

24/03/2021

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ  
(ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ)
2. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
3. ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
4. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
5. ΣΥΣΤΡΟΦΗ
6. ΕΡΓΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ
7. ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ
8. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
9. ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ – ΝΕΥΤΩΝΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
10. ΑΡΧΗ D' ALEMBERT

Από την εξίσωση (3.47) προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια αναλύεται στην **περίκεντρο ενέργεια**, ίση προς  $[\sum m_i (dr_i'/dt)^2] / 2$ , και την **ενέργεια μεταφοράς**, ίση προς  $[(\sum m_i) u_r^2] / 2$ . η τελευταία αυτή ενέργεια είναι εκείνη που θα είχε το σύστημα αν όλη η μάζα του ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας και παρακολουθούσε την κίνηση αυτού. Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί το θεώρημα Koenig.

Η συστροφή συστήματος υλικών σημείων προς σταθερό κέντρο O είναι το γεωμετρικό άθροισμα των προς το O συστροφών των υλικών σημείων του συστήματος. Επομένως ισχύει

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \frac{d\mathbf{G}}{dt}. \quad (3.48)$$

Λαμβανομένου υπ' όψη με βάση την παραπάνω ανάλυση ότι

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i' = \mathbf{0}, \quad \sum_i m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{0},$$

η πρώτη των εξισώσεων (3.48) παρέχει

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times (\sum_i m_i) \mathbf{v}_r + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i', \quad (3.49)$$

που σημαίνει ότι η συστροφή αναλύεται και αυτή στην **περίκεντρο συστροφή**, ίση προς  $\sum \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'$ , και την **συστροφή μεταφοράς**, ίση προς  $\mathbf{r} \times (\sum m_i) \mathbf{v}_r$ . η τελευταία είναι εκείνη που θα είχε το σύστημα προς σταθερό κέντρο O, εφόσον η μάζα του ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας K και παρακολουθούσε την κίνηση αυτή. Αν το κέντρο μάζας K παραμένει ακίνητο, τότε προκύπτει

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (3.50)$$

ως προς οιοδήποτε σημείο O του χώρου.

#### 3.4.4 Έκφραση της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της συστροφής και της γωνιακής ταχύτητας

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των υλικών σημείων δίνεται, ως γνωστόν, από τον τύπο

$$\boxed{\Theta 4} \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.51)$$

*Handwritten notes:  $\omega \times \mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$*

Κατά την περιστροφή του συστήματος περί στιγμιαίου άξονα διερχόμενο από σταθερό κέντρο O είναι:

$$v_i = \omega \times r_i,$$

όπου  $r_i$  παριστάνει την διανυσματική ακτίνα από το O προς το τυχόν σημείο i του συστήματος. Συνεπώς, η κινητική ενέργεια του τύπου (3.51) στην προκειμένη περίπτωση γράφεται

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times r_i) \cdot v_i = \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i m_i r_i \times v_i = \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i r_i \times m_i v_i = \frac{1}{2} \omega \cdot G \Rightarrow K = \frac{1}{2} \omega \cdot G$$

$G = r \times m \vec{v}$

δηλαδή ευρίσκουμε

$$2K = \omega \cdot G, \tag{3.51a}$$

όπου G εκφράζει την συστρόφη του συστήματος περί το O.

**3.4.5 Έκφραση της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας**

Από την ισότητα

$$v_i = \omega \times r_i$$

αναφορικά προς το κέντρο O, συνάγεται

$$v_i^2 = (\omega \times r_i)^2 = (\omega \rho_i)^2,$$

όπου  $\rho_i$  παριστάνει την απόσταση του αντίστοιχου υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής διά του σημείου O (Σχ. 2.2). Επομένως

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \rho_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2 \tag{3.52}$$

όπου έχουμε θέση

$$K = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2$$

$$J_\omega = \sum_i m_i \rho_i^2$$

$$G = r \times m \vec{v} = r m \omega r = m \omega r^2 = J \omega$$

και, όπως θα δούμε στην δυναμική του στερεού, η ποσότητα  $J_{\omega}$  ορίζεται ως ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο  $O$ .

Στον τύπο (3.47) μπορούμε να θέσουμε

$$\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i,$$

οπότε ευρίσκουμε

$$L = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) v_r^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) v_r^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i'^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) v_r^2 + \frac{1}{2} J_K \omega^2, \quad (3.53)$$

όπου  $\rho'_i$  παριστάνει την απόσταση του αντίστοιχου υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής διά του κέντρου μάζας  $K$ , και

$$J_K = \sum_i m_i \rho_i'^2$$

ορίζεται ως ροπή αδράνειας του σώματος προς τον άξονα περιστροφής του διερχόμενου από το κέντρο μάζας  $K$ . Είναι λοιπόν σαφές ότι η περίκεντρος κινητική ενέργεια στην προκειμένη περίπτωση εκφράζεται από την ποσότητα  $J_K \omega^2 / 2$ .

### 3.4.6 Έκφρασης του στοιχειώδους έργου συναρτήσει της στατικής ροπής και της γωνιακής ταχύτητας

Έχουμε ήδη ονομάσει στοιχειώδες έργο της ενεργούσης επί υλικού σημείου δύναμης  $\mathbf{P}$  κατά την διεύθυνση  $d\mathbf{r}$  το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$ . Αν το υλικό σημείο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$  περί άξονα διερχόμενο διά σταθερού σημείου  $O$ , τότε το έργο που επιτελείται από την δύναμη σε κάθε χρονική στιγμή και δίνεται από τον τύπο (3.32), παίρνει την ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.54)$$

όπου  $\mathbf{M}$  δηλώνει την στατική ροπή  $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$  της δύναμης  $\mathbf{P}$  προς το σταθερό σημείο  $O$ . Επειδή το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$  γράφεται

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = M_{\omega} \omega,$$

όπου  $M_\omega$  παριστάνει την στατική ροπή της δύναμης  $P$  προς τον άξονα περιστροφής διά του σημείου  $O$ , έχουμε

$$\frac{dA}{dt} = M_\omega \omega. \quad (3.55)$$

Ο τύπος (3.55), ο οποίος ουσιαστικά εκφράζει την **παροχή έργου** ή **ισχύ κατά την περιστροφική κίνηση** είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό αυτής ακριβώς της ισχύος, την οποία μεταβιβάζει ο κινητήριος άξονας μηχανής. Από τον αριθμό  $n$  των στροφών του άξονα ανά πρώτο λεπτό καθορίζεται η γωνιακή ταχύτητα σύμφωνα με την σχέση

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30.$$

Επομένως, αν δίνεται η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων προς τον άξονα περιστροφής, προσδιορίζεται βάσει του τύπου (3.55) η ισχύς του άξονα, και αντίστροφως\* αν είναι γνωστή η ισχύς ( $dA/dt$ ) του άξονα περιστροφής και δεδομένος ο αριθμός  $n$  των στροφών ανά λεπτό, υπολογίζεται η στατική ροπή  $M_\omega$  των εξωτερικών δυνάμεων προς τον άξονα περιστροφής.

#### 3.4.7 Στατική ροπή και γωνιακή επιτάχυνση

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (3.32) και (3.54) έχουμε

$$\frac{dA}{dt} = P \cdot \frac{dr}{dt} = P \cdot v = \frac{dL}{dt}, \quad \frac{dA}{dt} = P \cdot (\omega \times r) = M \cdot \omega = M_\omega \omega = \frac{dL}{dt}. \quad (3.56)$$

Αν η κίνηση συνεχίζεται περί άξονα σταθερό διά του κέντρου  $O$ , τότε η ποσότητα  $\sum m_i r_i^2 = J_\omega$  του τύπου (3.52) είναι σταθερή, και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (J_\omega \omega^2) = J_\omega \omega \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.57)$$

Από τον συνδυασμό της τελευταίας εξίσωσης με την δεύτερη των (3.56) καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$M_\omega = J_\omega \frac{d\omega}{dt} = J_\omega \dot{\omega} = J_\omega \varepsilon, \quad (3.58)$$

όπου  $\varepsilon$  δηλώνει το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης.

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι η προς σταθερό άξονα περιστροφής ροπή  $M_\omega$  ισούται προς το γινόμενο της ροπής αδράνειας του υλικού σημείου προς τον άξονα αυτόν επί την γωνιακή επιτάχυνση.

### 3.4.8 Συστροφή περί άξονα περιστροφής

Έχουμε ήδη ορίσει ότι η συστροφή  $G$  συστήματος υλικών σημείων  $m_i$  προς σταθερό κέντρο δίνεται από τον τύπο

$$G = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i .$$

Παράλληλα για την μεταβολή της συστροφής  $G$  συναρτήσει του χρόνου αποδείξαμε ότι αυτή ισούται προς την ροπή όλων των εξωτερικών δυνάμεων προς το κέντρο  $O$ , δηλαδή

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \mathbf{M} .$$

Αν η κίνηση του συστήματος είναι περιστροφή περί σταθερόν άξονα διερχόμενον διά του  $O$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , τότε ορίζεται η προβολή  $G_\omega$  της συστροφής  $G$  κατά τον άξονα αυτόν από την εξίσωση

$$G_\omega = G \cdot \omega_0 = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \cdot \omega_0 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\omega_0 \times \mathbf{r}_i) ,$$

όπου  $\omega_0$  παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$ . Με βάση το σχήμα 2.2 το εξωτερικό γινόμενο  $\omega_0 \times \mathbf{r}_i$  είναι διάνυσμα ομόρροπο προς το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{v}_i$  και έχει αλγεβρική τιμή ίση προς  $\rho_i$ , δηλαδή ίση προς την κάθετη απόσταση του υλικού σημείου  $m_i$  από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς, γράφουμε

$$G_\omega = G \cdot \omega_0 = \sum_i m_i v_i \rho_i$$

και επειδή

$$v_i = \omega \rho_i$$

η προβολή  $G_\omega$  της συστροφής γράφεται

$$G_{\omega} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J_{\omega} \quad (3.59)$$

Από την άλλη μεριά, η μεταβολή  $dG_{\omega}/dt$  προκύπτει

$$\frac{dG_{\omega}}{dt} = J_{\omega} \frac{d\omega}{dt} = J_{\omega} \varepsilon, \quad (3.60)$$

όπου  $\varepsilon$  παριστάνει το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τον άξονα περιστροφής και  $J_{\omega} = \sum m_i \rho_i^2$  την ροπή αδράνειας του συστήματος των υλικών σημείων ως προς τον άξονα αυτόν.

Τέλος, από τον συνδυασμό των τύπων (3.58) και (3.60) συνάγουμε ότι

$$M_{\omega} = \frac{dG_{\omega}}{dt}, \quad (3.61)$$

που δηλώνει ότι η μεταβολή της προβολής του διανύσματος της συστροφής επί του άξονα περιστροφής ισούται προς την προβολή του διανύσματος της ροπής προς το κέντρο O επί του ίδιου άξονα.

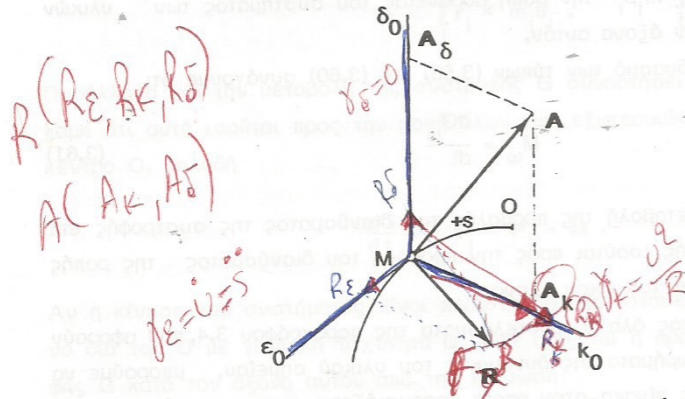
Ανακεφαλαιώνοντας όλα τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.4, που αφορούν τα βασικά γενικά θεωρήματα της δυναμικής του υλικού σημείου, μπορούμε να μορφώσουμε τον εξής πίνακα στον οποίο παρουσιάζεται η αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών που αναφέρονται στην κίνηση του υλικού σημείου (ή συστήματος υλικών σημείων) και στην περιστροφή περί άξονα:

Κίνηση υλικού σημείου (ή παράλληλη μεταφορά)	Περιστροφή περί άξονα διερχόμενο από σταθερό κέντρο O
$\mathbf{v}$	$\omega$
$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$	$\frac{d\omega}{dt}$
$\mathbf{P}$	$M_{\omega}$
$m$	$m\rho^2 = J_{\omega}$ (ή $\sum_i m_i \rho_i^2 = J_{\omega}$ )
$\frac{dA}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$	$\frac{dA}{dt} = M_{\omega} \omega$
$L = \frac{1}{2} (\sum_i m_i) v_r^2$	$L = \frac{1}{2} J_{\omega} \omega^2$
$m\mathbf{v}$	$G_{\omega} = J_{\omega} \omega$
$L = \frac{1}{2} (m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$	$L = \frac{1}{2} G_{\omega} \omega$
$\mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	$M_{\omega} = J_{\omega} \frac{d\omega}{dt}$ (ως προς σταθερό άξονα περιστροφής)



## 3.5 Εξηναγκασμένη Κίνηση Υλικού Σημείου. - Καθορισμός Αντιδράσεων

Θεωρήσουμε υλικό σημείο  $M$  κινούμενο επί ορισμένης καμπύλης γραμμής κάτω από την ενέργεια συστήματος εφαρμοσμένων δυνάμεων  $F_1, F_2, \dots, F_n$  που έχουν συνισταμένη  $R$ . υποθέτουμε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα χωρίς τριβή. Αν  $O$  είναι η αρχή μέτρησης των τόξων η κίνηση του σημείου  $M$  καθορίζεται με την συντεταγμένη  $OM = s$ . Έστω ακόμη  $M_0, k_0, \delta_0$  το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (τρίεδρο Frénet) στο σημείο  $M$  (Σχ. 3.6).



Σχήμα 3.6: Εξηναγκασμένη κίνηση υλικού σημείου επί καμπύλης γραμμής.

Η αναπτυσσόμενη αντίδραση  $A$ , επειδή δεν υπάρχει τριβή, θα κείται στο κάθετο επίπεδο  $Mk_0\delta_0$ , δηλαδή θα ισχύει

$$A = A_k + A_\delta. \quad (3.62)$$

Σύμφωνα τώρα με την θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής έχουμε

$$m\gamma = R + A = R + A_k + A_\delta. \quad (3.63)$$

Αναλύοντας την τελευταία διανυσματική εξίσωση στις αντίστοιχες αναλυτικές εξισώσεις κατά τους άξονες του τοπικού συστήματος, παίρνουμε

$$m\gamma_\epsilon = \sum_i P_{i,\epsilon} = R_\epsilon$$

$$m\gamma_k = \sum_i P_{i,k} + A_k = R_k + A_k$$

$$m\gamma_\delta = \sum_i P_{i,\delta} + A_\delta = R_\delta + A_\delta, \quad (3.64)$$

όπου

$$\gamma_\epsilon = \dot{u} = \ddot{s}, \quad \gamma_k = \frac{v^2}{R}, \quad \gamma_\delta = 0. \quad (3.65)$$

Η τελευταία των (3.65) είναι προφανής δεδομένου ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης  $\gamma$  κείται στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης γραμμής  $\epsilon_0 M k_0$ . Οι σχέσεις (3.64) μετασχηματίζονται στις εξής εξισώσεις, που χαρακτηρίζουν την κίνηση του υλικού σημείου κατά μήκος μιάς δεδομένης καμπύλης:

$$m \frac{du}{dt} = R_\epsilon \Leftrightarrow m \frac{d^2s}{dt^2} = R_\epsilon, \quad (3.66)$$

$$\frac{mv^2}{R} = R_k + A_k, \quad (3.67)$$

$$R_\delta + A_\delta = 0. \quad (3.68)$$

Η εξίσωση (3.66) δεν περιέχει συνιστώσες της αντίδρασης  $A$  και επομένως ενδείκνυται για τον καθορισμό της εξίσωσης κίνησης ενός υλικού σημείου κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή τον καθορισμό της συνάρτησης  $s = f(t)$ .

Με τις δύο επομένως εξισώσεις (3.67) και (3.68) καθορίζουμε την αντίδραση  $A$  υπολογίζοντας τις συνιστώσες  $A_k$  και  $A_\delta$  κατά την πρώτη κάθετο και την δικάθετο της καμπύλης της κίνησης.

Στην περίπτωση κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας  $v$ , που εισέρχεται στην σχέση (3.67), δεν είναι γνωστό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της κινητικής ενέργειας. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, λόγω μη ύπαρξης τριβής, το έργο της αντίδρασης  $A$  ισούται προς μηδέν, εφ' όσον το διάνυσμα  $A$  κείται στο κάθετο προς την καμπύλη επίπεδο  $k_0 M \delta_0$  (Σχ. 3.6). Επομένως γράφουμε

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_i \int_0^s \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} \quad (3.69)$$

από την οποία προσδιορίζεται το μέτρο  $v$ . Στην συνέχεια βάσει των (3.67) και (3.62) υπολογίζουμε την αντίδραση  $A = (A_k, A_\delta)$ .

### 3.6 Πεδία - Συντηρητικά Συστήματα - Δυναμικό - Διατήρηση Ενέργειας - Νευτώνειο Δυναμικό Πεδίο

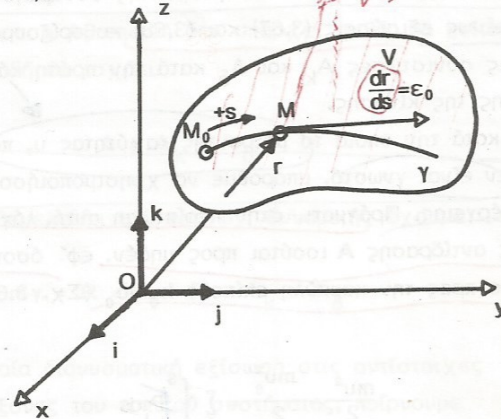
Μιά περιοχή του χώρου σε κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί με ένα νόμο μιά ορισμένη τιμή ενός βαθμωτού ή διανυσματικού ή τανυστικού μεγέθους καλείται **βαθμωτό** ή **διανυσματικό** ή **τανυστικό πεδίο**.

Ας είναι  $V$  μιά περιοχή του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου και σημείο  $M$  της περιοχής αυτής. Έστω επίσης  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  το διάνυσμα θέσης του σημείου  $M$  ως προς απόλυτο (σταθερό) σύστημα τρισσορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων με τα γνωστά μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο τυχόν σημείο  $M$  της περιοχής  $V$  αντιστοιχεί η τιμή του βαθμωτού μεγέθους  $f$ . Γράφουμε

$$f = f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$$

και λέμε ότι οι τιμές της βαθμωτής συνάρτησης  $f$  που συσχετίζονται με όλα τα σημεία της  $V$  αποτελούν **βαθμωτό πεδίο**.

Έστω λεία καμπύλη  $\gamma$  της  $V$  διερχόμενη από το  $M$ . Αν  $s$  παριστάνει το μήκος τόξου της καμπύλης μετρούμενο από το σημείο  $M_0$ , η παράγωγος  $d\mathbf{r}/ds$  είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\mathbf{e}_0$  της  $\gamma$  κατά την αύξουσα διεύθυνση πάνω στο  $s$  (Σχ. 3.7).



Σχήμα 3.7: Γεωμετρία και σήμανση περιοχής  $V$  του τρισδιάστατου Ευκλείδειου μετρικού χώρου.

Ας είναι τώρα  $f(x, y, z)$  μιά βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη σε όλη την περιοχή  $V$ ,

η οποία είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη προς  $s$ . Η  $f$  είναι επίσης ορισμένη σε κάθε σημείο της καμπύλης  $\gamma$  και η παράγωγος της ως προς το μήκος τόξου δίνεται από την σχέση

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (3.70)$$

Αν θεωρήσουμε όλες τις καμπύλες της περιοχής  $V$  που διέρχονται από το σημείο  $M$  και έχουν κοινή εφαπτόμενη στο  $M$ , τότε οι τιμές των ολικών παραγώγων στο δεξί μέλος της (3.70) είναι ίδιες. Συνεπώς, σε κάθε σημείο  $M$  υπάρχει μονοσήμαντη τιμή  $df/ds$  συσχετισμένη με κάθε διεύθυνση, που καλείται κατευθυνόμενη παράγωγος.

Καλούμε τελεστή ανάδελα το διάνυσμα

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Εφαρμόζοντας αυτόν επί του βαθμωτού πεδίου  $f$  παίρνουμε

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.71)$$

Το διάνυσμα  $\nabla f$  καλείται κλίση της βαθμωτής συνάρτησης  $f$  και γράφεται grad  $f$ .

Έτσι, η εξίσωση (3.70) δίνεται και υπό την μορφή

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \frac{dr}{ds}, \quad \Rightarrow \quad dr \cdot \nabla f = df \quad (3.72)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \epsilon_0 \quad (3.73)$$

όπου εδώ  $\epsilon_0$  συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση κατά την οποία έχει ληφθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την πρόταση ότι: Η συνιστώσα του διανύσματος  $\nabla f$  κατά την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $\epsilon_0$  είναι ίση με την κατευθυνόμενη παράγωγο της  $f$  κατά την διεύθυνση αυτή.

Πράγματι, η συνιστώσα του διανύσματος  $\nabla f$  κατά την διεύθυνση  $\epsilon_0$  δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\nabla f \cdot \epsilon_0 = |\nabla f| |\epsilon_0| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta,$$

όπου  $\theta$  παριστάνει την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\nabla f$  και  $\epsilon_0$ . Ο συνδυασμός της τελευταίας αυτής εξίσωσης με την (3.73) καταλήγει

$$\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cos \theta. \quad (3.74)$$

Ένα άμεσο πόρισμα της παραπάνω πρότασης είναι ότι: **Το διάνυσμα  $\nabla f$  είναι κάθετο προς τις επιφάνειες  $f(x,y,z) = c = \text{σταθερά}$ .**

Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από τις εξισώσεις (3.72) και (3.74) παρατηρώντας ότι  $\nabla f \cdot \epsilon_0 = 0$  όταν  $\cos \theta = 0$ , δηλαδή όταν  $\theta = \pi/2$ . Σημειώνουμε εδώ ότι οι επιφάνειες  $f(x,y,z) = c$ , όταν  $c$  είναι σταθερά παράμετρος, καλούνται **ισοσταθμικές επιφάνειες**. Επομένως, ήδη έχουμε αποδείξει ότι η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης  $f$  για δεδομένη κατεύθυνση  $\epsilon_0$  γίνεται μέγιστη, όταν η απειροστή μετάθεση  $dr$  κατά την κατεύθυνση  $\epsilon_0$  είναι κάθετη προς την ισοσταθμική επιφάνεια. Επομένως, οι συνθήκες

$$dr \cdot \nabla f = df = 0,$$

$$dr \times \nabla f = 0, \quad (3.75)$$

καθορίζουν αντίστοιχα στοιχεία  $dr$  διά σημείου  $M$  της περιοχής  $V$  κάθετα προς την κλίση, δηλαδή κείμενα επί της ισοσταθμικής επιφάνειας, και στοιχεία  $dr$  διά σημείου  $M$  της περιοχής  $V$  συγγραμμικά προς την κλίση που σχηματίζουν καμπύλες εφαπτόμενες της κλίσης σε κάθε θέση και που καλούνται **δυναμικές γραμμές ή γραμμές δυναμικού πεδίου**.

Υποθέτουμε τώρα ότι σε κάθε θέση  $M$  περιοχής χώρου ενεργεί επί υλικού σημείου που ευρίσκεται στην θέση αυτή μία δύναμη  $\mathbf{F}$ , που μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση βαθμωτής συνάρτησης  $-V(x,y,z)$ . Συνεπώς γράφουμε

$$\mathbf{F} = \text{grad}(-V) = \nabla(-V). \quad (3.76)$$

Κατά την μετακίνηση της δύναμης από το σημείο  $M_1$  στο  $M_2$  το ολοκλήρωμα

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathbf{r} \cdot \nabla V = - \int_{M_1}^{M_2} d\mathbf{r} \cdot \text{grad} V = - \int_{M_1}^{M_2} dV = V_1 - V_2, \quad (3.77)$$

$d\mathbf{r} \cdot \nabla V = dV$

παριστάνει το έργο της  $\mathbf{F}$  και τούτο άσχετα προς την μορφή της τροχιάς  $M_1 M_2$ ,

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_{M_1}^{M_2} d\mathbf{r} \cdot \nabla(-V) = - \int_{M_1}^{M_2} dV = V_1 - V_2$$

δηλαδή είναι ίσο προς την διαφορά τιμών της βαθμωτής συνάρτησης  $(-V)$  στα άκρα της τροχιάς  $M_1 M_2$ . Παρατηρούμε ακόμη, ότι για κλειστή διαδρομή  $M_1 M_2$  ( $M_1 \equiv M_2$ ) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (3.77) γίνεται ίσο προς μηδέν, δηλαδή το έργο είναι μηδενικό. Το πεδίο αυτό για το οποίο το έργο σε μιά κλειστή διαδρομή είναι μηδενικό καλείται **συντηρητικό** και η δύναμη **συντηρητική**. Είναι τώρα προφανές ότι μιά δύναμη τριβής ή γενικά μιά δύναμη αντίστασης δεν είναι δύναμη συντηρητική γιατί το παραγόμενο έργο είναι πάντοτε θετικό. Πολλά πεδία που συναντάμε στην μηχανική είναι συντηρητικά, δηλαδή δίνουν έργο κατά την μετακίνηση από ένα σημείο  $M_1$  στο άλλο  $M_2$  που εξαρτάται από την αρχή και το τέλος και όχι από την διαδρομή, και επομένως σε κάθε μετακίνηση κατά μήκος κλειστής γραμμής το έργο αυτό είναι μηδενικό. Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι, σε ένα συντηρητικό πεδίο το έργο της επιστροφής από του τελικού σημείου  $M_2$  στο αρχικό  $M_1$ , και αν ακόμη γίνεται με διαφορετική διαδρομή, είναι αντίθετο προς το έργο που επιτελείται κατά την αρχική μετάθεση. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο προς μιά αποθήκευση του έργου αυτού υπό μορφή ενέργειας που εξαρτάται μόνο από τη θέση. Η συνάρτηση  $V$  δηλώνει την ενέργεια αυτή θέσης που αποθηκεύεται και ονομάζεται **δυναμική ενέργεια** ή **δυναμικό** του υλικού σημείου.

Κατά το θεώρημα της κινητικής ενέργειας ισχύει

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1,$$

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1$$

" "

$$V_1 - V_2$$

και επομένως βάσει της σχέσης (3.77) προκύπτει

$$V_1 - V_2 = K_2 - K_1 \rightarrow K_1 + V_1 = K_2 + V_2. \quad (3.78)$$

Επομένως συνεπάγεται ότι σε κάθε θέση του συντηρητικού πεδίου το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου και της δυναμικής ενέργειας αυτού, που αποτελεί και την όλη μηχανική ενέργειά του, παραμένει σταθερό. Η συνιστώσα της δύναμης  $\mathbf{P}$  κατά την διεύθυνση  $\mathbf{e}_0$  δίνεται βάσει των (3.72), (3.73) από την εξίσωση

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{P} = - \frac{dV}{ds} = - \mathbf{e}_0 \cdot \text{grad } V, \quad (3.79)$$

δηλαδή είναι ίση με την πτώση της δυναμικής ενέργειας κατά την διεύθυνση αυτή. Η δύναμη διευθύνεται κάθετα προς την ισοσταθμική επιφάνεια  $-V = \text{σταθ.}$ ,



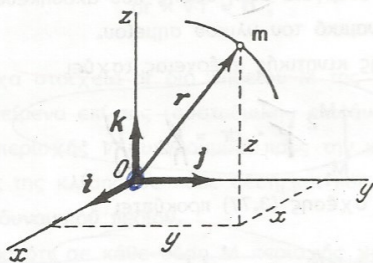
που περνάει από το σημείο και γίνεται μεγαλύτερη εκεί όπου πυκνώνονται οι ισοσταθμικές επιφάνειες.

Ο Newton διατύπωσε την εξής αρχή: **Δύο οιαδήποτε υλικά σημεία έλκονται αμοιβαία ανάλογα των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασής τους.** Η αρχή αυτή ονομάζεται και **νόμος της παγκόσμιας έλξης**, γιατί υποτίθεται ότι αληθεύει για όλα τα σημεία του διαστήματος. Ιδιαίτερη σημασία έχει το πεδίο βαρύτητας. Έστω τώρα μιά ελκτική μάζα  $m$  σε ελκτικό κέντρο  $O$ . Αν λάβουμε το  $O$  ως αρχή ορθογώνιου συστήματος αναφοράς, η ασκούμενη ελκτική δύναμη πάνω σε μοναδιαία μάζα στο σημείο  $A$ , με βάση την παραπάνω αρχή και το σχήμα 3.8, ισούται προς

$$F = -\frac{fm}{r^2} \quad P = -\frac{fm}{r^2} \vec{r} = -\frac{fm}{r^3} \vec{r}, \quad (3.80)$$

*G = σταθερά βαρύτητας (γ)*

όπου  $r = r_0$  είναι η διανυσματική ακτίνα και  $f$  η σταθερά της παγκόσμιας έλξης ίση προς  $6.685 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ gr}^{-2}$ .



*Το - πρόσημο (-) για να δείξει ότι η δύναμη κατευθύνεται αντίθετα προς το  $\vec{r}$ , δηλαδή ελκτική.*

Σχήμα 3.8: Παράσταση ελκτικού κέντρου  $O$  μάζης  $m$ .

Είναι όμως

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \nabla \cdot \vec{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (x, y, z)^T = 3,$$

$$\nabla r = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right)^T = -\frac{1}{r^2} \vec{r} = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$$

$$F = -\frac{fm}{r^2} = fm \left( -\frac{1}{r^2} \right) = fm \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( \frac{fm}{r} \right)$$

*Handwritten notes and calculations:*  
 -  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1+1=3$   
 -  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$   
 -  $F = -\frac{fm}{r^2} = \nabla \left( \frac{fm}{r} \right)$   
 -  $\nabla \cdot \vec{r} = 3$   
 -  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{r}$   
 -  $F = -\frac{fm}{r^2} = fm \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$   
 -  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$   
 -  $F = -\frac{fm}{r^2} = \nabla \left( \frac{fm}{r} \right)$

$$\textcircled{3} \Delta V = \nabla_0 \cdot \nabla V = \nabla_0 \cdot \nabla \left( -\frac{f_m}{r} \right) = -f_m \nabla_0 \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -f_m \nabla \left( -\frac{1}{r^3} \right) = +f_m \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) = f_m \left[ \frac{3}{r^4} \nabla r + r \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

$$= -f_m \nabla \left( -\frac{1}{r^3} \right) = +f_m \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) = f_m \left[ \frac{3}{r^4} \nabla r + r \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \mathbf{r}, \dots, \nabla \left( \frac{1}{r^n} \right) = \frac{n}{r^{n+2}} \mathbf{r}.$$

Έτσι, η εξίσωση (3.80) παίρνει την μορφή

$$\mathbf{P} = f_m \left( -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) = f_m \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad (3.81)$$

δηλαδή με βάση τα προηγούμενα η P μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση μίας βαθμωτής συνάρτησης -V αν θέσουμε

$$\nabla V = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{f_m}{r} \right) \quad (3.82)$$

$$\mathbf{F} = \nabla(-V) = -\nabla V$$

$$V = -\frac{f_m}{r}$$

Η V λέγεται **Νευτώνειο δυναμικό**. Αν τώρα εισάγουμε τον τελεστή Laplace

ευρίσκουμε

$$\Delta V = -f_m \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -f_m \nabla \cdot \left( -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = f_m \left[ \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right] = f_m \left( \frac{3}{r^3} - \mathbf{r} \cdot \frac{3\mathbf{r}}{r^5} \right) = f_m \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0, \quad (3.83)$$

δηλαδή ότι το **Νευτώνειο δυναμικό** πληροί την εξίσωση Laplace σε όλες τις θέσεις εκτός από αυτή του έλκοντος σημείου.

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τις προτάσεις:

- α) Το Νευτώνειο δυναμικό πεδίο που οφείλεται σε ελκτικό κέντρο απορρέει από δυναμική συνάρτηση,
  - β) Η απόκλιση της δύναμης σε ολόκληρη την περιοχή του Νευτώνειου δυναμικού πεδίου, που οφείλεται σε ελκτικό κέντρο, είναι ίση προς το μηδέν σε κάθε σημείο πλην του ελκτικού κέντρου.
- Πράγματι, η απόκλιση της P είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = f_m \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = f_m \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0,$$

και

- γ) Το δυναμικό του Νευτώνειου δυναμικού πεδίου, που οφείλεται σε ελκτικό

$$-V = \frac{f_m}{r}$$

$$\mathbf{F} = \nabla(-V)$$



κέντρο, επαληθεύει σε όλα τα σημεία του πεδίου (εκτός από το ελκτικό κέντρο) την εξίσωση Laplace.

Στην περίπτωση που αντί σημείου υπάρχει έλκον σώμα με μεταβαλλόμενη την πυκνότητά του από θέση σε θέση ( $\delta = dm/dw$ ), όπου  $dm$  παριστάνει την στοιχειώδη μάζα του απειροστού στοιχείου  $dw$ , το Νευτώνειο δυναμικό προκύπτει

$$V = - \int \frac{\delta dw}{r} .$$

Το σημείο A με μάζα ίση προς την μονάδα ή θα κείται εκτός του έλκοντος σώματος, οπότε παντού με  $r \neq 0$ , θα είναι

$$\Delta \left( \int \frac{\delta dw}{r} \right) = \int \delta \Delta \left( \frac{1}{r} \right) dw = 0 \quad (\text{και } \Delta V = 0) ,$$

ή θα ανήκει στο σώμα, οπότε προκύπτει

$$\Delta V = - 4\pi\delta ,$$

που αληθεύει σε όλη την περιοχή του σώματος περιλαμβάνουσα το A.

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την εξίσωση Poisson. Στην εξίσωση αυτή περιλαμβάνουμε και σημεία που δεν ανήκουν στο σώμα αρκεί να τεθεί  $\delta = 0$ , οπότε από την τελευταία σχέση προκύπτει και η εξίσωση Laplace. Μόνον κατά την επιφάνεια του σώματος όπου η πυκνότητα  $\delta$  μεταβάλλεται συνεχώς δεν ισχύει η σχέση

$$\Delta V = 0 ,$$

όπως επίσης και η εξίσωση

$$\Delta V = - 4\pi\delta .$$

### 3.7 Αρχή D'Alembert

#### 3.7.1 Οι εξισώσεις ισορροπίας του υλικού σημείου και του υλικού συστήματος

Οι μέχρι τώρα αναπτυχθείσες μέθοδοι επίλυσης των δυναμικών προβλημάτων έχουν βασισθεί σε εξισώσεις που προέκυψαν είτε κατ' ευθείαν από την

εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα είτε από γενικά θεωρήματα που προήλθαν από τους νόμους αυτούς. Εν τούτοις οι εξισώσεις ισορροπίας και οι εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος μπορούν να προκύψουν και από άλλες γενικές προτάσεις, οι οποίες ονομάζονται **Αρχές της Μηχανικής**, μέσω των οποίων προσφέρονται ταχύτερες μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων αυτών.

Μεταξύ των προαναφερθέντων βασικών αρχών της μηχανικής είναι η **αρχή D' Alembert**, η οποία αναπτύσσεται παρακάτω.

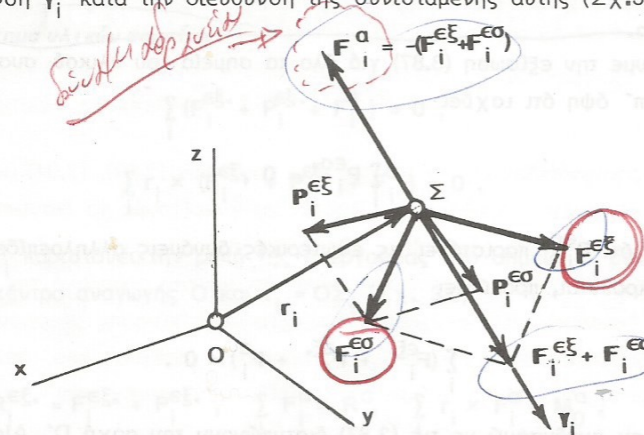
Μέχρι τώρα εξετάσθηκε η περίπτωση του ελεύθερου υλικού συστήματος. Ας υποθέσουμε ήδη ότι το υλικό σύστημα υπόκειται και σε ορισμένους εξωτερικούς συνδέσμους, οι οποίοι, με βάση τα εκτεθέντα στην στατική, αντικαθίστανται από δυνάμεις που καλούνται και αντιδράσεις συνδέσμων.

Εστω σύστημα  $n$  υλικών σημείων και ένα σημείο αυτού  $\Sigma_i$  με μάζα  $m_i$  επί του οποίου ενεργούν:

- Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων  $F_i^{ΕΞ}$ , και
  - Η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων  $F_i^{ΕΩ}$ .
- Η συνισταμένη  $F_i^{ΕΩ}$  είναι το γεωμετρικό άθροισμα της συνισταμένης  $P_i^{ΕΩ}$  των δυνάμεων των εσωτερικών συνδέσμων και της συνισταμένης  $P_i^{ΕΞ}$  των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων, δηλαδή

$$F_i^{ΕΩ} = P_i^{ΕΩ} + P_i^{ΕΞ}. \quad (3.84)$$

Το σημείο  $\Sigma_i$  δύνανται να θεωρηθεί ως ελεύθερο υπό την ενέργεια της συνισταμένης των παραπάνω δυνάμεων  $F_i^{ΕΞ} + F_i^{ΕΩ}$ , η οποία του προσδίδει μία επιτάχυνση  $\gamma_i$  κατά την διεύθυνση της συνισταμένης αυτής (Σχ.3.9).



Σχήμα 3.9: Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις ενεργούσες επί υλικού σημείου θεωρούμενου ως ελεύθερου.

Στο τρισσορθογώνιο σύστημα αναφοράς  $Oxyz$  του σχήματος 3.9 έστωσαν  $x_i, y_i, z_i$  οι συντεταγμένες του  $\Sigma_i$ . Σύμφωνα με την θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής ισχύει

$$F_i^{\epsilon\xi} + F_i^{\epsilon\sigma} = m_i \gamma_i \quad (3.85)$$

Την δύναμη

$$F_i^{\alpha} = -m_i \gamma_i = -(F_i^{\epsilon\xi} + F_i^{\epsilon\sigma}), \quad (3.86)$$

ση με το γινόμενο της μάζας του σημείου επί την επιτάχυνση  $\gamma_i$  και με διεύθυνση αντίθετη προς αυτήν της επιτάχυνσης, καλούμε **δύναμη αδρανείας** ή ποιά συγκεκριμένα **δύναμη αδρανείας  $D^{\circ}$  Alembert** του υλικού σημείου.

Οι εξισώσεις (3.85) και (3.86) καταλήγουν στην σχέση

$$F_i^{\epsilon\xi} + F_i^{\epsilon\sigma} + F_i^{\alpha} = 0, \quad (3.87)$$

ή οποία εκφράζει την ακόλουθη θεμελιώδη αρχή της δυναμικής ή **αρχή  $D^{\circ}$  Alembert**, για ένα υλικό σημείο:

**Κατά την κίνηση υλικού σημείου, κάθε χρονική στιγμή, υπάρχει ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, των εσωτερικών δυνάμεων, των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων και της δύναμης αδρανείας που επιδρούν πάνω στο σημείο.**

Αν γράψουμε την εξίσωση (3.87) για όλα τα σημεία του υλικού συστήματος και λάβουμε υπ όψη ότι ισχύει

$$\sum_i P_i^{\epsilon\sigma} = 0,$$

δεδομένου ότι  $P_i^{\epsilon\sigma}$  παριστάνει τις εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεπίδρασης που αλληλοαναιρούνται, προκύπτει

$$\sum_i (F_i^{\epsilon\xi} + P_i^{\epsilon\xi} + F_i^{\alpha}) = 0. \quad (3.88)$$

Οι (3.82) εν συνδυασμώ με τις (3.87) διατυπώνουν την αρχή  $D^{\circ}$  Alembert για το υλικό σύστημα, δηλαδή:

**Κατά την κίνηση του συστήματος υλικών σημείων, κάθε χρονική στιγμή υπάρχει**

*ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών δυνάμεων, των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων και των δυνάμεων αδρανείας, που επιδρούν πάνω στο σύστημα.*

Οι παραπάνω θεμελιώδεις προτάσεις της δυναμικής τόσο του υλικού σημείου όσο και του υλικού συστήματος οφείλονται στον Γάλλο μαθηματικό D' Alembert (1717-1783) και αποτελούν την γενική αρχή της μηχανικής. Η σημασία της αρχής αυτής έγκειται στην δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος της δυναμικής με την εφαρμογή των γνωστών εξισώσεων ισορροπίας της στατικής, πράγμα που απλουστεύει σε πολλές περιπτώσεις τους υπολογισμούς και επιταχύνει την λύση του προβλήματος.

Πράγματι, γνωρίζουμε από την στατική ότι:

i) Το γεωμετρικό άθροισμα ενεργουσών επί υλικού σημείου ισορροπουσών δυνάμεων ισούται προς μηδέν, και

ii) Το γεωμετρικό άθροισμα ενεργουσών επί σώματος ισορροπουσών δυνάμεων ισούται προς μηδέν και το γεωμετρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων προς ένα κέντρο αναγωγής O είναι μηδέν.

Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή D' Alembert, οι στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας ενός υλικού σημείου ή ενός στερεού σώματος υπό την ενέργεια δυνάμεων εκφράζονται με τις ακόλουθες διανυσματικές εξισώσεις αντίστοιχα:

### 1. Για υλικό σημείο:

$$F_i^{E\xi} + F_i^{E\sigma} + F_i^a = 0 \quad (3.89)$$

### 2. Για σύστημα υλικών σημείων:

$$\sum_i (F_i^{E\xi} + P_i^{E\xi} + F_i^a) = 0, \quad (3.90)$$

$$\sum_i r_i \times (F_i^{E\xi} + P_i^{E\xi} + F_i^a) = 0,$$

όπου  $r_i \times F_i$  παριστάνει την ροπή της ενεργούσας στο σημείο  $\sum_i$  δύναμης  $F_i$  ως προς το κέντρο αναγωγής O και  $r_i = O\Sigma_i$  (Σχ. 3.9).

Καλούμε

$$R_i^{E\xi} = F_i^{E\xi} + P_i^{E\xi}, \quad \sum_i F_i^a = R^a, \quad \sum_i r_i \times F_i^a = M_0^a, \quad (3.91)$$

οπότε οι εξισώσεις (3.90) γράφονται ισοδύναμα υπό την μορφή

$$\sum_i \mathbf{R}_i^{\epsilon\zeta} + \mathbf{R}^a = \mathbf{0}, \quad (3.92)$$

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\zeta} + \mathbf{M}_0^a = \mathbf{0}.$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{R}^a$  και  $\mathbf{M}_0^a$  καλούνται αντίστοιχα **συνισταμένη των δυνάμεων αδρανείας** και **συνισταμένη ροπή των δυνάμεων αδρανείας προς O**.

Δεδομένου ότι στις εξισώσεις (3.92) δεν περιέχονται οι εσωτερικές δυνάμεις, η εφαρμογή τους απλοποιεί σημαντικά την λύση του δυναμικού προβλήματος. Από την άλλη μεριά, οι εξισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες προς τις εξισώσεις οι οποίες εκφράζονται μέσω των θεωρημάτων της μεταβολής της ποσότητας κίνησης και της συνολικής συστροφής του συστήματος. Αν τώρα προβάλλουμε τις (3.90) και (3.92) στους άξονες  $x, y, z$  του συστήματος  $Oxyz$ , ευρίσκουμε τις εξής, γνωστές από την στατική, εξισώσεις ισορροπίας:

$$F_{ix}^{\epsilon\zeta} + F_{ix}^{\epsilon\sigma} + F_{ix}^a = 0, \quad F_{iy}^{\epsilon\zeta} + F_{iy}^{\epsilon\sigma} + F_{iy}^a = 0, \quad F_{iz}^{\epsilon\zeta} + F_{iz}^{\epsilon\sigma} + F_{iz}^a = 0 \quad (3.93)$$

και

$$\sum_i R_{ix}^{\epsilon\zeta} + R_x^a = 0, \quad \sum_i R_{iy}^{\epsilon\zeta} + R_y^a = 0, \quad \sum_i R_{iz}^{\epsilon\zeta} + R_z^a = 0,$$

$$[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\zeta})] \cdot \mathbf{i} + M_{0x}^a = 0, \quad [\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\zeta})] \cdot \mathbf{j} + M_{0y}^a = 0,$$

$$[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i^{\epsilon\zeta})] \cdot \mathbf{k} + M_{0z}^a = 0. \quad (3.94)$$

Γιά να χρησιμοποιήσουμε το σύνολο των σχέσεων (3.93), (3.94) με σκοπό την λύση συγκεκριμένων προβλημάτων πρέπει να γνωρίζουμε τα διανύσματα  $\mathbf{R}^a$  και  $\mathbf{M}_0^a$  των δυνάμεων αδρανείας. Όπως και προηγουμένως τονίσθηκε, η μεγάλη σημασία της αρχής D'Alembert είναι ότι με την εφαρμογή της σε προβλήματα της δυναμικής των συστημάτων οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν υπό την μορφή γνωστών εξισώσεων ισορροπίας, πράγμα που απλοποιεί τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι στις τελευταίες δεν περιέχονται οι εσωτερικές δυνάμεις. Επί πλέον η αρχή D'Alembert, σε συνδυασμό με την αρχή των δυνατών έργων που θα αναλυθεί στο κεφάλαιο της δυναμικής του στερεού σώματος, καταλήγει σε μία γενική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Ειδικότερα για τα

ιδανικά συστήματα, όπου όπως θα δούμε το δυνατό έργο των αντιδράσεων των εξωτερικών συνδέσμων είναι ίσο προς μηδέν, τα προβλήματα απλοποιούνται ακόμη περισσότερο εφ' όσον δεν απαιτείται ούτε η γνώση των αντιδράσεων, με αποτέλεσμα στις σχέσεις (3.91) και (3.92) να ισχύει

$$R_i^{E\Xi} = F_i^{E\Xi} \quad (3.95)$$

Σημειώνουμε τέλος ότι στην περίπτωση που κατά την δυνατή μετακίνηση αναπτύσσονται τριβές αυτές μπορούν να περιληφθούν στις  $F_i^{E\Xi}$ .

### 3.7.2 Καθορισμός των διανυσμάτων $R^a$ και $M_0^a$

Από τις (3.92) παρατηρούμε ότι το σύστημα των ενεργουσών σ' ένα στερεό σώμα δυνάμεων αδρανείας μπορεί να αναχθεί σε μοναδική δύναμη  $R^a$ , που εφαρμόζεται στο κέντρο αναγωγής  $O$ , και σε μοναδική ροπή  $M_0^a$  των δυνάμεων αυτών ως προς το  $O$ . Το διάνυσμα  $R^a$  δεν εξαρτάται από το κέντρο αναγωγής, που μπορεί να είναι οιοδήποτε, και συνεπώς λαμβάνεται να συμπίπτει με το κέντρο μάζας  $S$ . Επομένως, βάσει των εξισώσεων (3.86) και δεύτερη των (3.91), προκύπτει

$$R^a = - \sum_i m_i \gamma_i = - m \gamma_S \quad (3.96)$$

στην οποία  $m$  παριστάνει την συνολική μάζα, συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, και  $\gamma_S$  την επιτάχυνση του κέντρου αυτού. Αναλύοντας την επιτάχυνση αυτή στην εφαπτομενική  $\gamma_{S\varepsilon}$  και κεντρομόλο  $\gamma_{S\kappa}$  εκφράζουμε το διάνυσμα  $R^a$  μέσω των διανυσματικών εξισώσεων

$$R_\varepsilon^a = - m \gamma_{S\varepsilon} \quad , \quad R_\kappa^a = - m \gamma_{S\kappa} \quad (3.97)$$

### 3.7.3 Μεταβατική κίνηση

Στην περίπτωση αυτή το σώμα δεν περιστρέφεται περί το κέντρο μάζας και ισχύει

$$\sum_i r_i \times F_i^{E\Xi} = 0 \quad (3.98)$$

Επίσης, μέ βάση την δεύτερη των (3.90), ισχύει και η

$$\mathbf{M}_S^a = \mathbf{0} . \quad (3.99)$$

Συνεπώς, κατά την μεταβατική κίνηση το σύστημα των δυνάμεων αδρανείας ενός στερεού σώματος ανάγεται σε μοναδική συνισταμένη  $\mathbf{R}^a$  διά του κέντρου μάζας.

#### 3.7.4 Επίπεδη κίνηση

Όπως έχουμε αναλυτικά εξετάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η επίπεδη κίνηση ενός στερεού σώματος ανάγεται στην έρευνα μιάς επίπεδης τομής του. Θεωρήσουμε τώρα ένα σώμα που έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και ότι η κίνηση γίνεται παράλληλα προς το επίπεδο τούτο. Λόγω της συμμετρίας η συνισταμένη των δυνάμεων αδρανείας  $\mathbf{R}^a$  θα κείται μαζί με το κέντρο μάζας στο επίπεδο αυτό, η δε συνισταμένη ροπή  $\mathbf{M}_S^a$  των δυνάμεων αδρανείας προς το S θα είναι κάθετη στο επίπεδο τούτο. Συνεπώς, βάσει των εξισώσεων της πρώτης παραγράφου θα είναι

$$\mathbf{M}_S^a = - \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\epsilon\xi} = - \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\gamma}_i . \quad (3.100)$$

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5 της δυναμικής του απολύτως στερεού, ισχύει

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\epsilon\xi} = J_S \boldsymbol{\epsilon} , \quad (3.101)$$

όπου  $J_S$  παριστάνει την ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της τομής του διερχόμενο από το κέντρο μάζας S. Επομένως έχουμε

$$\mathbf{M}_S^a = - J_S \boldsymbol{\epsilon} . \quad (3.102)$$

Η  $\mathbf{M}_S^a$  έχει αντίθετη φορά προς την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, οι δυνάμεις αδρανείας ανάγονται σε μία συνισταμένη  $\mathbf{R}^a$  διερχόμενη διά του S και κείμενη στο επίπεδο συμμετρίας, και μιά ροπή  $\mathbf{M}_S^a$  κάθετη στο επίπεδο τούτο και καθοριζόμενη με τον τύπο (3.102).

#### 3.7.5 Περιστροφή περί άξονα διερχόμενο διά του κέντρου μάζας

Θεωρούμε την περίπτωση στερεού της προηγούμενης παραγράφου και τον άξονα περιστροφής z κάθετο στο επίπεδο συμμετρίας και διερχόμενο από το

κέντρο μάζης  $S$ . Επειδή στην περίπτωση αυτή είναι  $\gamma_S = 0$  θα είναι και  $R^a = 0$  και  $M_Z^a = -J_Z \epsilon$ . Δηλαδή το σύστημα των δυνάμεων αδράνειας ανάγεται μόνο σε μία ροπή  $M_Z^a$  κάθετη στο επίπεδο συμμετρίας.

### 3.7.6 Σχετική κίνηση

Στην περίπτωση της σχετικής κίνησης στερεού σώματος σε κάθε σημείο  $\Sigma_i$  μάζας  $m_i$  ενεργούν τρεις δυνάμεις αδράνειας:

$$F_{i\sigma}^a = -m_i \gamma_{\sigma i}, \quad F_{i\mu}^a = -m_i \gamma_{\mu i}, \quad F_{ic}^a = -m_i \gamma_{ci}, \quad (3.103)$$

που αντιστοιχούν στην σχετική, μετοχική και συμπληρωματική ή κοριόλειο επιτάχυνση. Συνεπώς, το σύστημα των ενεργουσών στο σώμα δυνάμεων, αποτελούμενο από τις τρεις παραπάνω δυνάμεις αδράνειας και τις εξωτερικές σε κάθε σημείο δυνάμεις, συνιστά σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία, γιὰ το οποίο μπορούμε να καταστρώσουμε τις εξισώσεις σχετικής κίνησης του σώματος ως εξισώσεις ισορροπίας τις οποίες εκφράζουν οι έξι στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας.

Σημειώνουμε τέλος εδώ, ότι στα επόμενα κεφάλαια της δυναμικής του στερεού σώματος θα επανέλθουμε πάνω στην αρχή D' Alembert και στις εφαρμογές της.



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### 3. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εφαρμογή 3.1: Η επίπεδη κίνηση υλικού σημείου  $M$  μάζης  $m$  καθορίζεται σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων από τις εξισώσεις

$$x = a \cos \gamma t, \quad y = \beta \sin \gamma t,$$

όπου  $a, \beta, \gamma$  είναι γνωστές σταθερές.

Ζητούνται: α) Η τροχιά, β) Η ασκούμενη δύναμη, και γ) Ο χρόνος μιάς πλήρους περιφοράς και το καλυπτόμενο εμβαδό από την ακτίνα  $OM$  ανά μονάδα χρόνου σε περίπτωση που η τροχιά είναι κλειστή.

Λύση: Απαλείφοντας τον χρόνο  $t$  μεταξύ των αναλυτικών δεδομένων εξισώσεων ευρίσκουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad (10.85)$$

που σημαίνει ότι η τροχιά είναι έλλειψη. Αν  $P_x, P_y$  είναι οι συνιστώσες της ενεργούσης δύναμης, οι αναλυτικές εξισώσεις της θεμελιώδους εξίσωσης δυναμικής παίρνουν την μορφή

$$P_x = m\ddot{x} = -m\alpha\gamma^2 \cos \gamma t = -m\gamma^2 x, \quad P_y = m\ddot{y} = -m\beta\gamma^2 \sin \gamma t = -m\gamma^2 y.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{x}{y}, \quad (10.86)$$

που σημαίνει ότι η δύναμη διευθύνεται προς το κέντρο  $O$  της έλλειψης (κεντρική κίνηση) και είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου από το  $O$ . Για

$$\cos \gamma t = \cos \gamma t_1, \quad \sin \gamma t = \sin \gamma t_1,$$

το σημείο  $M$  επανέρχεται σε κάθε χρονική στιγμή  $t_1$  στην ίδια θέση. Από αυτή την παρατήρηση συνάγεται ότι

$$t_1 - t = \frac{2\pi\lambda}{\gamma}, \quad \lambda = \text{ακέραιος},$$

και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\gamma}.$$

Τέλος, το εμβαδό που καλύπτει η ακτίνα  $OM$  ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο προς το εμβαδό της έλλειψης διά της περιόδου  $T$ , δηλαδή  $\alpha\beta\gamma/2$ .

**Εφαρμογή 3.2:** Σώμα βάρους  $W$  και μάζης  $m$  κινείται πάνω στην χορδή περιφέρειας ακτίνας  $R$  κάτω από την ενέργεια δύναμης  $F$  ελκτικής προς το κέντρο της περιφέρειας. Το σώμα κινείται από το σημείο  $A$  προς το  $B$  (Σχ. 10.22). Η έλκουσα δύναμη είναι ανάλογη της απόστασης  $r$  του σώματος από του ελκτικού κέντρου  $O$ . Επίσης, πάνω στο σώμα αναπτύσσεται τριβή από ολίσθηση ίση προς  $\mu W$ , όπου  $\mu$  είναι ο συντελεστής τριβής. Το σώμα στην αρχή της κίνησης ευρίσκεται στο  $A$  και έχει ταχύτητα  $v_A$  ίση προς  $0$ .

Να καθορισθούν: α) Η εξίσωση της κίνησης, β) Ο χρόνος  $t_1$  που απαιτείται για να διανύσει το μήκος  $AB = 2a$ , γ) Η μέγιστη τιμή  $v_{\max}$  της ταχύτητας. Δίνονται ότι στο σημείο  $A$  η ελκτική δύναμη είναι ίση προς  $W$  και ότι  $\frac{a}{R} < \frac{\mu}{2}$ .

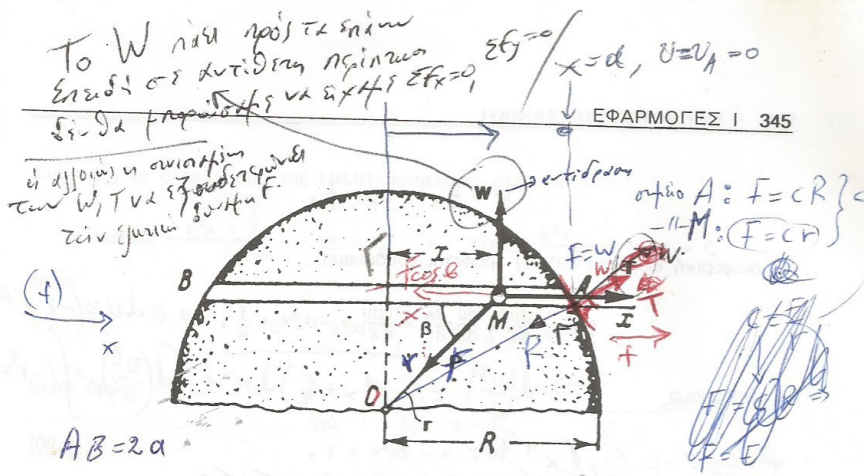
Σημείωση: Τα διανύσματα δυνάμεων, ταχυτήτων κλπ. έχουν δοθεί με τα μέτρα τους, δεδομένου ότι μέσω του σχήματος 10.22 είναι γνωστές και οι κατευθύνσεις τους.

**Λύση:** Στο άκρο  $A$  η ελκτική δύναμη έχει μέτρο

$$F_{\text{ελ}} = W \cdot \text{όσοτι} \Rightarrow F = k \cdot r \Rightarrow W = kR \Rightarrow k = \frac{W}{R}$$

$$F = kR, \Rightarrow W = kR \Rightarrow k = \frac{W}{R}$$

όπου  $k$  είναι συντελεστής, ενώ σε απόσταση  $(\Gamma M) = x$  από του μέσου  $\Gamma$  της



Σχήμα 10.22: Κίνηση υλικού σημείου κατά μήκος χορδής κύκλου.

στην Μ:  $B$   
 χορδής ΒΑ έχει μέτρο  $f = k \cdot r \Rightarrow F = \frac{Wr}{R}$

$F = CR \Rightarrow C = \frac{F}{R}$   
 $F = CR$

$F = kr$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις έπεται η έκφραση

$$F = \frac{Wr}{R} \quad (10.87)$$

Επιλέγοντας ως αρχή του άξονα x το σημείο Γ και θετική φορά την ΓΑ ευρίσκουμε ότι οι ενεργούσες πάνω στο σώμα δυνάμεις είναι:

- i) Η έλκουσα δύναμη P προς το κέντρο, ii) Η τριβή ολίσθησης  $T = \mu W$ , και
- iii) Η αντίδραση W.

Συνεπώς, η θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής παίρνει την μορφή

$$-F \cos \beta + T = m \ddot{x}, \quad m = \frac{W}{g} \quad (10.88)$$

Από την τελευταία εξίσωση, λύνοντας προς  $\ddot{x}$  παίρνουμε

$$\ddot{x} = -\frac{gr}{R} \cos \beta + \mu g = -\frac{gx}{R} + \mu g = -k^2 x + \frac{\mu}{2} g \quad (10.89)$$

στην οποία είναι  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

$$\ddot{x} = -k^2 x + \frac{\mu}{2} g$$

$$\dot{x} = -k^2 x + \frac{\mu}{2} g$$

$$\dot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$k^2 = \frac{g}{R}, \quad \mu g = \frac{\gamma}{2}.$$

Η διαφορική εξίσωση (10.89) γράφεται ισοδύναμα

$$(\dot{x})^2 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx} = -k^2 x + \frac{\gamma}{2}, \Rightarrow v dv = \left(-k^2 x + \frac{\gamma}{2}\right) dx$$

ή ισοδύναμα  $\Rightarrow d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(-k^2 x + \frac{\gamma}{2}\right) dx \Rightarrow \int d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int \left(-k^2 x + \frac{\gamma}{2}\right) dx$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = -k \frac{x^2}{2} + \frac{\gamma}{2} x + C_1, \quad (v^2)' = -2k^2 x + \gamma, \quad (10.90)$$

όπου τόνος (') παριστάνει παράγωγο προς  $x$ .

Το γενικό ολοκλήρωμα της (10.90) με την αρχική συνθήκη

$AB = 2a$  για  $x = a$ ,  $v_A = 0$ ,  $\Rightarrow 0 = -k a^2 + \gamma a + C_1$   
 $\Rightarrow C_1 = k a^2 - \gamma a$

καταλήγει στην εξής έκφραση του μέτρου της ταχύτητας  $v$ :

$$v = \pm [-k^2 x^2 + \gamma x + a(k^2 a - \gamma)]^{\frac{1}{2}}.$$

Επειδή όμως στην τυχούσα θέση  $x$  το διάνυσμα της ταχύτητας διευθύνεται από το  $M$  στο  $\Gamma$  θα ισχύει το αρνητικό σημείο. Επομένως, τελικά έχουμε

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = - [-k^2 x^2 + \gamma x + a(k^2 a - \gamma)]^{\frac{1}{2}}$$

ή

$$\frac{dx}{[-k^2 x^2 + \gamma x + a(k^2 a - \gamma)]^{\frac{1}{2}}} = - dt. \quad (10.91)$$

Επειδή ο παρονομαστής της τελευταίας εξίσωσης είναι τετραγωνική ρίζα τριωνύμου ως προς  $x$ , το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ευρίσκεται από πίνακες μετά την διερεύνηση της διακρίνουσας  $\Delta$  του τριωνύμου και των συντελεστών του. Επειδή  $-k^2 < 0$  και  $\frac{a}{R} < \frac{\mu}{2}$  από την υπόθεση, έπεται

$$k^2 a < \frac{\gamma}{4} \quad \text{ή} \quad k^2 a \gamma < \frac{\gamma^2}{4}$$

και επομένως

$$\Delta = -k^2 a(k^2 a - \gamma) - \frac{\gamma^2}{4} < 0.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της (10.91) καταλήγει στην έκφραση

$$\arcsin \frac{-k^2x + \frac{\gamma}{2}}{E} = -kt + C_2 \rightarrow \arccos \frac{k^2x - \frac{\gamma}{2}}{E} = kt + C$$

όπου

$$E = [k^2x(k^2a - \gamma) + \frac{\gamma^2}{4}]^{\frac{1}{2}}.$$

Είναι όμως:

$$\text{γιά } t = 0, \quad x = a$$

και έτσι

$$\arccos \frac{k^2x - \frac{\gamma}{2}}{E} = kt + \arccos \frac{k^2a - \frac{\gamma}{2}}{E} \quad (10.92)$$

που είναι και η ζητούμενη εξίσωση της κίνησης.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή από ολίσθηση είναι  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$  και η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$\arccos \frac{x}{a} = kt \quad \text{ή} \quad x = a \cos kt$$

που είναι αρμονική ταλάντωση εύρους  $a$ .

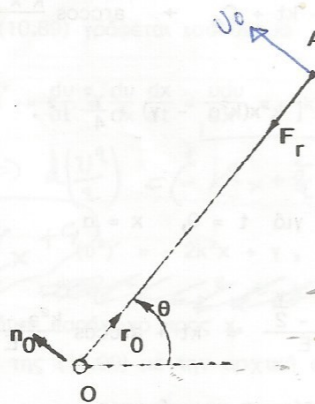
Αν στην (10.92) θέσουμε  $x = -a$  ευρίσκουμε τον ζητούμενο χρόνο  $t_1$  που το σώμα διανύει το διάστημα BA. Επίσης, από τον τύπο της ταχύτητας για  $x=0$  ευρίσκουμε την  $v_{\max}$ .

**Εφαρμογή 3.3:** Υλικό σημείο A μάζης  $m$  κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου έλκεται από σταθερό σημείο O με δύναμη μέτρου  $F_r = \frac{mk^2}{r^3}$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση του υλικού σημείου από το O. Αν για  $t = 0$  είναι  $r = a$  και το σημείο κινείται καθέτως προς την OA με ταχύτητα  $v_0$ , υπολογίσατε την απόσταση OA = r του υλικού σημείου από το O συναρτήσει του χρόνου t (Σχ. 10.23).

**Λύση:** Ορίζουμε το πολικό σύστημα  $(r_0, \theta_0)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 10.23. Μέσω των τύπων (1.57) εκφράζουμε τις δύο αναλυτικές εξισώσεις της θεμελιώδους διαφορικής εξίσωσης δυναμικής υπό την μορφή

$$m\gamma_r = -\frac{mk^2}{r^3} \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{mk^2}{r^3}, \quad (10.93)$$

$$m\gamma_{\theta} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (10.94)$$



Σχήμα 10.23: Υλικό σημείο ελκόμενο από σταθερό κέντρο O.

Από την (10.94) ευρίσκουμε

$$r^2 \dot{\theta} = c,$$

όπου c είναι σταθερά, η οποία, εφ' όσον

$$\text{για } t = 0, \quad r = a, \quad v = v_0 = a \dot{\theta}_0,$$

παρέχει

$$r^2 \dot{\theta} = a v_0. \quad (10.95)$$

Από την (10.93) παίρνουμε

$$\ddot{r} - \frac{a v_0^2}{r^3} = - \frac{k^2}{r^3}$$

ή

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{dr}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{dr}{dr} = \frac{a^2 v_0^2 - k^2}{r^3},$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί. Πράγματι, γράφουμε

$$\int_0^{\dot{r}} \dot{r} \, d\dot{r} = \int_0^r \frac{a^2 u_0^2 - k^2}{r^3} \, dr$$

ή

$$\dot{r}^2 = (a^2 u_0^2 - k^2) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (10.96)$$

εφ' όσον  $k < a u_0$ , που σημαίνει  $r > a$ .

Από την (10.96) ευρισκουμε

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{a^2 u_0^2 - k^2}{a^2} \sqrt{r^2 - a^2}},$$

ή

$$\int_a^r \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \int_0^t \sqrt{\frac{a^2 u_0^2 - k^2}{a^2}} \, dt$$

που παρέχει

$$r = r(t) = \sqrt{a^2 + (u_0^2 - \frac{k^2}{a^2}) t^2}. \quad (10.97)$$

Παρατηρούμε ότι για  $k = u_0 a$  προκύπτει  $r = a$ , δηλαδή η τροχιά είναι κυκλική.

Αν  $k > u_0 a$  που σημαίνει  $u_0^2 a^2 - k^2 < a$  για να είναι η κίνηση που παριστάνεται από την (10.96) δυνατή, πρέπει

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} < 0$$

που σημαίνει ότι

$$r^2 < a^2$$

ή

$$\dot{r} < 0.$$

Τότε, η (10.96) γίνεται

$$r \dot{r} = -\frac{1}{a} \sqrt{k^2 - a^2 u_0^2} \sqrt{a^2 - r^2}$$

από την οποία παίρνουμε

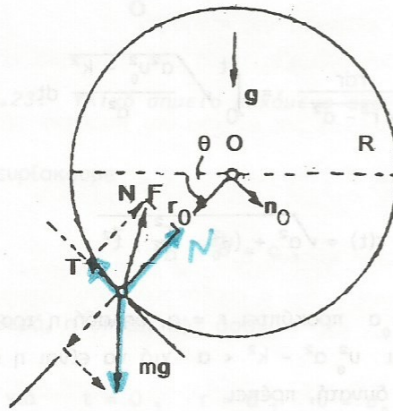


$$\int_a^r \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{1}{a} \int_0^t \sqrt{k^2 - a^2 u_0^2} dt \quad (10.94)$$

ή

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{k^2}{a^2} - u_0^2\right) t^2} \quad (10.98)$$

**Εφαρμογή 3.4:** Υλικό σημείο μάζης  $m$  αφήνεται στο ένα των δύο άκρων της οριζόντιας διαμέτρου κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς ακτίνας  $R$ . Συνέπεια του βάρους του το υλικό σημείο αρχίζει να κινείται προς το κατώτατο σημείο της τροχιάς, στο οποίο φθάνει με μηδενική ταχύτητα (Σχ. 10.24). Ποιάς ο συντελεστής τριβής μεταξύ σημείου - τροχιάς;



Σχήμα 10.24: Σύστημα υλικού σημείου και κατακόρυφου τροχιάς.

**Λύση:** Με βάση το πολικό σύστημα  $(r_0, n_0)$  του σχήματος 10.24 και τον τύπο (1.57) ορίζουμε:

$$\text{Κατεύθυνση } r_0 : m\gamma_r = mg \sin \theta - N = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (10.99)$$

$$\text{Κατεύθυνση } n_0 : m b_\theta = mg \cos \theta - T = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

στις οποίες  $N$  παριστάνει την αντίδραση στην τροχιά και  $T$  την τριβή. Δεδομένου ότι η τροχιά είναι κυκλική ισχύει η εξίσωση

$$\dot{r} = \dot{R} = 0$$

και συνεπώς οι (10.99) παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} mR\dot{\theta}^2 &= N - mg \sin\theta, \\ mR\ddot{\theta} &= mg \cos\theta - \mu N. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Από τις (10.100) προκύπτει

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} (\cos\theta - \mu \sin\theta), \quad (10.101)$$

που είναι μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς  $\theta(t)$  με σταθερούς συντελεστές. Θέτουμε

$$\dot{\theta}(t) = y(\theta), \quad (10.102)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}y' = yy',$$

όπου τόνος (') παριστάνει παράγωγο προς  $\theta$ .

Η (10.102) μετασχηματίζεται τώρα στην

$$yy' + \mu y^2 = \frac{g}{R} (\cos\theta - \mu \sin\theta)$$

ή

$$\frac{1}{2} (y^2)' + \mu y^2 = \frac{g}{R} (\cos\theta - \mu \sin\theta), \quad (10.103)$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης ως προς  $y^2$ . Θέτοντας εκ νέου

$$y^2(\theta) = p(\theta), \quad (10.104)$$

η (10.103) γίνεται

$$\frac{1}{2} p' + \mu p = \frac{g}{R} (\cos\theta - \mu \sin\theta),$$

το γενικό ολοκλήρωμα της οποίας, σύμφωνα με την θεωρία των γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης, υπολογίζεται

$$p(\theta) = \frac{2g}{R} \frac{3\mu \cos\theta + (1 - 2\mu^2) \sin\theta}{1 + 4\mu^2} + Ce^{-2\mu\theta}, \quad (10.105)$$

όπου  $C$  είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Χρησιμοποιώντας τώρα την αρχική συνθήκη

$$\text{για } \theta = 0, \quad \rho(\theta=0) = y^2(\theta=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$$

ευρίσκουμε μέσω της (10.105) ότι

$$C = -\frac{6g\mu}{R(1+4\mu^2)}. \quad (10.106)$$

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με την υπόθεση, για  $\theta = \frac{\pi}{2}$  είναι  $v = 0$ . Επειδή από τον τύπο (1.53) ισχύει

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

και η τροχιά είναι κυκλική, έπεται

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

που σημαίνει ότι

$$v(\theta=\frac{\pi}{2}) = \dot{\theta}(t=\tau) = y(\theta=\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\rho(\theta=\frac{\pi}{2})} = 0.$$

Έτσι, μέσω των (10.105) και (10.106) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$e^{-\pi\mu} = \frac{1-2\mu^2}{3\mu}. \quad (10.107)$$

Η σχέση (10.107) είναι υπερβατική εξίσωση από την οποία καθορίζεται ο συντελεστής τριβής  $\mu$ .

**Εφαρμογή 3.5:** Ένα σώμα μάζης  $m$  κείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και αιφνίδια ωθείται και αποκτά αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Η κίνηση του σώματος πάνω στο επίπεδο επιβραδύνεται υπό την ενέργεια σταθερής δύναμης  $F$ , παράλληλης προς το οριζόντιο επίπεδο. Να καθορισθεί ο χρόνος  $t_1$  και το διάστημα  $x_1$  που διανύει μέχρι της ηρεμίας του.

**Λύση:** Στην τυχούσα θέση πάνω στο σώμα ενεργεί το βάρος  $W$ , η αντίσταση  $-W$  και η δύναμη  $F$ . Με βάση το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης

(τύπος (3.37)) ισχύει

$$mv_1 - mv_0 = \sum_i \Omega_i,$$

όπου τα μεγέθη ταχυτήτων και η παρόρμηση δεν έχουν σημειωθεί ως διανύσματα δεδομένου ότι είναι συγγραμμικά ως προς οριζόντιο άξονα.

Στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$v_1 = 0, \quad \sum_i \Omega_i = - \int_0^{t_1} F dt = -Ft_1.$$

Συνεπώς, ευρίσκουμε

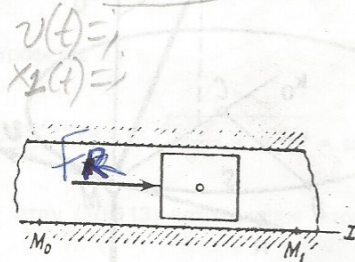
$$-mv_0 = -Ft_1 \rightarrow t_1 = \frac{mv_0}{F}. \quad (10.108)$$

Εξ άλλου, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε το αποτέλεσμα

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} = -Fx_1$$

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -Fx_1 \rightarrow x_1 = \frac{mv_0^2}{2F}. \quad (10.109)$$

**Εφαρμογή 3.6:** Η συνισταμένη δύναμη όλων των δυνάμεων που ενεργούν επί του εμβόλου που σχήματος 10.25 μεταβάλλεται με τον νόμο  $F = W(a + \beta t^4)$ , όπου  $W$  είναι το βάρος,  $a, \beta$  είναι σταθεροί συντελεστές και  $\mu$  ακέραιος. Να καθορισθεί η ταχύτητα και το διάστημα  $x_1$  συναρτήσει του χρόνου  $t$  αν για  $t = 0$  είναι  $v_0 = 0$ .



Σχήμα 10.25: Συνισταμένη δύναμη επί εμβόλου.

Λύση: Με βάση το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης (τύπος (3.36)) προκύπτει

$$mv - mv_0 = \int_0^t W(a + \beta t^\mu) dt = W \left( at + \frac{\beta t^{\mu+1}}{\mu+1} \right)$$

και επειδή  $v_0 = 0$  έπεται

$$v = gt \left( a + \frac{\beta t^\mu}{\mu+1} \right). \quad (10.110)$$

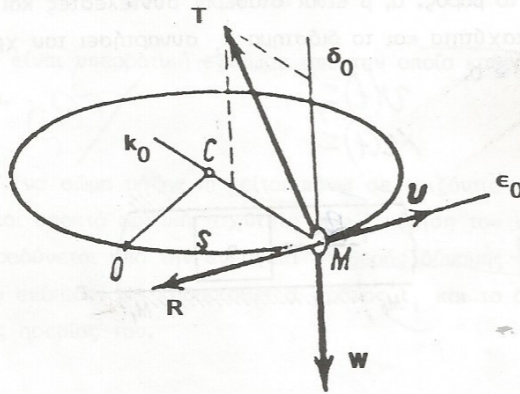
Από την άλλη μεριά έχουμε

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = g \left( at + \frac{\beta t^{\mu+1}}{\mu+1} \right) dt$$

Παίρνοντας την οριακή συνθήκη για  $t = 0, x = 0$ , υπολογίζουμε

$$x = g \left[ \frac{at^2}{2} + \frac{\beta t^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} \right]. \quad (10.111)$$

**Εφαρμογή 3.7:** Ένας δακτύλιος  $\Delta$  βάρους  $W$  ολισθαίνει σε οριζόντια κυκλική λεπτή ράβδο (οδηγό) ακτίνας  $a$  με μία αρχική ταχύτητα  $v_0$  επαπτόμενη στον κύκλο (Σχ. 10.26). Επάνω στον δακτύλιο ενεργεί η δύναμη τριβής  $R = \mu T$ , όπου  $T$  παριστάνει την αντίδραση και  $\mu$  τον σταθερό συντελεστή τριβής. Ζητούνται να καθορισθούν: i) Η εξίσωση κίνησης, ii) Η εξίσωση ταχύτητας, iii) Η αντίδραση, και iv) Ο χρόνος και το διάστημα που θα διανύσει ο δακτύλιος μέχρις ότου σταματήσει.



Σχήμα 10.26: Δακτύλιος ολισθαίνων σε οριζόντιο κυκλικό οδηγό.

**Λύση:** Ορίζουμε το τοπικό σύστημα Frenet  $\epsilon_0, k_0, \delta_0$  στην τυχούσα θέση  $\Delta(s)$ . Επί του δακτυλίου ενεργούν οι παρακάτω δυνάμεις: α) Το βάρος  $W$ , β) Η αντίδραση  $T$ , κάθετη στον κυκλικό οδηγό κείμενη πάνω στο επίπεδο  $(\delta_0 \Delta k_0)$ , και γ) Η τριβή  $R = \mu T$ .

Προφανώς ισχύουν οι εξισώσεις

$$T = T_k + T_\delta, \quad T_\epsilon = 0.$$

Οι εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου  $\Delta$  πάνω στην δεδομένη κυκλική τροχιά δίνονται από τις σχέσεις (3.64), δηλαδή

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_i F_\epsilon^i, \quad \frac{mv^2}{a} = \sum_i F_k^i + T_k, \quad (10.112)$$

$$T_\delta = W = mg,$$

στις οποίες η πρώτη παριστάνει την επιτρόχια συνιστώσα και η δεύτερη την κεντρομόλο. Οι τρεις αυτές εξισώσεις γράφονται αντίστοιχα

$$m\dot{v} = -R, \quad (10.113)$$

$$\frac{mv^2}{a} = T_k, \quad (10.114)$$

$$T_\delta = mg. \quad (10.115)$$

Από την διανυσματική εξίσωση

$$R = \mu T$$

έπεται ότι το μέτρο  $R$  γράφεται

$$R = \mu T = \mu \sqrt{T_k^2 + T_\delta^2} = \mu \sqrt{\frac{m^2 v^4}{a^2} + m^2 g^2} = \mu m \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{a^2}}. \quad (10.116)$$

Εισάγοντας την (10.116) στην (10.113) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\frac{dv}{\sqrt{a^2 g^2 + v^4}} = -\frac{\mu}{a} dt.$$

Θέτουμε

$$v = kz, \quad k = \sqrt{Rg}$$

και μετασχηματίζουμε την τελευταία εξίσωση στην

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = -\frac{\mu k}{a} dt,$$

από την οποία προκύπτει

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = -\frac{\mu k}{a} t + C, \quad (10.117)$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Οι ρίζες της υπόριζης ποσότητας είναι φανταστικές και έτσι το ολοκλήρωμα είναι ελλειπτικής μορφής (με πολυώνυμο της υπόριζης ποσότητας τετάρτου βαθμού).

Αν υποθέσουμε ότι κατά κάποιο τρόπο υπολογίσαμε την συνάρτηση

$$z = f(t) + C$$

ή, μέσω της παραπάνω αντικατάστασης,

$$v = \frac{1}{k} [f(t) + C]$$

και κάνουμε χρήση της αρχικής συνθήκης για  $t = 0$ ,  $v = v_0$ ,

καθορίζουμε το μέτρο της ταχύτητας  $v$  συναρτήσει του χρόνου  $t$ . Για τον υπολογισμό του ζητούμενου διανύσματος  $s$  συναρτήσει της  $v$  επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = -\frac{\mu}{a} \sqrt{k^4 + v^4}.$$

Πράγματι, από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{dv^2}{ds} = -\frac{2\mu}{a} \sqrt{k^4 + v^4}$$

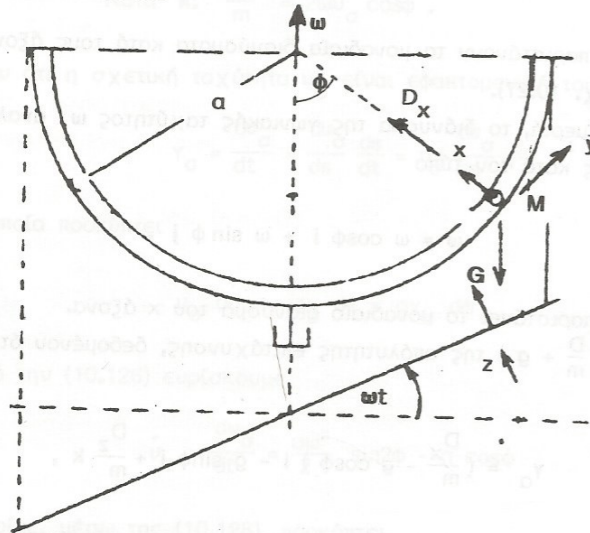
$$\int_{u_0}^u \frac{du^2}{\sqrt{k^4 + u^4}} = -\frac{2\mu}{a} \int_0^s ds,$$

δηλαδή

$$s = \frac{a}{2\mu} \ln \frac{u_0^2 + \sqrt{k^4 + u_0^4}}{u^2 + \sqrt{k^4 + u^4}}. \quad (10.118)$$

Έχοντας ήδη καθορίσει την ταχύτητα  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε βάσει της τελευταίας εξίσωσης να καθορίσουμε και το διάστημα συναρτήσει του χρόνου. Τέλος, από την σχέση που δίνει την  $T$  καθορίζουμε αυτή συναρτήσει του χρόνου.

**Εφαρμογή 3.8:** Κυκλική αύλακα ακτίνας  $a$  περιστρέφεται περί κατακόρυφο διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  (Σχ. 10.27). Ζητούνται: i) Η αλγεβρική τιμή της  $\omega$  έτσι ώστε υλικό σημείο μάζης  $m$  κείμενο εντός της αύλακας να ισορροπεί στην θέση όπου η ακτίνα κλίνει κατά  $60^\circ$  ως προς τον άξονα περιστροφής, και ii) Το μέγεθος των αντιδράσεων των τοιχωμάτων της αύλακας. Τριβές δεν αναπτύσσονται.



Σχήμα 10.27: Κυκλική αύλακα περιστρεφόμενη περί κατακόρυφη διάμετρό της.



Λύση: Έστω Μxyz κινητό σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα 10.27. Δεδομένου ότι δεν αναπτύσσονται τριβές οι προβολές της αντιδράσεως  $D$  είναι οι  $D_x, D_y$ . Αν  $G$  παριστάνει το βάρος του υλικού σημείου μάζης  $m$ , τότε τούτο εκτελεί κίνηση λόγω του  $G$  και κίνηση λόγω της περιστροφής  $\omega$ . Συνεπώς, η απόλυτη ταχύτητά του και η απόλυτη επιτάχυνσή του, δίνονται κατά τα γνωστά από τις διανυσματικές εξισώσεις

$$v_a = v_\sigma + v_\mu,$$

$$\gamma_a = \frac{D}{m} + g = \gamma_\sigma + \gamma_\mu + \gamma_c,$$

όπου  $g$  παριστάνει την επιτάχυνση βαρύτητας.

Το διάνυσμα της μετοχικής ταχύτητας  $v_\mu$  είναι

$$v_\mu = \omega \sin \phi \mathbf{k}, \quad (10.119)$$

ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας είναι

$$v_\sigma = a \dot{\phi} \mathbf{j}, \quad (10.120)$$

όπου  $\mathbf{k}$  και  $\mathbf{j}$  παριστάνουν τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες  $z$  και  $y$  αντίστοιχα (Σχ. 10.27).

Από την άλλη μεριά, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  αναλύεται στους  $x$  και  $y$  άξονες κατά τον τύπο

$$\omega = \omega \cos \phi \mathbf{i} + \omega \sin \phi \mathbf{j}, \quad (10.121)$$

στον οποίο  $\mathbf{i}$  παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του  $x$  άξονα.

Ο όρος  $(\frac{D}{m} + g)$  της απόλυτης επιτάχυνσης, δεδομένου ότι  $D_y = 0$ , γράφεται

$$\gamma_a = \left( \frac{D_x}{m} - g \cos \phi \right) \mathbf{i} - g \sin \phi \mathbf{j} + \frac{D_z}{m} \mathbf{k}, \quad (10.122)$$

ενώ οι όροι  $\gamma_\sigma$  και  $\gamma_\mu$  της σχετικής και μετοχικής επιτάχυνσης γράφονται αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\gamma_{\sigma} &= \frac{v_{\sigma}^2}{a} \mathbf{i} + \dot{v}_{\sigma} \mathbf{j} \quad , \quad \gamma_{\mu} = \omega^2 \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \mathbf{i} - \omega^2 \rho \cos\phi \mathbf{j} = \\ &= \omega^2 a \sin^2\phi \mathbf{i} - \omega^2 a \sin\phi \cos\phi \mathbf{j} .\end{aligned}\quad (10.123)$$

Τέλος, η κοριόλειος επιτάχυνση  $\gamma_C$ , με βάση τις (10.121) και (10.120), γράφεται

$$\begin{aligned}\gamma_C &= 2(\omega \times v_{\sigma}) = 2\{(\omega \cos\phi \mathbf{i} + \omega \sin\phi \mathbf{j}) \times a\dot{\phi} \mathbf{j}\} = \\ &= 2a\dot{\phi} \cos\phi \mathbf{k} = 2\omega v_{\sigma} \cos\phi \mathbf{k} .\end{aligned}\quad (10.124)$$

Συνεπώς, η διανυσματική εξίσωση της απόλυτης επιτάχυνσης έχει τις εξής τρεις αναλυτικές εξισώσεις κατά τους άξονες  $x, y, z$ :

$$\text{Κατά } \mathbf{i}: \quad \frac{D_x}{m} - g \cos\phi = a\omega^2 \sin^2\phi + \frac{v_{\sigma}^2}{a} ,\quad (10.125)$$

$$\text{Κατά } \mathbf{j}: \quad -g \sin\phi = -\frac{a\omega^2}{2} \sin 2\phi + \dot{v}_{\sigma} ,\quad (10.126)$$

$$\text{Κατά } \mathbf{k}: \quad \frac{D_z}{m} = 2\omega v_{\sigma} \cos\phi .\quad (10.127)$$

Δεδομένου ότι η σχετική ταχύτητα  $v_{\sigma}$  είναι εφαπτομενική του κύκλου, γράφουμε

$$\gamma_{\sigma} = \frac{dv_{\sigma}}{dt} = \frac{dv_{\sigma}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_{\sigma} \frac{dv_{\sigma}}{ds} ,\quad (10.128)$$

από την οποία προκύπτει

$$v_{\sigma} dv_{\sigma} = \gamma_{\sigma} ds = a\gamma_{\sigma} d\phi .\quad (10.129)$$

Έτσι, από την (10.126) ευρίσκουμε

$$\dot{v}_{\sigma} = \frac{dv_{\sigma}}{dt} = \frac{a\omega^2}{2} \sin 2\phi - g \cos\phi$$

εκ της οποίας, μέσω της (10.128), προκύπτει

$$\gamma_{\sigma} ds = v_{\sigma} dv_{\sigma} = \left( \frac{a\omega^2}{2} \sin 2\phi - g \cos\phi \right) ds .$$

Κάνοντας τώρα χρήση της εξίσωσης (10.129) μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$u_{\sigma} du_{\sigma} = a \left( \frac{a\omega^2}{2} \sin 2\phi - g \sin \phi \right) d\phi,$$

από την ολοκλήρωση της οποίας υπολογίζουμε

$$\frac{u_{\sigma}^2}{2} = -\frac{a^2\omega^2}{4} \cos 2\phi + ag \cos \phi + C, \quad (10.130)$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Μέσω της αρχικής συνθήκης για  $\phi = 0$ ,  $u_{\sigma} = 0$  έχουμε

$$C = \frac{a\omega^2}{4} - ag,$$

οπότε η  $u_{\sigma}$  προκύπτει

$$u_{\sigma} = 2a\omega \sin \frac{\phi}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \frac{g}{a\omega^2}}. \quad (10.131)$$

Αλλά από την υπόθεση για  $\phi = 60^\circ$ ,  $u_{\sigma} = 0$  οπότε

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3a}}.$$

Από τις (10.125) και (10.127), γνωρίζοντας την  $\omega$ , υπολογίζουμε τις  $D_x$ ,  $D_z$  από τους τύπους

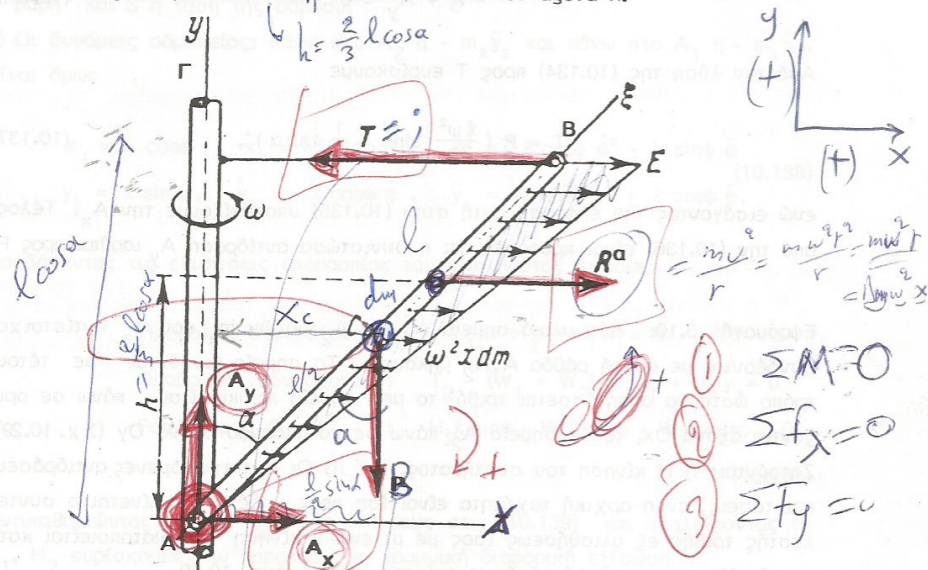
$$D_x = \frac{3G}{2}, \quad D_z = 0. \quad (10.132)$$

**Εφαρμογή 3.9:** Μια ομογενής ράβδος AB μήκους  $l$  και βάρους  $B$  αρθρούται στο σημείο A με κατακόρυφο στέλεχος περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  (Σχ. 10.28). Να καθορισθεί η τάση στο οριζόντιο νήμα που σταθεροποιεί την ράβδο υπό γωνία  $\alpha$  με το στέλεχος, καθώς επίσης να υπολογισθούν και οι αντιδράσεις  $A_x$  και  $A_y$ .

**Λύση:** Οι ενεργούσες εξωτερικές δυνάμεις πάνω στην AB είναι το βάρος  $B$ , η τάση T, οι αντιδράσεις  $A_x$  και  $A_y$  και οι δυνάμεις αδρανείας. Σε κάθε σημείο της ράβδου  $\Delta m$  η ενεργούσα φυγόκεντρη δύναμη αδρανείας είναι  $\Delta m \omega^2 r$ ,

$$\frac{m \omega^2 l}{r} = \frac{m \omega^2 r^2}{r} = m \omega^2 r$$

όπου  $x$  παριστάνει την απόσταση του στοιχείου της ράβδου από τον άξονα περιστροφής. Η συνισταμένη των αδρανειακών δυνάμεων, που είναι κατά ευθύγραμμο νόμο διανεμημένες, διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου ABE, συνεπώς σε μία απόσταση  $\frac{2l \cos \alpha}{3}$  από τον άξονα  $x$ :



Σχήμα 10.28: Ομογενής ράβδος περιστρεφόμενη περί κατακόρυφο στέλεχος.

Έτσι, η συνισταμένη  $R^a$  των δυνάμεων αυτών προκύπτει

$$R^a = M \gamma_C = M \omega^2 x_c \mathbf{i} = \frac{B}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \mathbf{i}, \quad (10.133)$$

όπου  $x_c$  παριστάνει την τετμημένη του κέντρου βάρους της ράβδου και  $M$  την συνολική της μάζα.

Το άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων καθώς και των αδρανειακών δυνάμεων ως προς το σημείο A είναι ίσο προς μηδέν. Η εξίσωση αυτή καθώς και οι προβολές των εξωτερικών δυνάμεων προς τους άξονες  $x, y$  καταλήγουν στις εξής αναλυτικές εξισώσεις:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -T l \cos \alpha + B \frac{l}{2} \sin \alpha + R^a \frac{2}{3} l \cos \alpha = 0, \quad (10.134)$$

$$T = \dots \text{όπου } R^a = \frac{dm \omega^2 x}{r} = \frac{dm \omega^2 r}{r} = dm \omega^2 x = \left(\frac{B}{g}\right) \omega^2 \left(\frac{l}{2} \sin \alpha\right)$$

$$-T + R^a + A_x = 0, \quad (10.135)$$

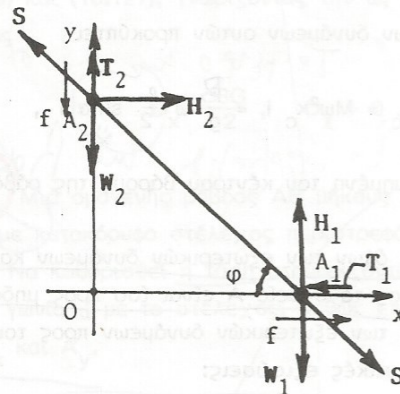
$$-B + A_y = 0. \quad (10.136)$$

Από την λύση της (10.134) προς  $T$  ευρίσκουμε

$$T = B \left( \frac{\ell \omega^2}{3g} \sin \alpha + \frac{1}{2} \tan \alpha \right), \quad (10.137)$$

ενώ εισάγοντας την έκφραση αυτή στην (10.135) υπολογίζουμε την  $A_x$ . Τέλος, από την (10.136) είναι προφανές ότι η συνιστώσα αντίδραση  $A_y$  ισούται προς  $B$ .

**Εφαρμογή 3.10:** Δύο υλικά σημεία  $A_1$  και  $A_2$  μαζών  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα, συνδέονται με αβαρή ράβδο  $A_1A_2$  μήκους  $\ell$ . Τα σημεία κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπτύσσεται τριβή\* το μεν σημείο  $A_1$  κινείται πάνω σε οριζόντιο άξονα  $Ox$ , το δε σημείο  $A_2$  πάνω σε κατακόρυφο άξονα  $Oy$  (Σχ. 10.29). Ζητούνται: i) Η κίνηση του συστήματος, και ii) Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις και τάσεις, αν η αρχική ταχύτητα είναι ίση προς μηδέν. Δίνεται ο συντελεστής τριβής εξ ολισθήσεως ίσος με  $\mu$ , ενώ η κίνηση πραγματοποιείται κατά την διεύθυνση των βελών  $f$  όπως φαίνεται στο σχήμα 10.29.



Σχήμα 10.29: Κίνηση δύο υλικών σημείων υπό περιορισμούς.

Λύση: Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο σύστημα των δύο σημείων είναι:

α) Εξωτερικές δυνάμεις: πάνω στο  $A_2$  οι  $W_2, T_2, H_2$  και  $S$  ενώ πάνω στο  $A_1$  οι  $W_1, T_1, H_1$  και  $S$ , όπου είναι  $T_1 = \mu H_1, T_2 = \mu H_2$  οι τριβές,  $W_1, W_2$  τα βάρη και  $S$  η τάση της ράβδου.

β) Οι δυνάμεις αδρανείας: πάνω στο  $A_2$   $\eta - m_2 \ddot{y}_2$  και πάνω στο  $A_1$   $\eta - m_1 \ddot{x}_1$ . Είναι όμως

$$\begin{aligned} x_1 &= l \cos \phi, & \dot{x}_1 &= -l \sin \phi \dot{\phi}, & \ddot{x}_1 &= -l \cos \phi \dot{\phi}^2 - l \sin \phi \ddot{\phi} \\ y_2 &= l \sin \phi, & \dot{y}_2 &= l \cos \phi \dot{\phi}, & \ddot{y}_2 &= -l \sin \phi \dot{\phi}^2 + l \cos \phi \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (10.138)$$

Λαμβάνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος έχουμε:

$$\text{Προβολές στον άξονα } x: \quad -T_1 + H_2 - m_1 \ddot{x}_1 = 0$$

$$\text{Προβολές στον άξονα } y: \quad T_2 - (W_1 + W_2) + H_1 + m_2 \ddot{y}_2 = 0$$

$$\text{Ροπές προς } O \quad : \quad H_2 l \sin \phi - H_1 l \cos \phi + W_1 l \cos \phi = 0$$

(10.139)

Αντικαθιστώντας τα  $T_1, T_2$  με τα [α] τους στις (10.139) και απαλείφοντας τα  $H_1, H_2$  ευρίσκουμε την παρακάτω μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$C_1 \dot{\phi}^2 + C_2 \ddot{\phi} + C_3 = 0 \quad (10.140)$$

όπου

$$C_1 = m_1(\tan \phi + \mu) \cos \phi - m_2(1 - \mu \tan \phi) \sin \phi$$

$$C_2 = m_1(\tan \phi + \mu) \sin \phi + m_2(1 - \mu \tan \phi) \cos \phi$$

$$C_3 = \frac{g}{l} [(1 - \mu \tan \phi)(m_1 + m_2) - m_1(1 + \mu^2)]$$

Η εξίσωση (10.140) αποτελεί την διαφορική εξίσωση της κίνησης του συστήματος. Η θέση του συστήματος είναι τελείως ορισμένη από την γωνία  $\phi = \phi(t)$ . Για  $\mu = 0$ , δηλαδή στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή, η εξίσωση (10.140) παίρνει την μορφή

$$(m_1 - m_2) \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + (m_1 \sin^2 \phi + m_2 \cos^2 \phi) \ddot{\phi} + m_2 \frac{g}{l} \cos \phi = 0.$$

με αρχικές συνθήκες του προβλήματος που είναι για  $t = 0$ ,  $\phi = \phi_0$  και  $\dot{\phi} = 0$ .

Όταν καθορισθεί η συνάρτηση  $\phi = \phi(t)$  από την λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης, τότε οι  $H_1, H_2$  ευρίσκονται από τους παρακάτω τύπους

$$H_1 = \frac{-\mu m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + (m_1 + m_2)g}{1 + \mu^2}, \quad H_2 = \frac{m_1 \ddot{x}_1 + \mu m_2 \ddot{y}_2 + \mu(m_1 + m_2)g}{1 + \mu^2}. \quad (10.141)$$

Τώρα, για την τάση  $S$  εξετάζουμε την ισορροπία ενός μόνο σημείου, πχ. του  $A_1$ , δηλαδή

$$-T_1 + S \cos\phi - m_1 \ddot{x}_1 = 0, \quad (10.142)$$

από την οποία προκύπτει αμέσως η ζητούμενη τάση.

Για την ολοκλήρωση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της με  $2\dot{\phi}$  και, μετά την εκτέλεση πράξεων, ευρίσκουμε

$$[(m_1 \sin\phi + m_2 \cos\phi) \dot{\phi}^2]' + 2m_2 \frac{g}{\ell} \frac{d}{dt} \sin\phi = 0,$$

ή με βάση τις αρχικές συνθήκες

$$(m_1 \sin^2\phi + m_2 \cos^2\phi) \dot{\phi}^2 + 2m_2 \frac{g}{\ell} \sin\phi = 2m_2 \frac{g}{\ell} \sin\phi_0$$

Επειδή για  $dt > 0$  είναι  $d\phi < 0$  έχουμε

$$dt = - \left( \frac{\ell}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{m_1 \sin^2\phi + m_2 \cos^2\phi}{m_2 (\sin\phi_0 - \sin\phi)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\phi. \quad (10.143)$$

Η (10.143) είναι υπερελλειπτικό ολοκλήρωμα και μπορεί να υπολογισθεί βάσει πινάκων.

