07/04/2021

ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

3/5/07

ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

5.1 Δυνατές Μετατοπίσεις Συστήματος - Βαθμοί Ελευθερίας Κίνησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μιάν άλλη γενική αρχή, **την αρχή των δυνατών μετατοπίσεων**, η οποία παρέχει τις συνθήκες ισορροπίας ενός μηχανικού συστήματος στην γενικώτερη μορφή. Στην εξέταση της ισορροπίας ενός συστήματος σωμάτων με τις γνωστές μεθόδους της γεωμετρικής στατικής θα πρέπει να ερευνηθούν οι συνθήκες ισορροπίας κάθε σώματος χωριστά με σύγχρονο αντικατάσταση των συνδέσμων με τις άγνωστες αντιδράσεις. Η μέθοδος αυτή, γιά σύστημα πολλών σωμάτων, απαιτεί την λύση ενός μεγάλου αριθμού εξισώσεων με πολλά άγνωστα μεγέθη.

Χαρακτηριστικό της νέας μεθόδου, η οποία βασίζεται στην προαναφερθείσα αρχή των δυνατών μετατοπίσεων, είναι ότι η δράση των συνδέσμων λαμβάνεται υπ΄ όψη όχι γιά να εισάγουμε τις αντιδράσεις αυτών, αλλά γιά τον έλεγχο των δυνατών μετατοπίσεων καθώς διαταράσσεται η ισορροπία. Αυτές οι μετατοπίσεις, που πρέπει να είναι συμβιβαστές με τους συνδέσμους, λέγονται **δυνατές μετατοπίσεις.**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα υλικών σημείων. Οι δυνατές μετατοπίσεις των σημείων αυτών πρέπει να ικανοποιούν τις εξής δύο συνθήκες:

α) Οι μετατοπίσεις να είναι απειροστές, γιατί άλλως το σύστημα θα καταλάβει μιά νέα θέση στην οποία οι συνθήκες ισορροπίας μπορεί να διαφέρουν, και

β) Οι μετατοπίσεις να είναι συμβιβαστές με τους συνδέσμους του συστήματος, γιατί άλλως μπορεί να αλλάξουν την μορφή του θεωρούμενου μηχανικού συστήματος.

Στην γενικώτερη περίπτωση τα υλικά σημεία και σώματα ενός συστήματος μπορεί να έχουν ένα αριθμό διαφόρων δυνατών μετατοπίσεων. Γιά κάθε πάντως σύστημα, ανάλογα με την μορφή των συνδέσμων, μπορούμε να καθορίσουμε ένα ορισμένο αριθμό ανεξαρτήτων δυνατών μετατοπίσεων όπου κάθε άλλη δυνατή μετατόπιση μπορεί να προκύψει ως γεωμετρικό άθροισμα των πρώτων. Γιά παράδειγμα ας θεωρήσουμε μιά σφαίρα επί επιπέδου ή επί επιφανείας η οποία μπορεί να κινηθεί σε πολλές διευθύνσεις. Εντούτοις μιά μετακίνηση δs μπορεί να προκύψει ως άθροισμα (γεωμετρικό) δύο μετατοπίσεων κατά μήκος δύο αμοιβαία καθέτων οριζοντίων αξόνων, δηλαδή γράφουμε

$$\delta s = \delta s_1 + \delta s_2 \ .$$

Ο αριθμός των δυνατών αμοιβαία ανεξάρτητων μετατοπίσεων ενός συστήματος καλείται **αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος.** Έτσι, η σφαίρα που προηγουμένως αναφέραμε έχει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης. Ένα ελεύθερο σώμα έχει έξ (6) βαθμούς ελευθερίας κίνησης, τις τρεις μετακινήσεις μεταφοράς κατά μήκος ορθογωνίων αξόνων και τις τρεις περιστροφές περί αυτούς.

5.2 Αμφιμερείς και Μονομερείς Σύνδεσμοι

Θεωρήσουμε υλικό σημείο που υπόκειται στον σύνδεσμο να διατηρείται συνεχώς πάνω σε οριζόντια τράπεζα Oxy και έστω ο άξονας Oz κατακόρυφος με φορά προς τα άνω. Τότε ο σύνδεσμος εκφράζεται από την σχέση

$$\delta z = 0 \ .$$

Αν το παραπάνω υλικό σημείο δεν μπορεί μεν να εισχωρήσει μέσα στην τράπεζα, αλλά μπορεί να απομακρυνθεί από αυτήν μετατοπιζόμενο προς τα άνω, τότε η δυνατή μετατόπιση, συμβιβαζόμενη με τον σύνδεσμο, εκφράζεται μέσω της ανισοτικής σχέσης

$$\delta z \geq 0 \ .$$

Θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία A_1, A_2 που συνδέονται με ένα νήμα αβαρές. Η μέγιστη απόσταση r των δύο σημείων έχει μέτρο r. Όταν το νήμα είναι τεταμένο, οι δυνατές μετατοπίσεις που είναι συμβιβαστές με τον σύνδεσμο εκφράζονται μέσω της ανισότητος

$$\delta r \leq 0 .$$

Αντιθέτως, εφ΄ όσον τα σημεία συνδέονται με στερεά ράβδο A_1A_2, τότε ο σύνδεσμος εκφράζεται μέσω της εξίσωσης

$$\delta r = 0 .$$

Οι σύνδεσμοι οι οποίοι εκφράζονται μέσω ισοτήτων καλούνται **αμφιμερείς** ή **ιδανικοί**. Αντιθέτως, οι εκφραζόμενοι με ανισότητες καλούνται **μονομερείς**. Στους αμφιμερείς συνδέσμους το έργο των αντιδράσεων είναι ίσο προς μηδέν.

5.3 Αρχή των Δυνατών Έργων

Δυνατό έργο καλούμε το έργο που παράγεται από μιά δύναμη, εφαρμοζόμενη σε υλικό σημείο, κατά μία μετακίνηση που συμπίπτει με δυνατή μετακίνηση του υλικού σημείου.

Ας παραστήσουμε το δυνατό έργο που παράγει μιά από τις ενεργούσες δυνάμεις F^ϵ με το σύμβολο δA^ϵ, όπου

$$\delta A^\epsilon = F^\epsilon \cdot \delta s = F^\epsilon \delta s \cos a , \tag{5.1}$$

και α παριστάνει την γωνία μεταξύ F^ϵ και δs. Επίσης, το δυνατό έργο που παράγεται από την αντίδραση **A** του συνδέσμου συμβολίζουμε με δA.

Θεωρούμε σύστημα με αμφιμερείς ή ιδανικούς συνδέσμους, όπου το σύνολο των στοιχειωδών έργων που παράγεται από τις αντιδράσεις των συνδέσμων γιά κάθε δυνατή μετακίνηση του συστήματος είναι μηδενικό, δηλαδή

$$\sum_i \delta A_i = 0 . \tag{5.2}$$

Θεωρήσουμε τώρα σύστημα υλικών σημείων σε ισορροπία υπό την ενέργεια εφαρμοσμένων δυνάμεων και αμφιμερών συνδέσμων. Θεωρήσουμε επίσης τυχόν υλικό σημείο Σ_i του συστήματος και παραστήσουμε την συνισταμένη όλων των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων με $F_i^{\epsilon\xi}$ καθώς και την συνισταμένη όλων των αντιδράσεων των εξωτερικών και εσωτερικών συνδέσμων με A_i. Λόγω της ισορροπίας του Σ_i ισχύει

$$F_i^{\epsilon\xi.} + A_i = 0 \rightarrow A_i = -F_i^{\epsilon\xi.} \quad . \tag{5.3}$$

Συνεπώς, γιά κάθε δυνατή μετακίνηση τα δυνατά έργα των δυνάμεων θα είναι

$$\sum_i \delta A_i^{\epsilon\xi.} + \sum_i \delta A_i = 0 \, , \tag{5.4}$$

όπου το άθροισμα παριστάνει την επέκταση της (5.3) γιά όλα τα υλικά σημεία. Δεδομένου τώρα ότι οι σύνδεσμοι είναι αμφιμερείς, η ποσότητα $\sum_i \delta A_i$ είναι ίση προς το μηδέν, δηλαδή τελικά έχουμε

$$\sum_i \delta A_i^{\epsilon\xi.} = 0 \rightarrow \sum_i (F_i^{\epsilon\xi.} \delta s_i \cos \alpha_i) = 0 \, . \tag{5.5}$$

Συνεπώς αποδείχθηκε ότι, αν ένα μηχανικό σύστημα με ιδανικούς συνδέσμους ευρίσκεται σε ισορροπία, οι ενεργούσες δυνάμεις ικανοποιούν την συνθήκη (5.5). Αλλά αληθεύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν οι ενεργούσες δυνάμεις ικανοποιούν την εξίσωση (5.5), τότε το σύστημα ισορροπεί. Επομένως προκύπτει η αρχή των δυνατών έργων, δηλαδή: ***Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ισορροπίας ενός συστήματος με ιδανικούς συνδέσμους είναι ότι το συνολικό έργο που παράγεται από το σύνολο των ενεργούσων δυνάμεων είναι ίση προς μηδέν γιά κάθε δυνατή μετακίνηση συμβιβαστή με τους συνδέσμους.***

Η αναλυτική έκφραση της συνθήκης (5.5) είναι

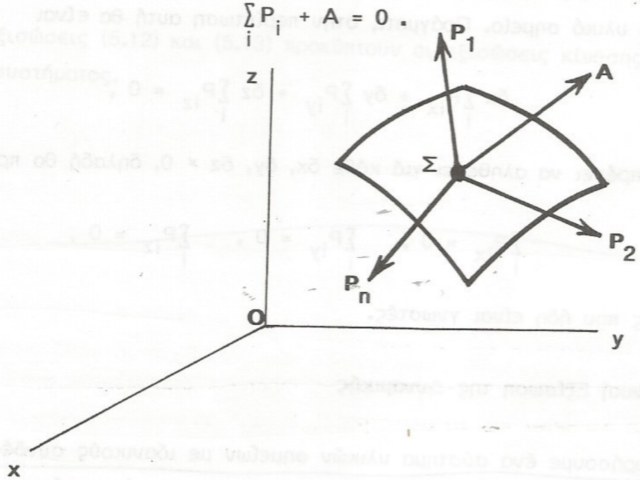
$$\sum_i (F_{ix}^{\epsilon\xi.} \delta x_i + F_{iy}^{\epsilon\xi.} \delta y_i + F_{iz}^{\epsilon\xi.} \delta z_i) = 0 \, . \tag{5.6}$$

Η αρχή των δυνατών έργων παρέχει σε γενική μορφή τις συνθήκες ισορροπίας ενός μηχανικού συστήματος, ενώ η μέθοδος της γεωμετρικής στατικής απαιτεί την κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας κάθε σώματος χωριστά. Ακόμη, κατά την εφαρμογή της αρχής αυτής των δυνατών έργων λαμβάνονται υπ΄ όψη μόνον οι ενεργούσες δυνάμεις και αγνοούνται όλες οι άγνωστες αντιδράσεις των συνδέσμων, θεωρουμένων ιδανικών, πράγμα που στην άλλη μέθοδο δεν ισχύει.

Γιά την καλύτερη κατανόηση των συμβιβαστών μετακινήσεων και της αρχής των δυνατών έργων θεωρήσουμε υλικό σημείο Σ που υπόκειται στον σύνδεσμο να διατηρείται πάνω σε μιά επιφάνεια συνεχώς και έστω ότι το Σ ισορροπεί πάνω σ΄ αυτήν (Σχ. 5.1).

Υποθέτουμε ότι ο σύνδεσμος είναι άνευ τριβής οπότε η αντίδραση **Α** είναι κάθετη στην επιφάνεια. Αν επί του Σ ενεργεί το σύστημα των εξωτερικών δυνάμεων $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$, η συνθήκη ισορροπίας του Σ είναι

$$\sum_i \mathbf{P}_i + \mathbf{A} = 0 \; . \tag{5.7}$$



Σχήμα 5.1: Υλικό σημείο κινούμενο επί λείας επιφάνειας.

Έστω τώρα ότι δίνουμε στο Σ στοιχειώδη μετατόπιση ΣΣ΄ = δ**s** πάνω στην επιφάνεια. Μιά τέτοια μετατόπιση ονομάζεται δυνατή σε αντιδιαστολή προς την πραγματική που θα είχε το Σ αν δεν ήταν σε ισορροπία. Επειδή η μετατόπιση δ**s** λήφθηκε πάνω στην επιφάνεια καλείται **συμβιβαστή** με τον σύνδεσμο. Επομένως έχουμε

$$\sum_i \mathbf{P}_i \cdot \delta\mathbf{s} + \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{s} = 0 \tag{5.8}$$

και, εφ΄ όσον η αντίδραση **Α** είναι κάθετη στην επιφάνεια, έπεται $\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{s} = 0$, δηλαδή

$$\sum_i \mathbf{P}_i \cdot \delta\mathbf{s} = 0 \tag{5.9}$$

Το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο παριστάνει το άθροισμα των στοιχειωδών έργων $\delta A_i^{\varepsilon\xi.}$ της δύναμης $\mathbf{P}_i$ κατά την μετακίνηση δ**s**. Άρα η παραπάνω εξίσωση εκφράζει ότι γιά να ισορροπεί το Σ πάνω στην επιφάνεια πρέπει το άθροισμα των δυνατών έργων των δυνάμεων P_i να ισούται προς μηδέν. Η συνθήκη αυτή εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι επαρκής.

Είναι προφανές ότι στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε το υλικό σημείο μη υποκείμενο σε σύνδεσμο, δηλαδή αν το θεωρήσουμε ως ελεύθερο υλικό σημείο. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$\delta x \sum_i P_{ix} + \delta y \sum_i P_{iy} + \delta z \sum_i P_{iz} = 0 ,$$

η οποία πρέπει να αληθεύει γιά κάθε δx, δy, δz ≠ 0, δηλαδή θα πρέπει

$$\sum_i P_{ix} = 0 , \quad \sum_i P_{iy} = 0 , \quad \sum_i P_{iz} = 0 , \tag{5.10}$$

συνθήκες που ήδη είναι γνωστές.

5.4 Γενική Εξίσωση της Δυναμικής

Θεωρήσουμε ένα σύστημα υλικών σημείων με ιδανικούς συνδέσμους, δηλαδή με συνδέσμους που οι αντιδράσεις τους δεν παράγουν έργο σε κάθε δυνατή μετακίνηση. Έστω ότι στο υλικό σημείο A_i ενεργούν:

α) Η εξωτερική δύναμη $P_i^{\epsilon\xi.}$,

β) Η αντίδραση A_i , και

γ) Η δύναμη αδρανείας $R_i^{\alpha} = - m\gamma_i$.

Τότε, κατά την αρχή D΄ Alembert, το προκύπτον σύστημα δυνάμεων ισορροπεί. Αν εφαρμόσουμε την αρχή των δυνατών έργων θα έχουμε

$$\sum_i \delta \mathbf{F}_i^{\epsilon\xi.} + \sum_i \delta \mathbf{A}_i + \sum_i \delta \mathbf{R}_i^{\alpha} = 0 . \tag{5.11}$$

Επειδή όμως οι σύνδεσμοι είναι ιδανικοί θα ισχύει $\sum_i \delta A_i = 0$ και επομένως

$$\sum_i \delta \mathbf{F}_i^{\epsilon\xi.} + \sum_i \delta \mathbf{R}_i^{\alpha} = 0 . \tag{5.12}$$

Η εξίσωση (5.12) αποτελεί την γενική εξίσωση της δυναμικής και εκφράζει την ακόλουθη αρχή D΄ Alembert - Lagrange : ***Σε ένα κινούμενο σύστημα με ιδανικούς συνδέσμους το συνολικό δυνατό έργο όλων των ενεργουσών δυνάμεων και όλων των δυνάμεων αδρανείας γιά κάθε δυνατή μετακίνηση είναι ίσο προς μηδέν σε κάθε χρονική στιγμή.***

Αναλυτικά η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\sum_i \{ (P^{\epsilon\xi.}_{ix} + R^{a}_{ix})\delta x_i + (P^{\epsilon\xi.}_{iy} + R^{a}_{iy})\delta y_i + (P^{\epsilon\xi.}_{iz} + R^{a}_{iz})\delta z_i \} = 0 . \tag{5.13}$$

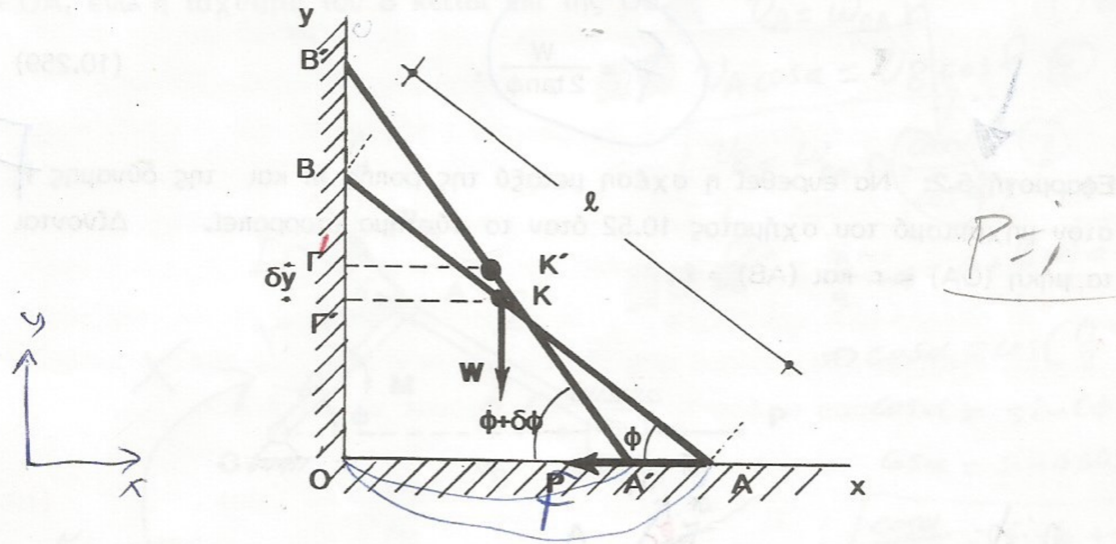
Με τις εξισώσεις (5.12) και (5.13) προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης κάθε μηχανικού συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

5. ΑΡΧΗ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

5/10/2007

Εφαρμογή 5.1: Δίνεται η ομογενής ράβδος βάρους **W** επί κατακορύφου επιπέδου της οποίας τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω στον οριζόντιο άξονα Oy αντίστοιχα (Σχ. 10.51). Ζητείται η οριζόντια δύναμη **P** στο σημείο Α που απαιτείται ούτως ώστε η ράβδος να ευρίσκεται σε ισορροπία.



Σχήμα 10.51: Ράβδος εδραζόμενη επί κατακορύφου και οριζοντίου άξονα.

Λύση: Ας είναι φ η γωνία που σχηματίζεται από την ράβδο και τον οριζόντιο άξονα. Δίνουμε στην ράβδο ΑΒ δυνατή μετατόπιση έτσι ώστε να έλθει στην θέση Α´Β´ που φαίνεται στο σχήμα 10.51. Η γωνία που σχηματίζεται με τον

$F \cdot AA' + W \cdot \Gamma\Gamma' = 0$

$- \quad - \qquad - \quad +$

οριζόντιο άξονα είναι $\phi + \Delta\phi$. Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε

$$P(AA') - W\delta y = 0 \,. \qquad (10.258)$$

Είναι όμως λόγω του πολύ μικρού δφ:

$$(AA') = (OA) - (OA') = \ell[\cos\phi - \cos(\phi+\delta\phi)] = \ell(\cos\phi - \cos\phi\,\cos\delta\phi +$$

$$+ \sin\phi\,\sin\delta\phi) \simeq \ell\,\sin\phi\,\delta\phi \,,$$

$\delta y = O\Gamma - O\Gamma' =$

$$\delta y = \ell[\sin(\phi+\delta\phi) - \sin\phi]/2 \simeq \ell\,\cos\phi\,\delta\phi/2 \,.$$

$$= \frac{\ell}{2}(\sin\phi\cos\delta\phi + \cos\phi\sin\delta\phi - \sin\phi) \simeq \frac{\ell}{2}\cos\phi\,\delta\phi$$

Συνεπώς, η εξίσωση (10.258) γράφεται

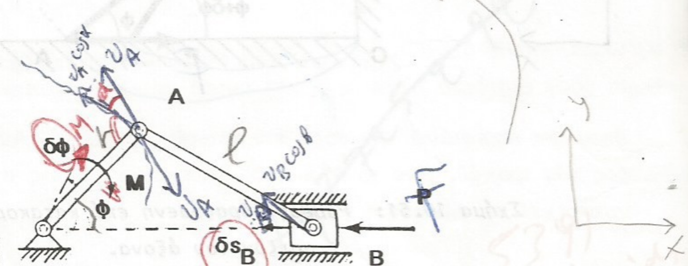
$$P\ell\,\sin\phi\,\delta\phi - \frac{W\ell}{2}\cos\phi\,\delta\phi = 0 \,,$$

η οποία, γιά $\delta\phi \neq 0$, παρέχει

$$P = \frac{W}{2\tan\phi} \,. \qquad (10.259)$$

Εφαρμογή 5.2: Να ευρεθεί η σχέση μεταξύ της ροπής **M** και της δύναμης **P** στον μηχανισμό του σχήματος 10.52 όταν το σύστημα ισορροπεί. Δίνονται τα μήκη (OA) = r και (AB) = ℓ.

r, ℓ, φ



Σχήμα 10.52: Μηχανισμός υποκείμενος σε ροπή και δύναμη.

Λύση: Ας είναι φ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος ΟΑ με την οριζόντιο και έστω δφ η μεταβολή της γιά μιά στοιχειώδη μετακίνηση της Ρ. Με βάση το σχήμα 10.52 και την εξίσωση (5.5) γράφουμε

$$- M\delta\phi + P\delta s_B = 0 \ ;$$

$$-F\cdot\delta s_B + M\delta\phi = 0$$

ή

$$M\frac{\delta\phi}{\delta t} = P\frac{\delta s_B}{\delta t} \ ,$$

$$M\delta\phi = F\cdot\delta s_B$$

$$M\frac{\delta\phi}{\delta t} = F\cdot\frac{\delta s_B}{\delta t} \Rightarrow$$

δηλαδή

$$\boxed{M\omega_{OA} = P\upsilon_B} \ . \qquad M\cdot\omega = F\cdot\upsilon_B \qquad (10.260)$$

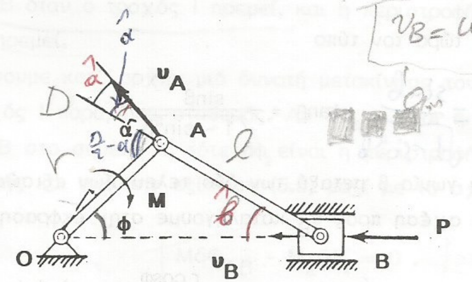
Το πρόβλημα επομένως ανάγεται στον καθορισμό σχέσης μεταξύ της γωνιακής ταχύτητος ω_{OA} και της γραμμικής υ_B. Συνεπώς, αναγόμεθα σε πρόβλημα επίπεδης κινηματικής στερεού σώματος. Από τα αναπτυχθέντα στην παράγραφο 2 και το σχήμα 10.53 συνάγουμε ότι η ταχύτητα του σημείου Α είναι κάθετη στην ΟΑ, ενώ η ταχύτητα του Β κείται επί της ΟΒ.

θεώρημα προβολών ορθών ταχυτήτων

$$\upsilon_A = \omega_{OA} r \qquad (1)$$

$$\upsilon_A\cos\alpha = \upsilon_B\cos\beta \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\upsilon_B = \omega_{OA} r\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (3)$$



$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \phi + \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - (\phi+\beta)$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\phi+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha = \sin(\phi+\beta)$$

$$\cos\alpha = \sin\phi\cos\beta + \cos\phi\sin\beta$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sin\phi + \cos\phi\tan\beta \qquad (4)$$

Σχήμα 10.53: Κινηματικά μεγέθη μηχανισμού.

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \qquad (5)$$

Επίσης, έπεται η σχέση

ν. ημιτόνων: $\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\phi}{l} \Rightarrow$ (6)

$$\upsilon_A = \omega_{OA} r \qquad (10.261)$$

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\phi$$

Από το θεώρημα προβολών ταχυτήτων επί της ΑΒ παίρνουμε

$$(5) + (6) \Rightarrow \tan\beta = \frac{\frac{r}{l}\sin\phi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\phi}}$$

$\upsilon_B = \dfrac{\omega r \cos\alpha}{\cos\beta}$

$$\upsilon_A \cos\alpha = \upsilon_B \cos\beta \;. \tag{10.262}$$

Αλλά η γωνία OAD προκύπτει

$$\sphericalangle\, OAD = \phi + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \;.$$

$\upsilon_B = \omega r \dfrac{\sin(\phi+\beta)}{\cos\beta}$

$\upsilon_B = \omega r \left(\dfrac{\sin\phi\cos\beta + \cos\phi\sin\beta}{\cos\beta}\right)$

$\upsilon_B = \omega r (\sin\phi + \cos\phi \tan\beta)$

$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\phi+\beta)\right)$

$\boxed{\cos\alpha = \sin(\phi+\beta)}$

Συνεπώς,

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - (\phi + \beta) \;.} \tag{10.263}$$

Έτσι, η εξίσωση (10.262) παρέχει $\longrightarrow \omega_{OA} \cdot r \cdot \cos\alpha = \upsilon_B \cos\beta$

$\upsilon_B = \dfrac{\omega_{OA}\, r \cos\alpha}{\cos\beta}$

$$\upsilon_B = \omega_{OA}\, r \cdot \frac{\sin(\phi+\beta)}{\sin\phi} = \omega_{OA}\, r\, (\cos\beta + \cos\phi \tan\beta) \;. \tag{10.264}$$

$\cos\beta + \cos\phi \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

Από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο OAB ευρίσκουμε

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\phi}{\ell}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο

$\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} \,,$$

απαλείφοντας την γωνία β μεταξύ των δύο τελευταίων εξισώσεων και λύνοντας την προκύπτουσα σχέση προς υ_B καταλήγουμε στην έκφραση

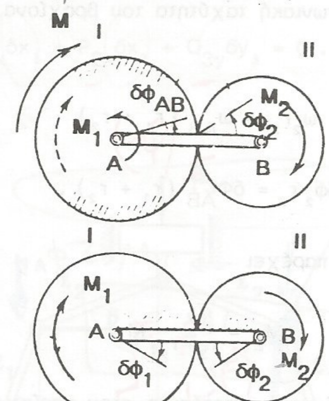
$$\upsilon_B = \omega_{OA}\, r \left(1 + \frac{r\cos\phi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\phi}}\right) \sin\phi \;. \tag{10.265}$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή στην εξίσωση (10.260) παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή

$$\frac{M}{P} = r \left(1 + \frac{r\cos\phi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\phi}}\right) \sin\phi \;. \tag{10.266}$$

Εφαρμογή 5.3: Στον μηχανισμό του σχήματος 10.54 επιβάλλεται εξωτερική ροπή Μ. Να υπολογισθούν οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις ροπών M_1 και M_2 την στιγμή κατά την οποία το σύστημα ισορροπεί.

Εξ. ροπή



Σχήμα 10.54: Μηχανισμός υποβαλλόμενος σε εξωτερική ροπή.

Λύση: Ο μηχανισμός έχει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης, δεδομένου ότι υπάρχουν δύο δυνατές ανεξάρτητες μετατοπίσεις˙ δηλαδή, η περιστροφή του βραχίονα ΑΒ όταν ο τροχός Ι ηρεμεί, και η περιστροφή του τροχού ΙΙ όταν ο βραχίονας ηρεμεί.

Θεωρήσουμε κατ΄ αρχήν μιά δυνατή μετακίνηση του συστήματος στην οποία ο τροχός Ι παραμένει σταθερός. Αν $\delta\Phi_{AB}$ είναι η δυνατή περιστροφή του βραχίονα ΑΒ στο σημείο Α, τότε $\delta\phi_2$ είναι η περιστροφή του τροχού ΙΙ στο σημείο επαφής και από την εξίσωση (5.5) μαζί με το σχήμα 10.54a παίρνουμε

$$M\delta\Phi_{AB} - M_2\delta\phi_2 = 0 \,. \tag{10.267}$$

Αλλά. εφ΄ όσον ο τροχός Ι ηρεμεί, το σημείο επαφής των δύο τροχών είναι κέντρο μηδενικής ταχύτητος γιά τον τροχό ΙΙ και συνεπώς

$$\upsilon_B = \omega_2\, r_2 \,, \tag{10.268}$$

όπου ω_2 παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα του τροχού ΙΙ.
Την ίδια χρονική στιγμή η ταχύτητα υ_B εκφράζεται και από την σχέση

$$\upsilon_B = \omega_{AB}\,(r_1 + r_2) \,, \tag{10.269}$$

όπου ω_{AB} παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα του βραχίονα ΑΒ στο σημείο Α. Επομένως παίρνουμε

$$\omega_2 r_2 = \omega_{AB}\,(r_1 + r_2)$$ $\Rightarrow \frac{\delta\phi_2}{\delta t} r_2 = \frac{\delta\Phi_{AB}}{\delta t}(r_1+r_2)$

ή

$$\delta\phi_2 r_2 = \delta\Phi_{AB}\,(r_1 + r_2)\,,$$

η οποία μέσω της (10.267) παρέχει $\Longrightarrow M\,\delta\phi_{AB} - M_2\,\delta\phi_2 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\,M\,.}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δυνατή μετατόπιση στην περίπτωση που ο βραχίονας ΑΒ παραμένει ακίνητος. Τότε, με βάση την εξίσωση (5.5) και το σχήμα 10.54b έχουμε

$$M_1\delta\phi_1 - M_2\delta\phi_2 = 0\,. \qquad (10.271)$$

Αλλά, αφού ο βραχίονας ηρεμεί, ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\delta\phi_2}{\delta\phi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

και επομένως, από την ~~(10.267)~~ (10.271)

$$\boxed{M_1 = \frac{r_1}{r_2}\,M_2\,.} \qquad (10.272)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (10.270) και (10.272) παρέχει το αποτέλεσμα

$$M_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\,M\,, \qquad M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\,M\,. \qquad (10.273)$$

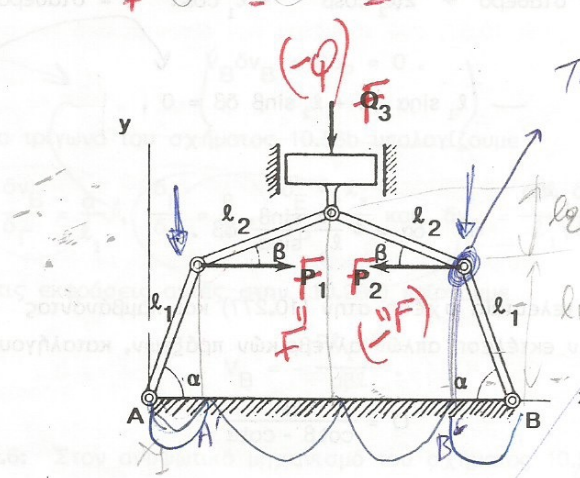
ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

Εφαρμογή 5.4: Να καθορισθεί η σχέση μεταξύ των δυνάμεων P_1, P_2 και Q_3 γιά να ισορροπεί ο μηχανισμός του σχήματος 10.55 αν οι γωνίες α και β είναι γνωστές. Να αμεληθεί το βάρος των ράβδων. Δίνεται $P_1 = P_2 = P$ και $Q_3 = Q$.

Λύση: Κάνοντας χρήση της εξίσωσης (5.6) και βάσει του συστήματος συντεταγμένων του σχήματος 10.55 έχουμε

Αφου ισορροπεί $\Rightarrow \sum W^{F}_{\varepsilon\xi} = 0$

$$P_{1x}\delta x_1 + P_{2x}\delta x_2 + Q_{3y}\delta y_3 = 0 \,. \qquad (10.274)$$



Το σημείο εφαρμογής της P_2 είναι (AB') $\ell_1 \cos a + 2\ell_2 \cos b$

Το σημείο εφαρμογής της P_1 είναι το $AA' = \ell_1 \cos\alpha$

Σχήμα 10.55: Μηχανισμός υποκείμενος σε δυνάμεις.

Υπολογίζουμε τώρα τις συντεταγμένες x_1, x_2, y_3 συναρτήσει των γωνιών α και β. Αν ℓ_1, ℓ_2 είναι τα μήκη των αντίστοιχων ράβδων (Σχ. 10.55) παίρνουμε

$$x_1 = \ell_1 \cos\alpha \;, \quad x_2 = \ell_1 \cos\alpha + 2\ell_2 \cos\beta \;, \quad y_3 = \ell_2 \sin\beta + \ell_1 \sin\alpha \;. \qquad (10.275)$$

από τις οποίες προκύπτουν

$$\delta x_1 = -\ell_1 \sin\alpha\, \delta\alpha \;, \quad \delta x_2 = -(\ell_1 \sin\alpha\, \delta\alpha + 2\ell_2 \sin\beta\, \delta\beta) \;,$$

$$\delta y_3 = \ell_2 \cos\beta\, \delta\beta + \ell_1 \cos\alpha\, \delta\alpha \;. \qquad (10.276)$$

Εισάγοντας τις τελευταίες εκφράσεις στην εξίσωση (10.274) και λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι

$$P_{1x} = P \;, \quad P_{2x} = -P \;, \quad Q_{3y} = -Q \;,$$

καταλήγουμε στην σχέση

$$2P\ell_2 \sin\beta\, \delta\beta - Q(\ell_2 \cos\beta\, \delta\beta + \ell_1 \cos\alpha\, \delta\alpha) = 0 \;. \qquad (10.277)$$

΄Εχουμε όμως

$$(AB) = \text{σταθερό} \rightarrow 2(\ell_2 \cos\beta + \ell_1 \cos\alpha) = \text{σταθερό} \,,$$

άρα η παράγωγος (=μηδέν)

και συνεπώς

$$\ell_1 \sin\alpha \,\delta\alpha + \ell_2 \sin\beta \,\delta\beta = 0 \,,$$

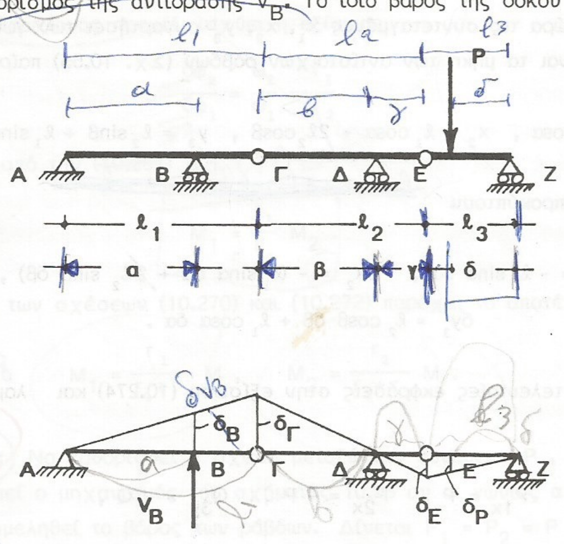
δηλαδή

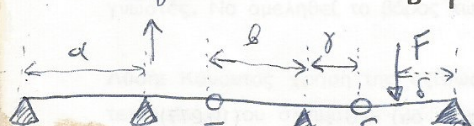
$$\delta\alpha = -\frac{\ell_2}{\ell_1}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\delta\beta \,. \qquad (10.278)$$

Εισάγοντας την τελευταία σχέση στην (10.277) και λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι $\delta\beta \neq 0$, μετά την εκτέλεση απλών αλγεβρικών πράξεων, καταλήγουμε στην

$$Q = \frac{2P}{\cot\beta - \cot\alpha} \,. \qquad (10.279)$$

Εφαρμογή 5.5: Στην ισορροπούσα δοκό Gerber του σχήματος 10.56 ζητείται ο προσδιορισμός της αντίδρασης V_B. Το ίδιο βάρος της δοκού παραλείπεται.





Σχήμα 10.56: Δοκός Gerber σε ισορροπία.

Λύση: Αντικαθιστούμε την στήριξη B της δοκού (Gerber) με την ζητούμενη αντίδραση V_B. Γιά μιά δυνατή μετακίνηση δv_B του συστήματος, η δοκός παίρνει την μορφή του σχήματος 10.56b. Συνεπώς, γράφουμε την εξίσωση

$$V_B \delta v_B + P\delta_P = 0 \, . \tag{10.280}$$

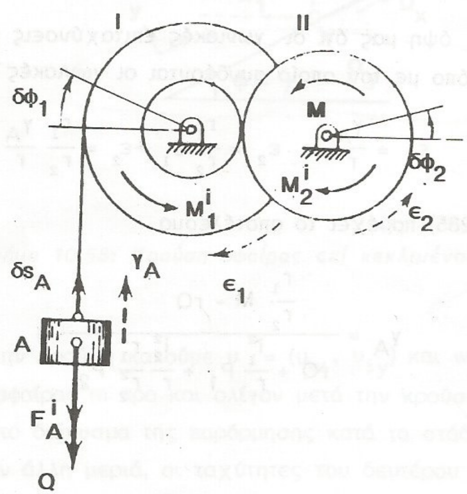
Από τα όμοια τρίγωνα του σχήματος 10.56b υπολογίζουμε

$$\frac{\delta v_B}{\delta_\Gamma} = \frac{\alpha}{\ell_1} \, , \quad \frac{\delta_\Gamma}{\delta_E} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \frac{\delta_E}{\delta_P} = \frac{\ell_3}{\delta} \quad \text{και} \quad \delta v_B = \frac{\alpha\beta\ell_3\delta_P}{\ell_1\gamma\delta} \, . \tag{10.281}$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις αυτές στην (10.280) παίρνουμε

$$V_B = -\frac{P\ell_1\gamma\delta}{\alpha\beta\ell_3} \, . \tag{10.282}$$

Εφαρμογή 5.6: Στον ανυψωτικό μηχανισμό του σχήματος 10.57 εφαρμόζουμε ροπή **M** στον τροχό II βάρους P_2 και ακτίνος αδρανείας i_2. Ζητείται ο προσδιορισμός της επιτάχυνσης του ανηρτημένου σώματος A βάρους Q, όταν αμελούνται το βάρος του σχοινιού και οι τριβές των αξόνων των τροχών. Το τύμπανο επί του οποίου κρέμεται το σχοινί και ο στερεά συνδεδεμένος με αυτό τροχός I έχουν συνολικό βάρος P_1 και ακτίνα αδρανείας i_1. Οι ακτίνες των τροχών είναι r_1 και r_2 αντίστοιχα, ενώ του τυμπάνου r.



Σχήμα 10.57: Σύστημα μηχανισμού ανυψωτήρος.

Λύση: Οι παράγουσες έργο δυνάμεις είναι το βάρος **Q** και η επιβεβλημένη ροπή **M**. Οι αναπτυσσόμενες αδρανειακές δυνάμεις είναι η δύναμη D´ Alembert F_A^i και τα ζεύγη M_1^i και M_2^i. Οι υποθετικές φορές των μεγεθών αυτών φαίνονται στο σχήμα 10.57, ενώ τα μέτρα των δίνονται από τις σχέσεις

$$F_A^i = \frac{Q}{g}\gamma_A\,, \quad |M_1^i| = \frac{P_1}{g}i_1^2\varepsilon_1\,, \quad |M_2^i| = \frac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2\,, \qquad (10.283)$$

όπου γ_A παριστάνει την επιτάχυνση του βάρους A ενώ ε_1 και ε_2 είναι οι γωνιακές επιταχύνσεις των τροχών I και II αντίστοιχα. Γιά μιά δυνατή μετακίνηση δs_A του συστήματος η εξίσωση (5.12) γράφεται με βάση το σχήμα 10.57, ως εξής:

$$-(Q + F_A^i)\delta s_A - M_1^i\delta\phi_1 + (M - M_2^i)\delta\phi_2 = 0\,. \qquad (10.284)$$

Εκφράζοντας όλες τις μετακινήσεις συναρτήσει της $\delta\phi_1$ παίρνουμε

$$\delta s_A = r\,\delta\phi_1\,, \quad \frac{\delta\phi_2}{\delta\phi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}\,, \quad \delta\phi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\phi_1\,.$$

Έτσι, η εξίσωση κίνησης (10.284) γράφεται

$$Q\left(1 + \frac{\gamma_A}{g}\right)r + \frac{P_1}{g}i_1^2\varepsilon_1 + \frac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0\,. \qquad (10.285)$$

Λαμβάνοντας υπ´ όψη μας ότι οι γωνιακές επιταχύνσεις ε_1 και ε_2 συνδέονται κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι γωνιακές ταχύτητες, γράφουμε

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_A}{r}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\frac{\gamma_A}{r}\,. \qquad (10.286)$$

Συνεπώς, η (10.285) παρέχει το αποτέλεσμα

$$\gamma_A = \frac{\dfrac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \dfrac{i_1^2}{r}P_1 + \dfrac{i_2^2}{r}\dfrac{r_1^2}{r_2^2}P_2}\,g\,. \qquad (10.287)$$