14 -04 - 2021

Εξισώσεις LAGRANGE

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

7.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια το πρόβλημα της δυναμικής είναι η κίνηση των υλικών συστημάτων όπως αυτή διαμορφώνεται στο περιβάλλον της. Η Νευτώνεια δυναμική θεμελιώνεται με βάση τους τρεις νόμους του Νεύτωνα, γιά τους οποίους αναφορά έχει ήδη γίνει στην εισαγωγή. Σύμφωνα λοιπόν με τις απόψεις Νεύτωνα έχουμε ήδη δεχθεί τα εξής:

1ον Ο χώρος στον οποίο εξελίσσονται τα φαινόμενα της μηχανικής είναι ο απόλυτος R^3, δηλαδή ο απόλυτος χώρος τριών διαστάσεων. Ο φορμαλισμός της αναλυτικής γεωμετρίας μας επιτρέπει να κάνουμε πλήρη χρήση του γεγονότος αυτού καθορίζοντας την θέση ενός υλικού σημείου με τις συντεταγμένες του. Από την άλλη μεριά, η κλασική διαφορική γεωμετρία μας επιτρέπει να μετρούμε τις αποστάσεις με την βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

2ον Ο χρόνος θεωρείται ως συνεχής πραγματική παράμετρος και είναι απόλυτος. Η υπόθεση αυτή δίδει φυσικό περιεχόμενο στο μέγεθος ταχύτητα και μας επιτρέπει την περιγραφή των τροχιών στον R^3 με την γνωστή ήδη μορφή

$$x = x(t) \ , \quad y = y(t) \ , \quad z = z(t) \ . \tag{7.1}$$

3ον Η δύναμη F ανήκει στην οικογένεια των φυσικών μεγεθών που είναι γνωστά ως διανύσματα, των οποίων οι ιδιότητες περιγράφονται από τον διανυσματικό λογισμό.

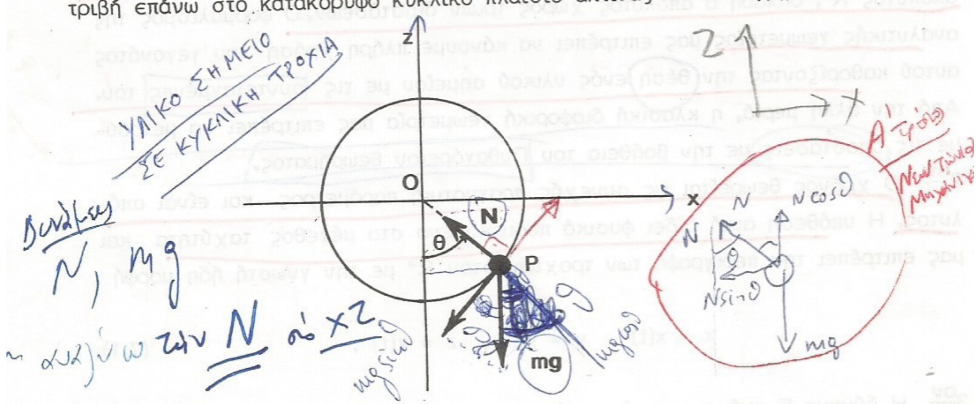
4ον Σε κάθε υλικό σημείο αποδίδεται ένα βαθμωτό μέγεθος (θετικός αριθμός), η μάζα, η οποία δεν εξαρτάται από τις μεταβολές του χώρου.

Τα ανωτέρω μεγέθη εμφανίζονται στην θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής

$$m\boldsymbol{\gamma} = m\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\ , \tag{7.2}$$

που ουσιαστικά είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. ΄Οπως ήδη τονίσαμε στο κεφάλαιο της δυναμικής του υλικού σημείου, η λύση της (7.2) με την εισαγωγή κατάλληλων αρχικών συνθηκών, περιγράφει πλήρως το πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς του υλικού σημείου. Με τον νόμο δράσης - αντίδρασης μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς συστήματος υλικών σημείων. Τώρα το πρόβλημα είναι πολυπλοκότερο, όχι μόνον γιατί έχουμε περισσότερες από μία εξισώσεις, αλλά κυρίως γιατί τα μεγέθη που αναφέρονται στο μεμονωμένο υλικό σημείο πιθανόν να εξαρτώνται από τα αντίστοιχα μεγέθη των άλλων υλικών σημείων.

Η **αναλυτική δυναμική** είναι το αποτέλεσμα των προσπαθειών ώστε να απαγκιστρωθούμε από αυτή την απεικονιστική περιγραφή της Νευτώνειας δυναμικής. Πράγματι, με την αναλυτική δυναμική διατυπώνουμε τα προβλήματα σε ενιαία γλώσσα που οδηγεί σε απαιτήσεις χωρίς πολύ κόπο. ΄Ενα απλό παράδειγμα θα μας πείσει γιά την λογική αναγκαιότητα της αναλυτικής δυναμικής. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση ενός υλικού σημείου που κινείται χωρίς τριβή επάνω στο κατακόρυφο κυκλικό πλαίσιο ακτίνας R του σχήματος 7.1.



Σχήμα 7.1: Κίνηση υλικού σημείου επί κατακορύφου κυκλικού πλαισίου.

Εφ΄ όσον χρησιμοποιήσουμε την απεικονιστική μεθοδολογία της Νευτώνειας δυναμικής πρέπει πριν απ΄ όλα να προσδιορίσουμε τις ενεργούσες δυνάμεις. Η συνολική δύναμη είναι η συνισταμένη του βάρους $-mg\mathbf{k}$ και της αντίδρασης του πλαισίου **N**, η οποία λόγω απουσίας τριβών είναι κάθετη στην περιφέρεια. Γράφουμε τώρα την θεμελιώδη διανυσματική εξίσωση της δυναμικής στο επίπεδο zx, η οποία ισοδυναμεί με τις αναλυτικές εξισώσεις

A' ΤΡΟΠΟΣ

$$m\ddot{x} = -N\sin\theta\ , \quad m\ddot{z} = -mg + N\cos\theta\ , \tag{7.3}$$

Νευτώνεια Δυναμική

όπου, ως γνωστόν, τελεία παριστάνει παράγωγο προς το χρόνο. Οι εξισώσεις (7.3) δεν αρκούν γιά την λύση του προβλήματος δεδομένου ότι το υλικό σημείο κινείται επί της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας R και συνεπώς ισχύει

$$x^2 + z^2 = R^2\ . \tag{7.4}$$

Βλέπουμε ήδη ότι η πλήρης λύση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη αν ακολουθήσει κανείς την απεικονιστική μεθοδολογία της Νευτώνειας δυναμικής. Φυσικά το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αμέσως με το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας, πλήν όμως η μέθοδος αυτή δεν θα δώσει την έκφραση της δύναμης **N** που είναι και αυτή άγνωστη. Ένας τρίτος τρόπος, μέσω του οποίου προσδιορίζεται και η δύναμη **N**, είναι η ανάλυση της επιτάχυνσης σε κεντρομόλο και επιτρόχιο, δηλαδή

B' ΤΡΟΠΟΣ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ

(Ειδική μέθοδος) Γ' ΤΡΟΠΟΣ
ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ
ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ + ΕΠΙΤΡΟΧΙΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

$$F = m\gamma = m(\ddot{s}\,\varepsilon_0 + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{k}_0) = -\overset{mg}{B}\sin\theta\,\varepsilon_0 + (-B\cos\theta + N)\mathbf{k}_0$$

η οποία, επειδή ισχύει

$s = R\theta \quad \dot{s} = R\dot{\theta}$

Κεντρομόλο: $N - mg\cos\theta = m\frac{\dot{s}^2}{R} \Rightarrow \boxed{N - mg\cos\theta = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{R} = mR\dot{\theta}^2}$ (1)

$$s = R\theta$$

Επιτρόχιο: $m\ddot{s} = -mg\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{s} = -g\sin\theta}$ (2)

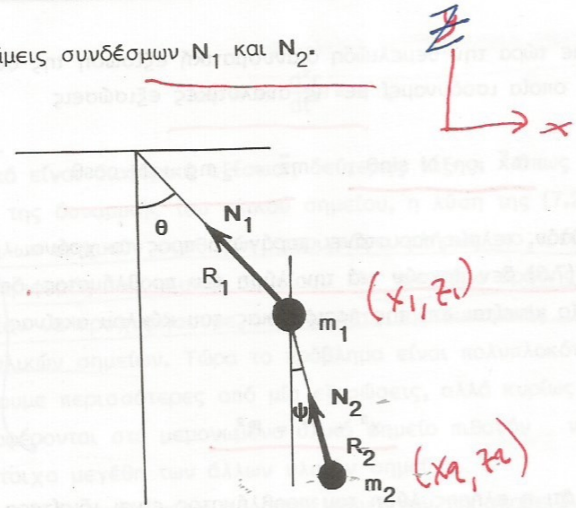
καταλήγει στις εξισώσεις

$$R\ddot{\theta} = -g\sin\theta\ , \quad \cancel{mR\ddot{\theta}} = -B\cos\theta + N\ . \tag{7.5}$$

$mR\dot{\theta}^2$

Πάντως και η τρίτη αυτή μέθοδος είναι ειδική και δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε άλλες περιπτώσεις.

Ένα τυπικό παράδειγμα, μέσω του οποίου όλες οι προαναφερθείσες μέθοδοι γίνονται πολύπλοκοι, είναι αυτό του διπλού εκκρεμούς. Πράγματι, αν (x_1, z_1), (x_2, z_2) περιγράφουν τις συντεταγμένες των δύο υλικών σημείων του εκκρεμούς του σχήματος 7.2 θα έχουμε εκφράσεις ανάλογες των (7.3) αλλά με δύο άγνώστους δυνάμεις συνδέσμων N_1 και N_2.



Σχήμα 7.2: Διπλό εκκρεμές εκ δύο σφαιρικών μαζών.

Συνεπώς, η εξίσωση (7.4) αντικαθίστανται τώρα από τις

$$x_1^2 + z_1^2 = R_1^2\,,$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R_2^2\,. \tag{7.6}$$

Τα είδη των δυσκολιών που παρουσιάζει η απεικονιστική μέθοδος έχουν γίνει πλέον ανάγλυφα στα προηγούμενα παραδείγματα και μπορούν γενικά να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες:

a) Δυσκολίες που παρουσιάζονται λόγω των αγνώστων δυνάμεων οι οποίες υπεισέρχονται στο πρόβλημα και οι οποίες προσδιορίζονται μόνον μετά την πλήρη λύση του. Επομένως, κάθε άλλη μεθοδολογία που θα απομόνωνε το πρόβλημα των δυνάμεων αυτών από το υπόλοιπο δυναμικό πρόβλημα (πρόβλημα τροχιών) θα είναι σημαντικά χρήσιμη.

b) Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των υλικών σημείων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται με αλγεβρικές εκφράσεις πολύπλοκες όπως οι (7.6). Επομένως, σε ορισμένες περιπτώσεις οι σχέσεις των συντεταγμένων περιέχουν ταχύτητες με αποτέλεσμα το πρόβλημα να γίνεται εξαιρετικά πολύπλοκο.

Η δυσκολία του δευτέρου είδους δεν είναι μόνο πρακτική. Σε ένα πρόβλημα μηχανικής εκείνο που βασικά ενδιαφέρει είναι ο τρόπος περιγραφής του. Η περιγραφή αυτή γίνεται με το να απομονώσουμε πρώτα τις μεταβλητές εκείνες που είναι χαρακτηριστικές γιά το σύστημα και στη συνέχεια με το να δώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν αυτές τις μεταβλητές. Στο πρώτο παράδειγμά μας χρησιμοποιήσαμε ως τέτοια μεταβλητή την θέση του υλικού σημείου P που χαρακτηρίζεται στην προκειμένη περίπτωση από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,z), οι οποίες όμως δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους δεδομένου ότι συνδέονται μέσω της εξίσωσης (7.4). Θα μπορούσαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητή την γωνία θ. Πράγματι, η τιμή της γωνίας θ γιά τυχούσα χρονική στιγμή προσδιορίζει πλήρως το μηχανικό σύστημα του σχήματος 7.1. Η γωνία θ είναι ένα παράδειγμα συντεταγμένης, που όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο καλείται **γενικευμένη συντεταγμένη.** Με άλλα λόγια αντικαταστήσαμε τις δύο δύσχρηστες καρτεσιανές συντεταγμένες (x,z), οι οποίες μάλιστα δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, με μιά μόνον μεταβλητή θ = θ(t) μέσω των δύο προφανών εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
x &= R\sin\theta \,, \\
z &= R\cos\theta \,.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Υποπτεύεται τώρα κανείς ότι ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων που υπεισέρχονται σε ένα μηχανικό πρόβλημα είναι ουσιώδες χαρακτηριστικό του προβλήματος αυτού. Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο ότι ο αριθμός αυτός ορίζεται ως **βαθμός ελευθερίας** του προβλήματος.

Στο δεύτερο παράδειγμα που είναι πολυπλοκότερο θα έχουμε δύο ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες (θ,ψ), οι οποίες μπορούν να ορίσουν μονοσήμαντα τα ζεύγη των καρτεσιανών συντεταγμένων (x_1,z_1), (x_2,z_2) τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις (7.6). Στην πρώτη περίπτωση (Σχ. 7.1) ο βαθμός ελευθερίας του προβλήματος είναι 1, ενώ στην δεύτερη (Σχ. 7.2) είναι 2. Διαλέγοντας τώρα μόνον γενικευμένες ανεξάρτητες μεταβλητές γιά την περιγραφή του προβλήματος της μηχανικής είναι φυσικό να περιμένουμε ότι το πρόβλημα θα λυθεί αναλυτικά σε κάποιο υποθετικό χώρο k - διαστάσεων, τον οποίο συνήθως καλούμε **θεσεογραφικό χώρο** σε αντιδιαστολή με τον κοινό χώρο της εποπτείας μας, όπου κάθε σημείο απεικονίζεται με τις καρτεσιανές ή τις άλλες ισοδύναμες συντεταγμένες του.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας οδηγούν σε μιά διαφορετική περιγραφή της μηχανικής, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ισοδύναμη με την περιγραφή του Νεύτωνος. Η περιγραφή αυτή, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, συνίσταται:

i) Στην κατασκευή μιάς συνάρτησης L από τα γνωστά μεγέθη της Νευτώνειας μηχανικής·

ii) Στην διατύπωση των εξισώσεων της μηχανικής με νέα, ισοδύναμη προς την παλαιά, μορφή μέσω της L, και

iii) Στον υπολογισμό των διαφόρων αγνώστων δυνάμεων μέσω της L και τον υπολογισμό των εξισώσεων της περίπτωσης (ii) όποτε αυτές ζητούνται.

7.2 Γενικευμένες Συντεταγμένες - Σύνδεσμοι

Ας συστηματοποιήσουμε τις παρατηρήσεις που ήδη έχουμε κάνει στην προηγούμενη παράγραφο γιά το τυχόν μηχανικό σύστημα από N υλικά σημεία. Καλούμε **φυσικές συντεταγμένες** του συστήματος, τις συντεταγμένες θέσης καθενός υλικού του σημείου. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οι φυσικές συντεταγμένες του παραπάνω μηχανικού συστήματος είναι 3N, δηλαδή

$$(x_1, y_1, z_1; \dots ; x_i, y_i, z_i; \dots ; x_N, y_N, z_N) ,$$

όπου ο δείκτης $i = 1, \dots, N$ αναφέρεται στο i υλικό σημείο του συστήματος.

Εν γένει οι φυσικές συντεταγμένες ενός μηχανικού συστήματος δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους [βλ. εξισώσεις (7.4) και (7.6)]. Καλούμε **γενικευμένες συντεταγμένες** τις μεταβλητές αυτές οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και προσδιορίζουν καθ' εκάστην στιγμή πλήρως την κινητική κατάσταση του μηχανικού συστήματος. Τις συντεταγμένες αυτές συμβολίζουμε με q_k, όπου ο δείκτης κ παίρνει τις τιμές $1,2, \dots ,K$ με $K \leq 3N$.

Το γεγονός ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι λιγότερες από τις φυσικές συντεταγμένες οφείλεται στους γεωμετρικούς περιορισμούς που επιβάλλονται στο μηχανικό σύστημα. Στο παράδειγμα της κίνησης υλικού σημείου επί κατακορύφου πλαισίου ακτίνος R, η κίνηση περιορίζεται πάνω στην περιφέρεια του πλαισίου. Ο περιορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την άγνωστη **N** που εισάγει το ίδιο το πλαίσιο στο πρόβλημα. Ας αφήσουμε προς το παρόν την δύναμη και ας παρατηρήσουμε ότι ο περιορισμός αυτός εκφράζεται ως συνθήκη μεταξύ των φυσικών συντεταγμένων του συστήματος

$$\boxed{f_j(x_i, y_i, z_i; t) = 0 ,} \tag{7.8}$$

όπου $j = 1,2, \dots , n$ και $i = 1, 2, \dots , N$

Περιορισμοί του ανωτέρω τύπου καλούνται γενικώς **σύνδεσμοι.** Επειδή η έννοια του συνδέσμου είναι θεμελιώδης στην καινούργια περιγραφή της μηχανικής θα θέλαμε να την γενικεύσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο και να εξετάσουμε στην συνέχεια τις διάφορες επιπτώσεις της. Καλούμε λοιπόν **σύνδεσμο μηχανικού συστήματος** εκ N υλικών σημείων κάθε περιορισμό επιβαλλόμενο στις θέσεις ή τις ταχύτητες των σημείων του υλικού συστήματος. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι ταξινόμησης των συνδέσμων. Ακολουθούμε τον εξής διακρίνοντας τους συνδέσμους σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

(I) Συνδέσμους εκφραζόμενους μέσω ανισοτήτων, και

(II) Συνδέσμους εκφραζόμενους μέσω εξισώσεων.

Μη-Ολόνομοι

Ολόνομοι

σκληρόνομοι

ρεόνομοι (ανέχουν t

Παράδειγμα συνδέσμων του πρώτου είδους είναι η κίνηση ενός υλικού σημείου στο εσωτερικό κύβου ακμής α. Σ΄ αυτήν την περίπτωση γράφουμε

$$0 \leq x \leq \alpha\,, \quad 0 \leq y \leq \alpha\,, \quad 0 \leq z \leq \alpha\,. \tag{7.9}$$

Τέτοιου είδους σύνδεσμοι έχουν ενδιαφέρον σε συνδυασμό με προβλήματα που εμφανίζουν δυνάμεις μεγάλης έντασης και πολύ μικρής διάρκειας. Πάντως εδώ δεν θα μας απασχολήσουν σύνδεσμοι τύπου (I).

Οι σύνδεσμοι της κατηγορίας (II) υποδιαιρούνται σε:

(IIa) Σύνδεσμοι οι οποίοι εκφράζονται μέσω εξισώσεων μεταξύ των φυσικών συντεταγμένων του συστήματος. Οι σύνδεσμοι αυτοί διατυπώνονται από εξισώσεις της μορφής (7.8) και καλούνται **ολόνομοι.** Περαιτέρω διακρίνονται σε **σκληρόνομους,** αν οι συναρτήσεις f_j δεν περιέχουν τον χρόνο, δηλαδή αν

$$\boxed{\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0\,,}$$

και σε **ρεόνομους,** αν οι f_j περιέχουν τον χρόνο, δηλαδή αν

$$\boxed{\frac{\partial f_j}{\partial t} \neq 0\,.}$$

Οι ολόνομοι σύνδεσμοι παριστάνουν εν γένει **γεωμετρικούς υπολογισμούς γιά μηχανικό σύστημα.** Επί παραδείγματι στο διπλό εκκρεμές οι εκφράσεις (7.6) παριστάνουν τις γεωμετρικές συνθήκες ότι τα μήκη των νημάτων που συνδέουν τις δύο μάζες και την πρώτη μάζα με το σημείο στήριξης έχουν καθαρά μήκη R_2 και R_1 αντίστοιχα. Οι σύνδεσμοι αυτοί είναι προφανώς σκληρόνομοι. ΄Αλλο παράδειγμα σκληρόνομου συνδέσμου είναι η κίνηση υλικού σημείου πάνω στην επιφάνεια σφαίρας. Ο σύνδεσμος αυτός εκφράζεται ως

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{7.10}$$

και δεν είναι παρά μιά γεωμετρική συνθήκη γνωστή από την αναλυτική γεωμετρία.

Ως παράδειγμα ρεόνομου συνδέσμου φανταζόμεθα την ολίσθηση μιάς χάνδρας πάνω σε ένα ευθύγραμμο σύρμα, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα κάθετο επ΄ αυτού. Γιά να εκφράσουμε στην προκειμένη περίπτωση τον σύνδεσμο αναλυτικά θεωρούμε τον άξονα περιστροφής ως άξονα των z. Τότε το σύρμα ευρίσκεται σταθερά επί του επιπέδου (xy) και, αν χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\phi = \omega t \tag{7.11}$$

ή

$$\dot{\phi} = \omega \,. \tag{7.12}$$

Η (7.11) ή (7.12) είναι της μορφής (7.8) και αποτελεί την αναλυτική έκφραση του συνδέσμου.

(IIb) Σύνδεσμοι που εκφράζουν περιορισμούς στις ταχύτητες των υλικών σημείων του συστήματος και που δίδονται από σχέσεις περιέχουσες παραγώγους, δηλαδή

$$\sum_i (\eta_i \dot{x}^i + \lambda_i \dot{y}^i + \mu_i \dot{z}^i) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \,, \tag{7.13}$$

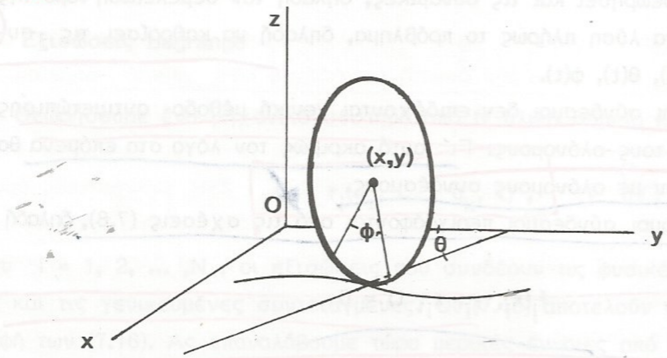
όπου $i = 1, 2, \ldots, N$.

Οι εξισώσεις (7.13) παριστάνουν νέο τύπο συνδέσμου εφ΄ όσον εν γένει δεν ολοκληρώνονται. Πράγματι, αν οι (7.13) ολοκληρωθούν δίνουν εκφράσεις της μορφής (7.8) και συνεπώς μεταπίπτουν στην κατηγορία (IIa). Επί παραδείγματι, ο σύνδεσμος

$$\dot{\phi} = \omega$$

είναι της μορφής (7.13), πλην όμως ολοκληρώνεται αμέσως παρέχοντας την έκφραση (7.11) και άρα είναι σύνδεσμος της κατηγορίας (IIa). Τους μη ολοκληρώσιμους συνδέσμους (7.13) καλούμε **μη ολόνομους.**

Παράδειγμα μη ολόνομου συνδέσμου είναι η κύλιση κατακόρυφου δίσκου σε οριζόντιο επίπεδο (Σχ. 7.3).



Σχήμα 7.3: Κύλιση κατακόρυφου δίσκου σε οριζόντιο επίπεδο.

Ο ένας σύνδεσμος του προβλήματος είναι ότι το επίπεδο του δίσκου πρέπει να τηρείται σταθερά κατακόρυφο, ο δε δεύτερος είναι ο περιορισμός της κύλισης του δίσκου, δηλαδή ο περιορισμός ότι το σημείο επαφής δίσκου και επιπέδου ηρεμεί στιγμιαία (μηδενική γραμμική ταχύτητα). Οι γενικευμένες συντεταγμένες στην προκειμένη περίπτωση είναι οι καρτεσιανές (x,y) του κέντρου του δίσκου, η γωνία φ στο επίπεδο του δίσκου, η οποία είναι η γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα του δίσκου, και η γωνία θ, η οποία είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας περιστροφής του δίσκου με τον άξονα x. Αν υ παριστάνει το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου του δίσκου και R την ακτίνα του, λόγω της κύλισης έχουμε

υ = Rω ?

$$\upsilon = R\dot{\phi} \,. \tag{7.14}$$

Αν αναλύσουμε την συνθήκη κύλισης στους άξονες (x,y) παίρνουμε

$$\dot{x} = \upsilon \sin\theta \,,$$

$$\dot{y} = -\,\upsilon \cos\theta$$

ή, μέσω της (7.14)

$$\begin{aligned} dx - R\sin\theta\, d\phi &= 0\,, \\ dy + R\cos\theta\, d\phi &= 0\,. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Παρατηρούμε ότι οι (7.15) δεν ολοκληρώνονται ανεξάρτητα από το όλο πρόβλημα ώστε να δόσουν εκφράσεις της μορφής (7.8). Πρέπει κανείς μαζί με την εξίσωση αυτή να θεωρήσει και τις δυναμικές, δηλαδή τον θεμελειώδη νόμο της μηχανικής, ώστε να λύση πλήρως το πρόβλημα, δηλαδή να καθορίσει τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$.

Οι μη ολόνομοι σύνδεσμοι δεν επιδέχονται γενική μέθοδο αντιμετώπισης σε αντίθεση προς τους ολόνομους. Γι΄ αυτό ακριβώς τον λόγο στα επόμενα θα ασχοληθούμε μόνον με ολόνομους συνδέσμους.

Πράγματι, οι ολόνομοι σύνδεσμοι περιγράφονται από τις σχέσεις (7.8), δηλαδή

$$f_j(x_i, y_i, z_i; t) = 0 ,$$

όπου $j = 1,2, \ldots ,n$ και $i = 1,2, \ldots ,N$, που σημαίνει ότι μόνον $3N-n = k$ μεταβλητές είναι ανεξάρτητες από τις $3N$ φυσικές συντεταγμένες. Εισάγοντας γενικευμένες μεταβλητές q_k έτσι ώστε οι παραπάνω σύνδεσμοι να ικανοποιούνται, έχουμε αυτόματα τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, \ldots , q_k, t) , \\ y_i &= y_i(q_1, \ldots , q_k, t) , \\ z_i &= z_i(q_1, \ldots , q_k, t) . \end{aligned} \tag{7.16}$$

Οι εξισώσεις (7.16) είναι πολύ σημαντικές γιατί συνδέουν τις φυσικές συντεταγμένες με τις γενικευμένες συντεταγμένες. Επίσης, μπορεί κανείς να θεωρήσει τις (7.16) ως παραμετρικές εξισώσεις των φυσικών συντεταγμένων. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι (7.16) ικανοποιούν αυτόματα τις εξισώσεις συνδέσμων (7.8)· με άλλα λόγια ο σύνδεσμος έχει συμπεριληφθεί στην εκλογή των q_k. Τέλος, οι παραπάνω εξισώσεις μας επιτρέπουν την έκφραση διαφόρων απεικονιστικών μεγεθών της μηχανικής με την βοήθεια των συντεταγμένων q_k και επιτρέπουν ενιαία αντιμετώπιση όλων των προβλημάτων που περιέχουν ολόνομους συνδέσμους.

Ως παράδειγμα ας θεωρήσουμε το διπλούν εκκρεμές του σχήματος 7.2 και ας θεωρήσουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ και ψ. Τότε οι εξισώσεις (7.16) παίρνουν την μορφή

$$x_1 = R_1 \sin\theta , \quad x_2 = R_1 \sin\theta + R_2 \sin\psi ,$$

$$y_1 = -R_1 \cos\varphi \,, \quad y_2 = -R_1 \cos\varphi - R_2 \cos\psi \,. \tag{7.17}$$

7.3 Εξισώσεις Lagrange

Θεωρήσουμε ένα μηχανικό σύστημα από N υλικά σημεία και έστω

$$\boxed{r_i = r_i(q_1, \dots, q_k, t) \,,} \quad \rightarrow \delta r_i = \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_i}\delta q_i \tag{7.18}$$

όπου $i = 1, 2, \dots, N$, οι εξισώσεις που συνδέουν τις φυσικές συντεταγμένες και τις γενικευμένες συντεταγμένες. Οι (7.18) αποτελούν την διανυσματική γραφή των (7.16). Ας επαναλάβουμε τώρα μερικές έννοιες από το κεφάλαιο 5 της Αρχής των Δυνατών ΄Εργων. Δίνουμε επομένως μιά στοιχειώδη μετατόπιση του συστήματός μας που είναι συμβιβαστή με τους συνδέσμους. Η μετατόπιση αυτή δεν είναι πραγματική, δηλαδή δεν είναι αυτή που θα υποστεί το μηχανικό σύστημα σε χρόνο dt αν αφεθεί ανεμπόδιστο στην κίνησή του, αλλά είναι μιά δυνατή μετατόπιση. Γιά να καταλάβουμε ας φαντασθούμε πως ο χρόνος παγώνει σε κάποια χρονική στιγμή t και πως εμείς μετακινούμε το σύστημα απείρως κοντά στην προηγούμενη θέση του χωρίς να διαταράζουμε τους συνδέσμους. Ο λόγος που εισάγουμε την έννοια της δυνατής μετατόπισης είναι ακριβώς γιά να απομονώσουμε τις δυνάμεις συνδέσμων οι οποίες είναι άγνωστες. Πράγματι, μέσω της αδρανειακής δύναμης

$$R_i^{a} = -m_i \gamma_i \quad \Rightarrow m_i \gamma_i + R_i^{a} = 0 \Rightarrow F_i^{ολ} + R_i^{α} = 0 \tag{7.19}$$

γιά κάθε υλικό σημείο, γράφουμε την εξίσωση

$$F_i^{ολ} + R_i^{a} = 0 \,, \tag{7.20}$$

όπου $F_i^{ολ}$ παριστάνει το διανυσματικό άθροισμα της εξωτερικής δύναμης και της δύναμης συνδέσμου που ενεργεί σε κάθε σημείο του συστήματος, δηλαδή

$$F_i^{ολ} = F_i^{εξ.} + F_i^{συνδ.} \tag{7.21}$$

Δεδομένου ότι ισχύει η (7.20), ισχύει ταυτοτικά και η εξίσωση

$$\sum_i (F_i^{\epsilon\xi.} + R_i^{\alpha}) \cdot \delta r_i + \sum_i F_i^{\sigma\upsilon\nu\delta.} \cdot \delta r_i = 0 \,, \tag{7.22}$$

όπου τα αθροίσματα αναφέρονται σε όλα τα υλικά σημεία του μηχανικού συστήματος, ενώ δr_i παριστάνει την δυνατή μετατόπιση κάθε υλικού σημείου. Η εξίσωση (7.22) είναι μέχρι στιγμής συνέπεια του νόμου του Νεύτωνος και το μόνο της προσόν είναι ότι παρουσιάζει χωριστά το έργο των δυνάμεων συνδέσμων, οι οποίες είναι ανεπιθύμητες στο πρόβλημα. Στις εισαγωγικές όμως έννοιες τονίσαμε ότι οι δυνάμεις συνδέσμων είναι κάθετες στις τροχιές και συνεπώς παράγουν έργο μηδενικό. Το ίδιο συμβαίνει και γιά όλες τις περιπτώσεις που δεν υπάρχουν τριβές. Με βάση την παρατήρηση αυτή, που στην προκειμένη περίπτωση κάνουμε αξίωμα, η εξίσωση (7.22) μετασχηματίζεται στην

$$\sum_i (F_i^{\epsilon\xi.} + R_i^{\alpha}) \cdot \delta r_i = 0 \,, \tag{7.23}$$

η οποία είναι απηλαγμένη από τις δυνάμεις συνδέσμων. Το ουσιαστικό που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι να μεταφράσουμε την (7.23) σε μιά γλώσσα ποιό απλή και ποιό κατανοητή με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων.

Από την (7.18) υπολογίζουμε τις μεταβολές δr_i γιά μιά δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους συνδέσμους. Επειδή ήδη έχουμε θεωρήσει ότι γιά μιά δυνατή μετατόπιση ο χρόνος είναι παγωμένος (t = σταθ.), έχουμε

$r_i = r_i(q_1, \dots q_k, t)$

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{7.24}$$

όπου $i = 1,2, \dots ,N$ και $j = 1,2, \dots ,k$. Ομοίως υπολογίζουμε όλα τα μεγέθη στην (7.23) μέσω των (7.24). Πράγματι

$$\sum_i F_i^{\epsilon\xi.} \cdot \delta r_i = \sum_j \sum_i \left(F_i^{\epsilon\xi.} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \,.$$

Συμβολίζοντας

$$\sum_i \left(F_i^{\epsilon\xi.} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = Q_j \,, \tag{7.25}$$

τελικά παίρνουμε

$$\sum_i F_i^{\epsilon\xi.} \cdot \delta r_i = \sum_j Q_j \cdot \delta q_j . \tag{7.26}$$

Σημειώνουμε ότι το μέγεθος Q_j καλείται **γενικευμένη δύναμη** λόγω ακριβώς του τρόπου κατασκευής των. Καθ' όμοιο τρόπο

$$\sum_i R_i^a \cdot \delta r_i = \sum_i (-m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i) = \sum_j \sum_i (-m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) \delta q_j \,. \tag{7.27}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) \,. \tag{7.28}$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει μιά χρήσιμη σχέση όταν χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες. Πράγματι:

a) Από την (7.18) προκύπτει:

$$dr_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt$$

εκ της οποίας:

$$\upsilon_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \,. \tag{7.29}$$

b) Λόγω των ανεξαρτήτων μεταβλητών $q_1, \ldots, q_j, t$ έχουμε

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \,, \tag{7.30}$$

c) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dr_i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}(\upsilon_i) \,. \tag{7.31}$$

Γιά την απόδειξη της (7.31) σκεπτόμεθα ότι επειδή η $\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ είναι συνάρτηση των q_j ισχύει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} \,,$$

η οποία συγκρινόμενη με την (7.29) παρέχει το ζητούμενο. Συνδυάζοντας τώρα τις (7.30), (7.31) με την (7.28) ευρίσκουμε:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \upsilon_i \cdot \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_i m_i \upsilon_i \cdot \frac{\partial \upsilon_i}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{7.32}$$

όπου

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2 \,. \tag{7.33}$$

Λόγω λοιπόν της (7.32) η εξίσωση (7.27) γίνεται

$$-\sum_i R_i^a \cdot \delta r_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j \,. \tag{7.34}$$

Θέτοντας τις (7.26) και (7.34) στην (7.33) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\boxed{\sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0.} \tag{7.35}$$

Η εξίσωση (7.35) είναι ισοδύναμη με την (7.23) με την διαφορά ότι τώρα τα πάντα είναι εκφρασμένα με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων q_j, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η ανεξαρτησία των q_j σημαίνει ότι οι συντελεστές των δq_j στην (7.35) πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή

$F_i^{\epsilon\tau} = -\nabla V$

$\boxed{\sum\left(F_i^{\epsilon\tau}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = Q_j}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \,,} \tag{7.36}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

$\boxed{Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}}$

με $j = 1,2, \ldots ,k$.

Η (7.36) είναι η θεμελιώδη εξίσωση στην οποία θέλαμε να καταλήξουμε.

Ας δούμε λεπτομερώς τι ακριβώς σημαίνει η (7.36). Γιά ένα δεδομένο μηχανικό σύστημα επιλέγουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j που προσδιορίζουν πλήρως την κινητική κατάσταση του συστήματος μέσω των (7.18). Στην συνέχεια εκφράζουμε τα μεγέθη T = κινητική ενέργεια και Q_j = γενικευμένη δύναμη με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων και γράφουμε τις αντίστοιχες με τις (7.36) εξισώσεις γιά την συγκεκριμένη περίπτωση. Οι εξισώσεις (7.36) είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι λύσεις των οποίων με κατάλληλες αρχικές συνθήκες $q_i = q_i(t)$ προσδιορίζουν πλήρως την απάντηση του προβλήματος. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το εξής συμπέρασμα:

Γιά κάθε μηχανικό σύστημα με ολόνομους συνδέσμους, που είναι συμβιβαστό με την αρχή D' Alembert, οι εξισώσεις (7.36) δίνουν άμεση απάντηση.

Αξιοσημείωτο είναι ότι οι (7.36) δίνουν απάντηση στο πρόβλημα της περιγραφής του μηχανικού συστήματος, αλλά δεν δίνουν τις δυνάμεις συνδέσμων.

Αυτό είναι φυσική συνέπεια της αρχής των δυνατών έργων μέσω της οποίας απομονώθηκαν οι δυνάμεις συνδέσμων απ΄ όλο το πρόβλημα.

Γιά να πεισθούμε ότι οι εξισώσεις (7.36) είναι πράγματι η απάντηση που ζητάμε, πρέπει να δείξουμε την ισοδυναμία τους με τον θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνος σε όλες τις περιπτώσεις που οι σύνδεσμοι είναι ολόνομοι και δεν υπάρχουν τριβές. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την κίνηση υλικών σημείων υπό την επίδραση τυχούσης δύναμης **F**. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχουν σύνδεσμοι και οι γενικευμένες συντεταγμένες συμπίπτουν με τις φυσικές, δηλαδή

$$q_1 = x \ , \quad q_2 = y \ , \quad q_3 = z \ . \tag{7.37}$$

Οι συνιστώσες της γενικευμένης δύναμης προφανώς λόγω των (7.25) συμπίπτουν με τις καρτεσιανές συνιστώσες της δύναμης $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Επομένως

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \ , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \ , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \ . \tag{7.38}$$

΄Ετσι, οι εξισώσεις (7.36) γράφονται

$$\frac{d}{dt}\,(m\dot{x}) = F_x \ , \quad \frac{d}{dt}\,(m\dot{y}) = F_y \ , \quad \frac{d}{dt}\,(m\dot{z}) = F_z \ , \tag{7.39}$$

που είναι αυτός ο ίδιος ο νόμος του Νεύτωνος. THIS

Οι εξισώσεις (7.36) είναι τόσο ισχυρές που μας επιτρέπουν άμεσα να γράψουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνος (7.39) και σε άλλα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Γιά παράδειγμα ας εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα που είδαμε πριν αλλά σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες. Προφανώς πάλι οι γενικευμένες συντεταγμένες συμπίπτουν με τις φυσικές, αλλά τώρα περιγράφουμε τις φυσικές συντεταγμένες του συστήματος σε κυλινδροπολικές, δηλαδή

$$q_1 = \rho \ , \quad q_2 = \theta \ , \quad q_3 = z \ , \tag{7.40}$$

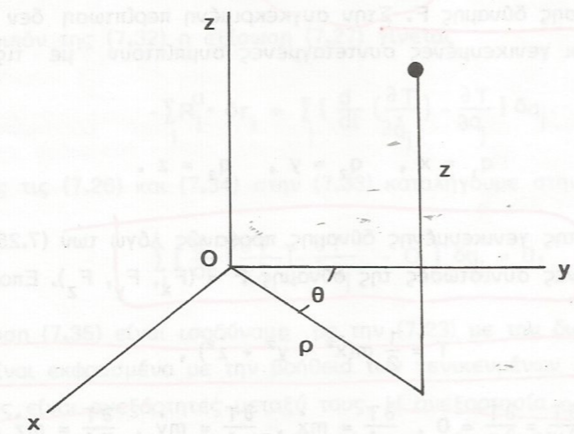
όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4 . Επειδή ισχύουν οι εκφράσεις

$$x = \rho\,\sin\theta \ , \quad y = \rho\,\cos\theta \ , \quad z = z$$

$$\dot{x} = \dot{\rho}\ \sin\theta + \rho\ \cos\theta\ \dot{\theta}\ , \quad \dot{y} = \dot{\rho}\ \cos\theta - \rho\ \sin\theta\ \dot{\theta}\ , \quad \dot{z} = \dot{z}\ , \qquad (7.41)$$

ευρίσκουμε

$$T = \frac{1}{2}\ m\ [\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2\ ]\ . \qquad (7.42)$$



Σχήμα 7.4: Κυλινδροπολικές συντεταγμένες.

Δεδομένου τώρα ότι

$$\mathbf{r} = \rho\boldsymbol{\rho}_0 + z\mathbf{k} = \rho(\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}) + z\mathbf{k}\ ,$$

όπου $\boldsymbol{\rho}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ρ, ευρίσκουμε επίσης από τον τύπο (7.25)

$$Q_\rho = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{F}\cdot(\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}) = F_\rho\ ,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \mathbf{F}\cdot\frac{d}{d\theta}\ (\rho\boldsymbol{\rho}_0 + z\mathbf{k}) = \rho\mathbf{F}\cdot\frac{d}{d\theta}\ (\boldsymbol{\rho}_0) =$$

$$= \rho\mathbf{F}\cdot\frac{d}{d\theta}\ (\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}) = \rho\mathbf{F}\cdot(\cos\theta\ \mathbf{i} - \sin\theta\ \mathbf{j}) = \rho F_\theta\ , \qquad (7.43)$$

$$Q_z = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = F_z\ .$$

Εφαρμόζοντας τώρα τις εξισώσεις (7.36) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2 = F_\rho ,$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) = \rho F_\theta , \qquad (7.44)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z ,$$

οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο νόμος του Νεύτωνος σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες.

Τις εξισώσεις (7.36) καλούμε **γενικευμένες εξισώσεις** της μηχανικής. Μιά ειδική τους περίπτωση είναι εκείνη που θα μας ενδιαφέρει περισσότερο στο μέλλον. Θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση όπου όλες οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή

$$F_i^{\varepsilon\xi.} = -\nabla_i V , \quad V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) . \qquad (7.45)$$

THIS

Τότε, η (7.25) γίνεται

$$Q_j = \sum_i F_i^{\varepsilon\xi.} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \qquad (7.46)$$

δεδομένου ότι

$$V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_k) .$$

Η (7.46) απλοποιεί σημαντικά τις (7.36). Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

THIS

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

ή

$$-\frac{\partial(V-V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0} , \qquad (7.47)$$

εφ' όσον η V δεν εξαρτάται από τα $\dot{q}_j$. Εισάγοντας μιά καινούργια συνάρτηση οριζόμενη από την

$$\boxed{L = T - V} \qquad (7.48)$$

την οποία καλούμε Lagrangian (L), γράφουμε την (7.47) υπό την τελική μορφή

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,,} \tag{7.49}$$

SOS

με $j = 1, \ldots, k$. Οι εξισώσεις (7.49) είναι γνωστές ως **εξισώσεις Lagrange** και αποτελούν ειδική περίπτωση των (7.36).

Ως εφαρμογή ας εξετάσουμε την κίνηση υλικού σημείου, χωρίς τριβές, επί επιφανείας σφαίρας. Θεωρώντας τις γνωστές σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi\,,$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\phi\,,$$

$$z = \rho \cos\theta\,,$$

ευρίσκουμε

$$\dot{x} = \rho \cos\theta \cos\phi\ \dot{\theta} - \rho \sin\theta \sin\phi\ \dot{\phi}\,,$$

$$\dot{y} = \rho \cos\theta \sin\phi\ \dot{\theta} + \rho \sin\theta \sin\phi\ \dot{\phi}\,,$$

$$\dot{z} = -\rho \sin\theta\ \dot{\theta}\,,$$

και συνεπώς η Lagrangian προκύπτει

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\,m\rho^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)\,.$$

Επομένως οι εξισώσεις Lagrange (7.49) παρέχουν

$$\begin{aligned} m\rho^2 \sin^2\theta\ \dot{\phi} &= c\,, \\ \ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta\ \dot{\phi} &= 0\,, \end{aligned} \tag{7.50}$$

όπου c είναι σταθερά.

Η πρώτη των (7.50), η οποία αντιστοιχεί στην γενικευμένη συντεταγμένη φ εκφράζει την διατήρηση της z - συνιστώσας της στροφορμής. Θεωρώντας το αδρανειακό σύστημα αναφοράς έτσι ώστε κατά την χρονική στιγμή t = 0 να είναι $\dot{\phi}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) \neq 0$, η τιμή της σταθεράς c προκύπτει ίση προς μηδέν. Συνεπώς παίρνουμε

$$\sin^2\theta\ \dot{\phi} = 0\,,$$

από την οποία, επειδή $\sin\theta \neq 0$, συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι

$$\phi = \text{σταθερά} \,.$$

Επομένως η κίνηση γίνεται με σταθερά φ, δηλαδή επί του μεσημβρινού της σφαίρας που είναι γεωδαισιακή γραμμή.

7.4 Αρχή της Ελάχιστης Δράσης

SOS

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε τις εξισώσεις Lagrange και τονίσαμε ότι η γνώση της L γιά το τυχόν ιδανικό μηχανικό πρόβλημα μας οδηγεί αυτομάτως στην λύση του προβλήματος της αναλυτικής δυναμικής μέσω των εξισώσεων (7.49). Η μέθοδος των εξισώσεων Lagrange είναι τόσο ισχυρή ώστε μπορεί να εφαρμοσθεί και σε περιοχές όπου δεν έχουμε καμιά απεικονιστική ιδέα του τί συμβαίνει, π.χ. πυρηνική φυσική. Τέτοιες περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των εξισώσεων Lagrange σε άλλες περιοχές της φυσικής βάζουν αυτομάτως ορισμένα ερωτήματα, όπως:

α) Είναι αυτοδύναμη η αναλυτική περιγραφή; δηλαδή μπορεί κανείς να ξεκινήσει πάντοτε από μιά γενική αρχή αναφερομένη στην ίδια την Lagrangian και όχι στους νόμους του Νεύτωνος;

β) Επειδή η L ορίζεται στην θεσεογραφικό χώρο, τι είδους γεωμετρική εικόνα μπορούμε να έχουμε στον χώρο αυτόν; Ποιό παραστατικά θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε: Είναι δυνατή η αναγωγή του αναλυτικού προβλήματος σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο θεσεογραφικό χώρο, και αν ναι, τί είδους νέα γεωμετρία θέτει το αναλυτικό πρόβλημα;

γ) Τι άλλα πράγματα η Lagrangian μπορεί να μας δόσει εκτός από τις εξισώσεις κίνησης; Μπορεί η Lagrangian να μας δόσει διατήρηση ενέργειας, ορμής, φορτίου και με ποιό τρόπο;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε λεπτομερώς στο ερώτημα (α). Θα δείξουμε δηλαδή ότι οι εξισώσεις Lagrange, που προήλθαν ουσιαστικά από τον νόμο του Νεύτωνος μέσω της αρχής των δυνατών έργων, προέρχονται επίσης από μιά αρχή η οποία αναφέρεται αυστηρά στην συνάρτηση Lagrange L. Η αρχή αυτή καλείται **αρχή της ελαχίστης δράσης** συναντάται δε και ως **αρχή Hamilton.** Η διατύπωση της είναι ως εξής: *Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή t_1 στην χρονική στιγμή t_2 είναι τέτοια ώστε το συναρτησειοειδές*

Γενικευμένες συντεταγμένες

Οι ολόνομοι σύνδεσμοι σαν συνάρτηση των καρτεσιανών συντεταγμένων περιγράφονται από την σχέση:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0$$

όπου $i=1,2,\ldots, N$ και $j=1,2,\ldots, n$

γεγονός που σημαίνει ότι μόνο 3N-η = k μεταβλητές είναι ανεξάρτητες από τις 3N φυσικές συντεταγμένες.
Εισάγοντας γενικευμένες μεταβλητές qk έτσι ώστε οι παραπάνω σύνδεσμοι να ικανοποιούνται, έχουμε αυτόματα τις εκφράσεις :

$$x_i = x_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$y_i = y_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$z_i = z_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές γιατί συνδέουν τις φυσικές συντεταγμένες με τις γενικευμένες συντεταγμένες. Επίσης μπορεί κανείς να Θεωρήσει τις παραπάνω εξισώσεις σαν τις παραμετρικές εξισώσεις των φυσικών συντεταγμένων

Γενικευμένες συντεταγμένες

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός ότι οι εξισώσεις

$$x_i = x_i\,(q_1\,,\; q_2\,,\ldots.,\; q_k\,,t)$$

$$y_i = y_i\,(q_1\,,\; q_2\,,\ldots.,\; q_k\,,t)$$

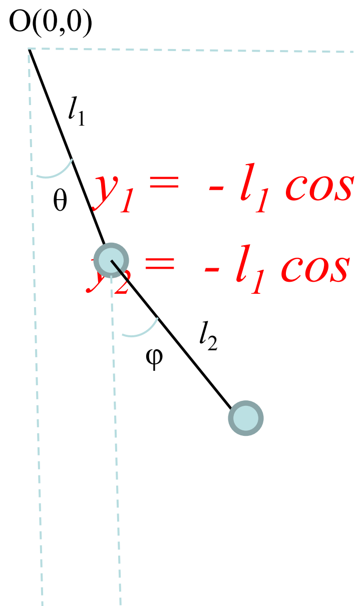
$$z_i = z_i\,(q_1\,,\; q_2\,,\ldots.,\; q_k\,,t)$$

Ικανοποιούν αυτόματα τις εξισώσεις συνδέσμων. Με άλλα λόγια ο σύνδεσμος έχει συμπεριληφθεί στην εκλογή των συντεταγμένων q_k.

Ένα επίσης πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι παραπάνω εξισώσεις μας επιτρέπουν την έκφραση διαφόρων απεικονιστικών μεγεθών της Μηχανικής με την βοήθεια των συντεταγμένων q_k και επιτρέπουν ενιαία αντιμετώπιση όλων των προβλημάτων που περιέχουν ολόνομους συνδέσμους.

Παράδειγμα : ΔΙΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Έστω το διπλό εκκρεμές του παρακάτω σχήματος.



$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad y_1 = -l_1 \cos\theta$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\varphi \qquad y_2 = -l_1 \cos\theta - l_2 \cos\varphi$$

Αν θεωρήσουμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ και φ τότε οι εξισώσεις

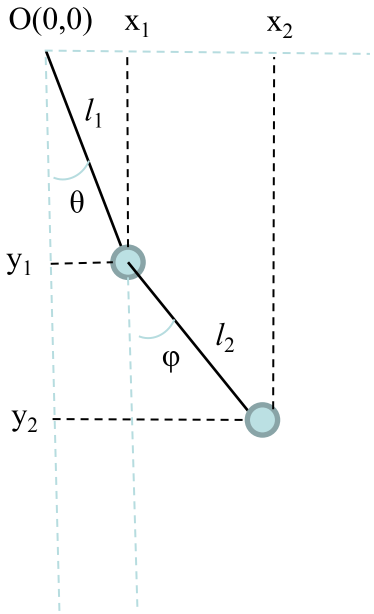
$$x_i = x_i\,(q_1, q_2, \ldots., q_k, t)$$

$$y_i = y_i\,(q_1, q_2, \ldots., q_k, t)$$

$$z_i = z_i\,(q_1, q_2, \ldots., q_k, t)$$

για το συγκεκριμένο παράδειγμα, γράφονται :

Παράδειγμα : ΔΙΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



$$x_i = x_i\,(q_1\,,\,q_2\,,\ldots,\,q_k\,,t)$$

$$y_i = y_i\,(q_1\,,\,q_2\,,\ldots,\,q_k\,,t)$$

$$z_i = z_i\,(q_1\,,\,q_2\,,\ldots,\,q_k\,,t)$$

γράφονται :

$$x_1 = l_1 \sin\theta$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\varphi$$

$$y_1 = -\,l_1 \cos\theta$$

$$y_2 = -\,l_1 \cos\theta - l_2 \cos\varphi$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

T= Κινητική Ενέργεια

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$\dot{q}_i$ = Γενικευμένες ταχύτητες

Q_j= Γενικευμένες Δυνάμεις

q_j= Γενικευμένες συντεταγμένες

όπου : $$Q_j = \sum\left(F_i^{\varepsilon\xi}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$$

και j=1,2,…., k

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Ας δούμε λεπτομερώς τι σημαίνει η σχέση $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ (1)

Για ένα δεδομένο μηχανικό σύστημα επιλέγουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j που προσδιορίζουν πλήρως την κινητική κατάσταση του συστήματος μέσω των σχέσεων

$$r_i = r_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τα μεγέθη *T = Κινητική Ενέργεια* και Q_j = Γενικευμένες Δυνάμεις με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων και γράφουμε τις αντίστοιχες με τις (1) εξισώσεις για την συγκεκριμένη περίπτωση.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \text{όπου } j=1,2,\ldots,k$$

Οι εξισώσεις (1) είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι λύσεις των οποίων με κατάλληλες αρχικές συνθήκες $q_i=q_i(t)$ προσδιορίζουν πλήρως την απάντηση του προβλήματος

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Επομένως μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το εξής συμπέρασμα:

Για κάθε μηχανικό σύστημα με ολόνομους συνδέσμους που είναι συμβιβαστό με την αρχή D' Alembert οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

δίνουν άμεση απάντηση

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός ότι οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν απάντηση στο πρόβλημα περιγραφής του μηχανικού συστήματος, αλλά δεν δίνουν τις δυνάμεις των συνδέσμων

Αυτό είναι φυσική συνέπεια της αρχής των δυνατών έργων μέσω της οποίας απομονώθηκαν οι δυνάμεις συνδέσμων από τι πρόβλημα.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Για να πεισθούμε ότι οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

είναι πράγματι η απάντηση που ζητάμε, πρέπει να δείξουμε την ισοδυναμία τους με τον θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα σε όλες τις περιπτώσεις που οι σύνδεσμοι είναι ολόνομοι και δεν υπάρχουν τριβές.

Ας θεωρήσουμε την κίνηση υλικών σημείων υπό την επίδραση μιας τυχαίας δύναμης F.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχουν σύνδεσμοι και έτσι οι γενικευμένες συντεταγμένες συμπίπτουν με τις φυσικές. Επομένως :

$$q_1 = x$$

$$q_2 = y$$

$$q_3 = z$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Τότε οι συνιστώσες της γενικευμένης δύναμης θα συμπίπτουν με τις καρτεσιανές συνιστώσες της δύναμης *F = (Fx,Fy,Fz)*

Επομένως:

$$T = \frac{1}{2} m \,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Οπότε:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

και

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Έτσι οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γράφονται :

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = F_x$$

Ομοίως:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= m\ddot{y} = F_y \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= m\ddot{z} = F_z \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{ο νόμος του Νεύτωνα}$$

Εξισώσεις LAGRANGE

Στην περίπτωση κατά την οποία οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

όπου: $V = V(r_1, r_2, \ldots, r_N)$

και $r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$

οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γίνονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = -\frac{\partial (V-V)}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Εφόσον η V δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$

$$V=V(r_1, r_2, \ldots., r_N)$$

Επομένως εισάγοντας μια καινούργια συνάρτηση L που ορίζεται ως L :

$$L = T - V$$

θα έχουμε :

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\boxed{L = T - V}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση Lagrange**

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου (χωρίς τριβές) πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Τότε:

$$x = r\, sin\theta\, cos\, \varphi$$

$$y = r\, sin\theta\, sin\, \varphi$$

$$z = r\, cos\, \theta$$

Επομένως:

$$\dot{x} = r\, cos\theta\, cos\varphi\, \dot{\theta} - r\, sin\theta\, sin\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = r\, cos\theta\, sin\varphi\, \dot{\theta} - r\, sin\theta\, cos\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = -\, r\, sin\theta\, \dot{\theta}$$

Συνεπώς :

$$T = \frac{1}{2} m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$\dot{x} = r\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{y} = r\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{z} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}$

$\dot{x}^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}$

$\dot{y}^2 = r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}$

$\dot{z}^2 = r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$

Συνεπώς :

$$T = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m\,(r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \cancel{-2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}} +$$
$$r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \cancel{+ 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}} +$$
$$r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\,)$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$T = \frac{1}{2}\, m \,\Big(r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 \cancel{-2r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi}} + r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 \cancel{+ 2r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi}} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 \Big) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m \,\Big(\underline{r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi\, \dot{\theta}^2} + \underline{r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2} + \underline{r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2} + \underline{r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 \Big) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m \,\Big[\, r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 \overbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}^{1} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \overbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}^{1} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 \,\Big] \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m \,\Big[\, \underline{r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + \underline{r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2} \,\Big] \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m \,\Big[\, r^2\, \dot{\theta}^2 \overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \,\Big] \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$T = \frac{1}{2} m \, [\, r^2 \dot{\theta}^2 \cancelto{1}{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} + r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \,] \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \, [\, r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \,] \longrightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \, r^2 \, [\, \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \,]}$$

Επίσης θεωρώντας ότι το δυναμικό V στην επιφάνεια της σφαίρας είναι μηδέν, έχουμε ότι :

$$\boxed{V = 0}$$

Συνάρτηση Lagrange

Συνεπώς η **συνάρτηση Lagrange** γράφεται:

$$\boxed{L = T - V} \longrightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \, r^2 \, [\, \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \,]}$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Επομένως η **εξίσωση Lagrange** για την γενικευμένη συντεταγμένη *φ* γράφεται:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0}$$

Όμως:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m\, r^2 \left[\, \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \underline{\dot{\varphi}^2}\, \right]}$$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m\, r^2 \sin^2\theta\; 2\dot{\varphi} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\, r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\, r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\, r^2 \sin^2\theta\, \ddot{\varphi}}$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Επειδή : $$\boxed{L = \frac{1}{2} m\, r^2 \,[\, \dot{\theta}^2 + sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \,]}$$

βρίσκουμε: $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Επίσης προηγουμένως είχαμε βρει ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\, r^2\, sin^2\theta\, \ddot{\varphi}$$

Επομένως η **εξίσωση Lagrange** για την γενικευμένη συντεταγμένη φ γράφεται:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0}$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\, r^2 \sin^2\theta\, \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\longrightarrow \quad m\, r^2 \sin^2\theta\, \ddot{\varphi} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$m\, r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} = c$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την διατήρηση της z- συνιστώσας της στροφορμής

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ομοίως η **εξίσωση Lagrange** για την γενικευμένη συντεταγμένη θ γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Όμως:

$$L = \frac{1}{2} m\, r^2 \left[\, \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \,\right]$$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m\, r^2 2\dot{\theta} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\, r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\, r^2 \dot{\theta}\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\, r^2 \ddot{\theta}$$

Εξισώσεις LAGRANGE

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m\, r^2 \left[\, \dot{\theta}^2 + \underline{\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2} \,\right]}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m\, r^2\, \dot{\varphi}^2\, 2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\, r^2\, \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}$$

Επίσης προηγουμένως είχαμε βρει ότι:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\, r^2 \ddot{\theta}}$$

Αντικαθιστώντας η **εξίσωση Lagrange** για την γενικευμένη συντεταγμένη *θ* γράφεται:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0} \longrightarrow$$

$$\boxed{m\, r^2 \ddot{\theta} - m\, r^2\, \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta\, \cancelto{1}{\dot{\theta}} = 0} \longrightarrow$$

$$\boxed{m\, r^2 \left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) = 0} \longrightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = 0}$$