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής

39. (β) Συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού $[0, 5)$ εκτός στα $t = 1, 2, 3, 4$



45. $x \approx 1{,}8794, -1{,}5321, -0{,}347347.$ $x \approx 1{,}7549$

49. $x \approx 3{,}5156$

51. $x \approx 0{,}7391$

Ενότητα 1.5, σελ. 134-137

1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$

3. P_1: $m_1 = \dfrac{5}{2}$, P_2: $m_2 = -\dfrac{1}{2}$

5. $y = 2x + 5$

7. $y = 12x + 16$

9. $y + 1 = -3(x - 1)$

11. $y - 3 = -2(u - 3)$

13. $-\dfrac{1}{4}$

15. $(-2, -5)$

17. Στο $x = 0$, $y = -(x + 1)$· στο $x = 2$, $y = -(x - 3)$.

19. 19,6 m/sec

21. 6π

23. 3,72 m/sec

25. Ναι

27. Ναι

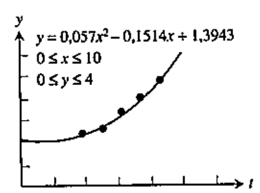
29. (α) $\dfrac{1-e^{-2}}{2} \approx 0{,}432$ (β) $\dfrac{e^3-e}{2} \approx 8{,}684$

31. (α) $-\dfrac{4}{\pi} \approx -1{,}273$ (β) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx -1{,}654$

33. (α) 0,3 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος

(β) 0,5 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος

(γ) $y = 0{,}057x^2 - 0{,}1514x + 1{,}3943$



(δ) 1994 έως 1995: 0,31 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος, 1995 έως 1997: 0,53 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος

(ε) 0,65 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος

35. (α) Πουθενά

37. (α) Στο $x = 0$

39. (α) Πουθενά

41. (α) Στο $x = 1$

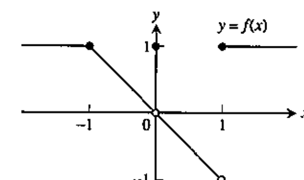
43. (α) Στο $x = 0$

Ασκήσεις κεφαλαίου 1, σελ. 137-139

1. Στο $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$· συνεχής στο $x = -1$

Στο $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ωστόσο, $f(0) \neq 0$, άρα η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$. Η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί αν ορίσουμε εκ νέου την τιμή $f(0)$) ως 0.

Στο $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, άρα το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$, και η ασυνέχεια δεν είναι αιρόμενη.



3. (α) -21 (β) 49 (γ) 0 (δ) 1 (ε) 1 (στ) 7 (ζ) -7 (η) $-\dfrac{1}{7}$

5. 4

7. (α) $(-\infty, +\infty)$ (β) $[0, \infty)$ (γ) $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ (δ) $(0, \infty)$

9. (α) Δεν υπάρχει (β) 0

11. $\dfrac{1}{2}$

13. $2x$

15. $-\dfrac{1}{4}$

17. $\dfrac{2}{5}$

19. 0

21. $-\infty$

23. 0

25. 1

27. 0

29. (β) 1,324717957

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 1, σελ. 139-141

3. 0· χρειαστήκαμε το αριστερό όριο διότι η συνάρτηση δεν ορίζεται για $v > c$.

5. $15 \le t \le 25$· εντός 5°C

7. (α) $\lim\limits_{a\to 0} r_+(a) = 0{,}5$, $\lim\limits_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$

(β) Το $\lim\limits_{a\to 0} r_-(a)$ δεν υπάρχει, $\lim\limits_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$

9. (α) Αληθής (β) Ψευδής (γ) Αληθής (δ) Ψευδής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ενότητα 2.1, σελ. 152-155

1. $-2x, 6, 0$

3. $3t^2 - 2t, 5$

5. $\dfrac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \sqrt{3}$

7. $2x + 1, 2$

9. $4x^2, 8x$

11. $y' = 2x^3 - 3x - 1 \Rightarrow y'' = 6x^2 - 3 \Rightarrow y''' = 12x \Rightarrow y^{(4)} = 12 \Rightarrow y^{(n)} = 0$ για κάθε $n \geq 5$

13. (α) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$, $y - 1 = 8(x - 2)$

(β) $[-4, \infty)$

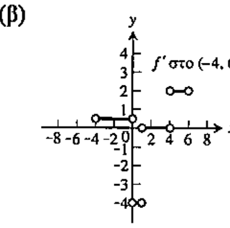
(γ) Η εξίσωση μιας τέτοιας εφαπτομένης βρέθηκε ήδη στο ερώτημα (α) για $x = 2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης την καμπύλης στο σημείο $(-2, 1)$ είναι $y - 1 = 8(x - (-2))$.

15. (β)

17. (δ)

19. (α) Η f' δεν ορίζεται για $x = 0, 1, 4$. Στα σημεία αυτά, οι αριστερές και οι δεξιές παράγωγοι δεν είναι ίσες.

(β)



21. $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1 \Rightarrow$ η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει

23. (α) Η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της $-2 \le x \le 3$.

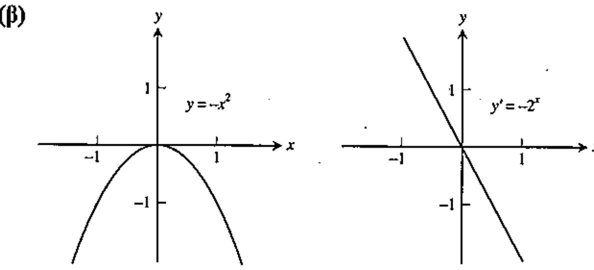
(β) Πουθενά (γ) Πουθενά

25. (α) Για $-1 \le x < 0$ και $0 < x \le 2$

(β) Στο $x = 0$ (γ) Πουθενά

27. (α) $y' = -2x$

(β)

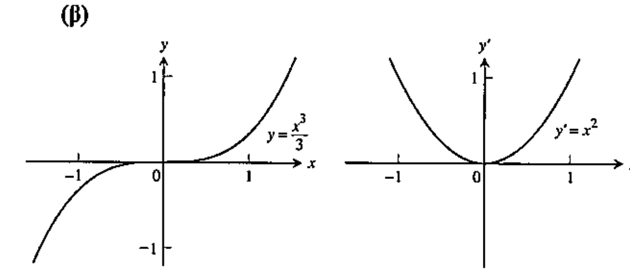


(γ) $x < 0, x = 0, x > 0$

(δ) $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$

29. (α) $y' = x^2$

(β)



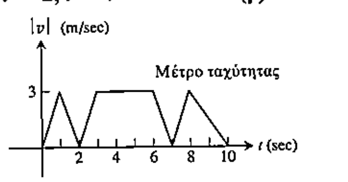
(γ) $x \neq 0$, $x = 0$, πουθενά

(δ) $-\infty < x < \infty$, πουθενά

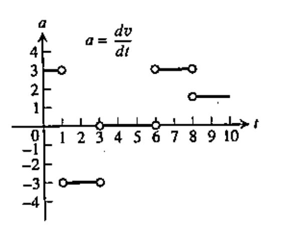
31. Η $y' = 3x^2$ δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές.
33. Ναι· η $y + 16 = -(x - 3)$ είναι εφάπτεται της υπερβολής στο σημείο $(3, -16)$.
35. Όχι· η συνάρτηση $y = \text{int}\, x$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους.
37. Ναι· $(-f)'(x) = -(f'(x))$.

Ενότητα 2.2, σελ. 165-168

1. (α) $\Delta s = -2\text{m}$, $v_{av} = -1$ m/sec
   (β) $|v(0)| = 3$ m/sec, $|v(2)| = 1$ m/sec, $a(0) = a(2) = 2\text{m/sec}^2$
   (γ) Για $t = \frac{3}{2}$
3. (α) $\Delta s = -9$ m, $v_{av} = -3$ m/sec
   (β) $|v(0)| = 3$ m/sec, $|v(3)| = 12$ m/sec, $a(0) = 6$ m/sec^2 και $a(3) = -12$ m/sec^2
   (γ) Δεν αλλάζει ποτέ κατεύθυνση
5. (α) $a(1) = -6$ m/sec^2 και $a(3) = 6$ m/sec^2
   (β) $|v(2)| = 3$ m/sec
   (γ) Συνολική απόσταση $= |s(1) - s(0)| + |s(2) - s(1)| = 6$ m
7. $t \approx 7{,}5$ sec στον Άρη, $t \approx 1{,}2$ sec στον Δία
9. $g_s = 0{,}75$ m/sec^2
11. (α) $v = -9{,}8t$, $|v| = 9{,}8t$ m/sec, $a = -9{,}8$ m/sec^2
    (β) $t \approx 3{,}4$ sec (γ) $v \approx 3{,}3$ m/sec
13. (α) $t = 2, t = 7$ (β) $3 \le t \le 6$
    (γ)



(δ)



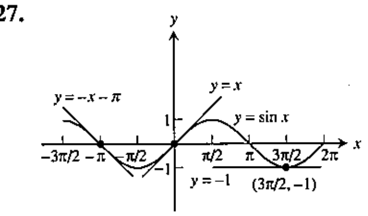
15. (α) 57 m/sec (β) 2 sec
    (γ) 8 sec, 0 m/sec (δ) 10,8 sec, 27 m/sec
    (ε) 2,8 sec (στ) 2 sec μετά την εκτόξευση
    (ζ) μεταξύ 2 και 10,8 sec, $-9{,}5$ m/sec^2
17. (α) $\frac{4}{7}$ sec, 280 cm/sec
    (β) 560 cm/sec, 980 cm/sec^2
    (γ) 29,75 εκλάμψεις/sec
19. C = θέση, B = ταχύτητα, A = επιτάχυνση
21. (α) €2 (β) €2 (γ) 0
23. -8000 lt/min, $-10{,}000$ lt/min
25. (α) $1{,}44\pi$ m^3/m (β) $0{,}144\pi$ m^3
27. Περίπου 108 m/sec ≈ 390 km/h
29. (α) $t = \frac{3}{2}$
    (β) Κίνηση προς τα αριστερά στο διάστημα $\left[0, \frac{3}{2}\right)$, προς τα δεξιά στο $\left(\frac{3}{2}, 5\right]$
    (γ) $t = \frac{3}{2}$
    (δ) Επιταχύνει στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, 5\right]$, επιβραδύνει στο $\left[0, \frac{3}{2}\right)$
    (ε) Μέγιστη ταχύτητα για $t = 5$, ελάχιστη για $t = \frac{3}{2}$
    (στ) $t = 5$
31. (α) $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$
    (β) Κίνηση προς τα αριστερά στο διάστημα $\left[0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$, προς τα δεξιά στο $\left(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, \frac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$
    (γ) $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$
    (δ) Επιταχύνει στο διάστημα $\left(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$, επιβραδύνει στο $\left[0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \frac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$
    (ε) Μέγιστη ταχύτητα για $t = 0, 4$, ελάχιστη για $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$
    (στ) $t = \frac{6 + \sqrt{15}}{3}$

Ενότητα 2.3, σελ. 173-174

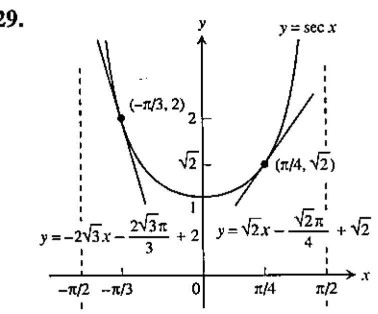
1. $\frac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$
3. $\frac{dr}{ds} = \frac{-2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$
5. (α) $y' = (3 - x^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) + (x^3 - x + 1) \cdot \frac{d}{dx}(3 - x^2) = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$
   (β) $y = -x^5 + 4x^3 - x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$
7. $y' = \frac{-19}{(3x - 2)^2}$ 9. $f'(t) = \frac{1}{(t + 2)^2}$
11. $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)^2}$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2(x^2 + x + 1)^2}$
15. $\frac{ds}{dt} = -5t^{-2} + 2t^{-3}, \frac{d^2s}{dt^2} = 10t^{-3} - 6t^{-4}$
17. $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$
19. (α) $\left.\frac{d}{dx}(uv)\right|_{x=0} = 7$ (β) $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)\right|_{x=0} = -13$
    (γ) $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)\right|_{x=0} = \frac{13}{25}$ (δ) $\left.\frac{d}{dx}(7v - 2u)\right|_{x=0} = 8$
21. $y = 4x$ στο $(0, 0)$, $y = 2$ στο $(1, 2)$
23. $a = b = 1$ και $c = 0$, άρα $y = x^2 + x$.
25. $\frac{d}{dx}(u \cdot c) = u \cdot \frac{dc}{dx} + c \cdot \frac{du}{dx} = u \cdot 0 + c\frac{du}{dx} = c\frac{du}{dx} \Rightarrow$ ο τύπος της παραγώγου σταθερού πολλαπλασίου είναι ειδική περίπτωση του τύπου της παραγώγου γινομένου.
27. (α) $\frac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$
    (β) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u'_4 + u_1u_2u'_3u_4 + u_1u'_2u_3u_4 + u'_1u_2u_3u_4$
    (γ) $\frac{d}{dx}(u_1 \cdots u_n) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}u'_n + u_1u_2 \cdots u_{n-2}u'_{n-1}u_n + \cdots + u'_1u_2 \cdots u_n$
29. $\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$

Ενότητα 2.4, σελ. 179-181

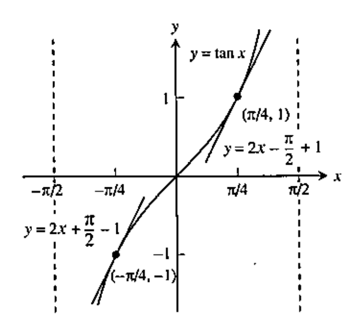
1. $-10 - 3\sin x$ 3. $-\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$
5. 0 7. $\frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$
9. $4\tan x \sec x - \csc^2 x$ 11. $x^2 \cos x$
13. $\sec^2 t - 1$ 15. $\frac{-2\csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$
17. $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$
19. $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$
21. $\sec^2 q$ 23. $\sec^2 q$
25. (α) $2\csc^3 x - \csc x$ (β) $2\sec^3 x - \sec x$
27.



29.



31. Ναι, στο $x = \pi$ 33. Όχι
35. $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$



37. (α) $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2$ (β) $y = 4 - \sqrt{3}$
39. $-\sqrt{2}$ m/sec, $\sqrt{2}$ m/sec, $\sqrt{2}$ m/sec^2, $\sqrt{2}$ m/sec^3
41. $c = 9$ 43. $\sin x$

Ενότητα 2.5, σελ. 190-193

1. $12x^3$ 3. $3\cos(3x + 1)$
5. $10\sec^2(10x - 5)$
7. Για $u = (4 - 3x)$, $y = u^9$: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 9u^8 \cdot (-3) = -27(4 - 3x)^8$
9. Για $u = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)$, $y = u^4$: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
11. Για $u = \left(\pi - \frac{1}{x}\right)$, $y = \cot u$: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (-\csc^2 u)\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\csc^2\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
13. $\frac{1 - r}{\sqrt{2r - r^2}}$ 15. $\frac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$
17. $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x \sin x$
19. $(3x - 2)^6 - \frac{1}{x^3\left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}$
21. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$
23. $\frac{2\sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$
25. $(\sec\sqrt{\theta})\left[\frac{\tan\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)}{2\sqrt{\theta}} - \frac{\sec^2\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\theta^2}\right]$
27. $2\pi\sin(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$
29. $\frac{\csc^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left[1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]^3}$
31. $\left[1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right]^2\left[\tan^3\left(\frac{t}{12}\right)\sec^2\left(\frac{t}{12}\right)\right]$
33. $y = -x + 2, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}$
35. $y = x + \frac{1}{4}, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1/4} = -2$
37. $y = x - 4, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = \frac{1}{2}$
39. $y = 2, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = -1$
41. $\frac{6}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)$
43. $2\csc^2(3x - 1)\cot(3x - 1)$ 45. $\frac{5}{2}$
47. $-\frac{\pi}{4}$ 49. 0
51. (α) $\frac{2}{3}$ (β) $2\pi + 5$ (γ) $15 - 8\pi$
    (δ) $\frac{37}{6}$ (ε) -1 (στ) $\frac{\sqrt{2}}{24}$
    (ζ) $\frac{5}{32}$ (η) $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$
53. 5
55. (α) 1 (β) 1
57. (α) $y = \pi x + 2 - \pi$ (β) $\frac{\pi}{2}$
59. Η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η παράγωγος επιτάχυνσης θα πολλαπλασιαστούν κατά 2, 4, και 8, αντίστοιχα.
61. $v(6) = \frac{2}{5}$ m/sec, $a(6) = -\frac{4}{125}$ m/sec^2

71. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y = 2x$ για $t = 0$, $y = -2x$ για $t = \pi$

Ενότητα 2.6, σελ. 199-201

1. $\frac{9}{4}x^{5/4}$
3. $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$
5. $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$
7. $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$
9. $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$
11. $g'(x) = \frac{2}{3}(2x^{-1/2}+1)^{-4/3}(x^{-3/2})$
13. $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$
15. $\frac{y-3x^2}{3y^2-x}$
17. $\frac{1}{y(x+1)^2}$
19. $\cos^2 y$
21. $\dfrac{-y^2}{y\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right) + xy}$
23. $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$
25. $\frac{-r}{\theta}$, $\cos(r\theta) \neq 0$
27. $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$, $y'' = \frac{y^{1/3}}{3x^{4/3}} + \frac{1}{3y^{1/3}x^{2/3}}$
29. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}$, $y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$
31. -2
33. 0
35. -6
37. $(-2, 1)$: $m = -1$, $(-2, -1)$: $m = 1$
39. (α) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$ (β) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$
41. (α) $y = -x - 1$ (β) $y = x + 3$
43. (α) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ (β) $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$
45. (α) $y = 2\pi x - 2\pi$ (β) $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$
47. Σημεία: $(-\sqrt{7}, 0)$ και $(\sqrt{7}, 0)$, κλίση: -2
49. $m = -1$ για $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $m = \sqrt{3}$ για $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$
51. $(-3, 2)$: $m = -\frac{27}{8}$· $(-3, -2)$: $m = \frac{27}{8}$· $(3, 2)$: $m = \frac{27}{8}$· $(3, -2)$: $m = -\frac{27}{8}$
53. (α) Ψευδής (β) Αληθής (γ) Αληθής (δ) Αληθής
55. $(3, -1)$
57. $a = \frac{3}{4}$
59. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

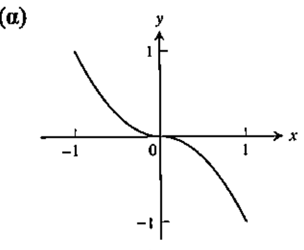
Ενότητα 2.7, σελ. 206-210

1. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$
3. (α) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt}$ (β) $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr\frac{dr}{dt}$
(γ) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} + 2\pi hr\frac{dr}{dt}$
5. (α) 1 volt/sec (β) $-\frac{1}{3}$ amp/sec
(γ) $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$
(δ) $\frac{3}{2}$ ohms/sec· το R μειώνεται.
7. (α) $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$
(β) $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$
(γ) $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$
9. (α) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$
(β) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt}$
(γ) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{db}{dt}$
11. (α) 14 cm²/sec, αυξάνεται (β) 0 cm/sec, σταθερή
(γ) $-\frac{14}{13}$ cm/sec, μειώνεται
13. (α) −2 m/sec (β) −1,75 m²/sec
(γ) −0,5 rad/sec
15. 5,2 m/sec
17. (α) $\frac{dh}{dt} = 11{,}19$ cm/min (β) $\frac{dr}{dt} = 14{,}92$ cm/min
19. (α) $\frac{-1}{24\pi}$ m/min (β) $r = \sqrt{26y - y^2}$ m
(γ) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}$ m/min
21. 0,1 m/min, 4π m²/min
23. 11 m/sec
25. Αυξάνεται σε $\frac{466}{1681}$ L/min
27. 1 rad/sec
29. −5 m/sec
31. ≈−490 ft/sec
33. $\frac{5}{72\pi}$ cm/min, $\frac{10}{3}$ cm²/min
35. 58,9 cm/min
37. (α) ≈ −2,774 m/sec
(β) $d\theta_1/dt = -0{,}11$ rad/sec, $d\theta_2/dt = 0{,}11$ rad/sec
(γ) $d\theta_1/dt = -0{,}13$ rad/sec, $d\theta_2/dt = 0{,}13$ rad/sec

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2, σελ. 210-215

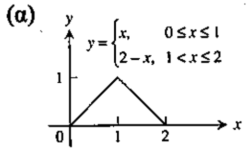
1. $5x^4 - 0{,}25x + 0{,}25$
3. $3x(x-2)$
5. $2(x+1)(2x^2+4x+1)$
7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\tan\theta)$
9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$
11. $2\sec^2 x\tan x$
13. $8\cos^3(1-2t)\sin(1-2t)$
15. $5(\sec t)(\sec t + \tan t)^5$
17. $\frac{\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2\theta\sin\theta}}$
19. $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$
21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\cot\left(\frac{2}{x}\right)$
23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2[16\tan(2x)^2 - x^{-2}]$
25. $-10x\csc^2(x^2)$
27. $8x^3\sin(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\sin^2(2x^2)$
29. $\frac{-(t+1)}{8t^3}$
31. $\frac{1-x}{(x+1)^3}$
33. $\dfrac{1}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$
35. $\frac{-2\sin\theta}{(\cos\theta - 1)^2}$
37. $3\sqrt{2x+1}$
39. $-9\left[\frac{5x + \cos 2x}{(5x^2 + \sin 2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\frac{y+2}{x+3}$
43. $\frac{-3x^2 - 4y + 2}{4x - 4y^{1/3}}$
45. $-\frac{y}{x}$
47. $\frac{1}{2y(x+1)^2}$
49. $\frac{dp}{dq} = \frac{6q - 4p}{3p^2 + 4q}$
51. $\frac{dr}{ds} = (2r - 1)(\tan 2s)$
53. (α) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}$ (β) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2 - 1}{x^4y^3}$
55. (α) 7 (β) −2 (γ) 5/12 (δ) 1/4 (ε) 12 (στ) 9/2 (ζ) 3/4
57. 0
59. $\sqrt{3}$
61. $-\frac{1}{2}$
63. $\frac{-2}{(2t+1)^2}$
65. (α)

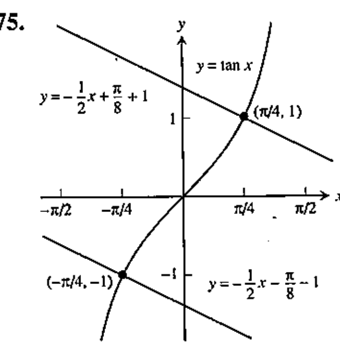


$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

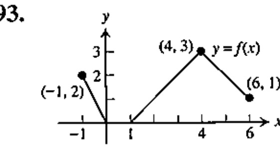
(β) Ναι
(γ) Ναι
67. (α)



(β) Ναι
(γ) Όχι
69. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
71. $(-1, 27)$ και $(2, 0)$
73. (α) $(-2, 16)$, $(3, 11)$ (β) $(0, 20)$, $(1, 7)$
75.



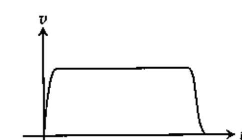
77. $\frac{1}{4}$
79. 4
81. Εφαπτομένη: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, κάθετος: $y = 4x - 2$
83. Εφαπτομένη: $y = 2x - 4$, κάθετος: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
85. Εφαπτομένη: $y = -\frac{5}{4}x + 6$, κάθετος: $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$
87. $(1, 1)$: $m = -\frac{1}{2}$, $(1, -1)$: η κλίση m δεν ορίζεται
89. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
91. B = γράφημα της f, A = γράφημα της f'
93.



95. (α) 0, 0
(β) 1700 κουνέλια, ≈ 1400 κουνέλια
97. (α) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$ (β) $\frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt}$
(γ) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}$
(δ) $\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2r+h}\frac{dh}{dt}$
99. −40 m²/sec
101. 0,02 ohm/sec
103. 22 m/sec
105. (α) $r = \frac{2}{5}h$ (β) $-\frac{125}{144\pi}$ m/min
107. (α) $\frac{3}{5}$ km/sec δηλ. 600 m/sec (β) $\frac{18}{\pi}$ rpm

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 2, σελ. 215-217

1. (α) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$· $2\cos 2\theta = 2\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$· $2\cos 2\theta = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$· $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
(β) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$· $-2\sin 2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) - 2\sin\theta(\cos\theta)$· $\sin 2\theta = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta$· $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
3. (α) $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{2}$ (β) $b = \cos a$, $c = \sin a$
5. $h = -4$, $k = \frac{9}{2}$, $a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$
7. (α) $0{,}09y$
(β) Αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 1%
9. Οι απαντήσεις που μπορεί να δώσει κανείς εδώ ποικίλλουν. Μια δυνατότητα είναι η εξής.



11. (α) 2 sec, 20 m/sec (β) 12,5 sec, 125 m
15. (α) $m = -\frac{b}{\pi}$ (β) $m = -1$, $b = \pi$
17. (α) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$
19. f περιττή ⇒ f' άρτια
23. Η h' είναι ορισμένη αλλά όχι συνεχής στο $x = 0$· η k' είναι ορισμένη *και* συνεχής στο $x = 0$.