10/03/2021

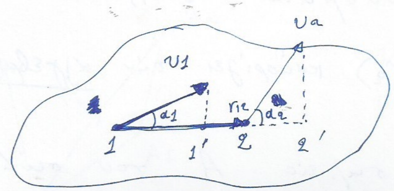
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

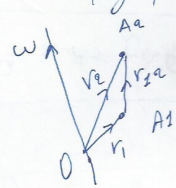
2.9.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΒΟΛΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ
ΟΡΘΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

▶ Οι προβολές των ταχυτήτων 2 σημείων της τομής ενός στερεού πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά, είναι ίσες.

— Ας θεωρήσουμε την επίπεδη τομή του στερεού του παρακάτω σχήματος



Γνωρίζουμε ότι:



$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 &= \omega \times r_1 \\ \upsilon_2 &= \omega \times r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 - \upsilon_1 = \omega \times r_{12}} \Rightarrow$$

$$(\upsilon_2 - \upsilon_1) \cdot r_{12} = (\omega \times r_{12}) \cdot r_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 \cdot r_{12} = \upsilon_1 \cdot r_{12} \Rightarrow$$

$$(11') = (22') \Rightarrow$$

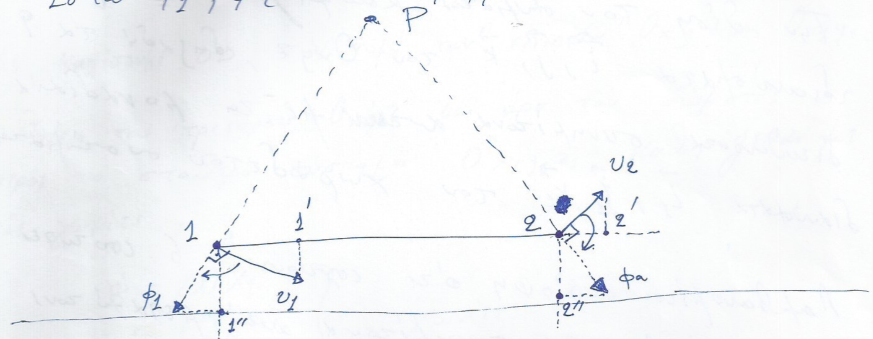
$$\boxed{\upsilon_1 \cos a_1 = \upsilon_2 \cos a_2}$$

▨ Με το θεώρημα αυτό μπορούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος, <u>αν</u> η διεύθυνση της κίνησης του σημείου αυτού και η ταχύτητα ενός άλλου σημείου είναι γνωστές.

- Για την γραφική λύση προβλημάτων κίνησης γίνεται συνήθως χρήση της λεγομένης "ορθής" ή "κάθετης" ταχύτητας.

Έτσι κατά την επίπεδη κίνηση στερεού σώματος είναι χρήσιμο αντί των πραγματικών ταχυτήτων των σημείων να χρησιμοποιούμε τις ταχύτητες που προέρχονται από ομόφορη περιστροφή των πραγματικών κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$.

Έστω ϕ_1, ϕ_2 οι εστραμμένες ταχύτητες των σημείων 1, 2



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{1\phi_1 1''} = \overset{\triangle}{1 u_1 1'}$ και $\overset{\triangle}{2\phi_2 2''} = \overset{\triangle}{2 u_2 2'}$ $\Rightarrow$ $11'' = 11'$ και $22'' = 22'$

Από το θεώρημα ορθών ταχυτήτων $\underline{11' = 22'}$

$\Rightarrow \boxed{11'' = 22''}$

ΑΡΑ η ευθεία $\phi_1\phi_2 // 12$

- Το σημείο (P) τομής των $1\phi_1$ και $2\phi_2$ είναι το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής.

2.11 ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ

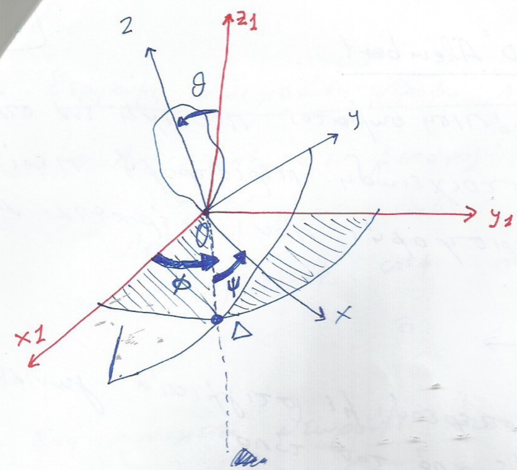
► Για την μελέτη της κίνησης του σώματος θεωρούμε τρισορθογώνιο σύστημα $Oxyz$ με αρχή το σημείο αυτό. (σωματόδετο σύστημα)

– Την κίνηση του σώματος καθώς και του μαζί με αυτό σωματόδετου συστήματος αναφέρουμε σε σταθερό τρισορθογώνιο σύστημα $Ox_1y_1z_1$ (χωρόδετο σύστημα)

– Την θέση του σώματος καθορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ του $Oxyz$, δηλαδή τα 9 διευθύνοντα συνημίτονα αυτών με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ του χωρόδετου συστήματος

– Λαμβανομένου υπόψη ότι ισχύουν 6 ισότητες που συνδέουν τα συνημίτονα αυτά μεταξύ τους μένουν 3 ανεξάρτητοι παράμετροι για να καθορίσουν την θέση του σώματος. ⟹ 3 βαθμοί ελευθερίας

► Ο Euler εισήγαγε απ' ευθείας σύστημα 3 μόνο παραμέτρων, των "γωνιών Euler"



- Ας καλέσουμε ΟΔ την τομή των επιπέδων Oxy και Ox_1y_1

- Η θέση του τριέδρου $Oxyz$ και άρα του σώματος ως προς το σταθερό σύστημα $Ox_1y_1z_1$ καθορίζεται με τις γωνίες

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \hat{\Delta O x_1} \\ \psi = x\hat{O}\Delta \\ \theta = z_1\hat{O}z \end{array}\right\} \Rightarrow \text{γωνίες Euler}$$

- Μεταβολή της γωνίας ψ σημαίνει: Περιστροφή περί άξονα Oz
- —״— φ : —״— Oz_1
- —״— θ : —״— $O\Delta$

Για να καθοριστεί η κίνηση του σώματος πρέπει να είναι γνωστές οι συναρτήσεις

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \psi(t) \\ \phi = \phi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Εξισώσεις κίνησης του στερεού περί σταθερό σημείο}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Euler – D'Alembert

Κάθε στοιχειώδης μετατόπιση σώματος που έχει ένα σταθερό σημείο ισοδυναμεί με στοιχειώδη περιστροφή περί στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο αυτό.

$$\longleftrightarrow$$

" Την περιστροφή του στερεού με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω βρίσκουμε από τον τύπο

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}\vec{K_1} + \frac{d\theta}{dt}\vec{s_0} + \frac{d\psi}{dt}\vec{K}$$

συντιθέμενη με βάση τις γωνίες Euler, από

(i) μία περιστροφή περί τον άξονα $\vec{K_1}$ με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}\ \left(=\frac{d\phi}{dt}\right)$

(ii) –//– $\vec{s_0}$ $\dot{\theta}$

(iii) –//– $\vec{K}$ $\dot{\psi}$

Στο σωματόδετο σύστημα $Oxyz$

$$\omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{K}$$

— Είναι σημαντικό να καθοριστούν οι εξισώσεις που εκφράζουν τα $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ με τις θ, ϕ, ψ και $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$.

Οι σχέσεις αυτές λέγονται εξισώσεις Euler.

Κινηματικές εξισώσεις Euler.

A. Θεωρούμε στοιχειώδη στροφή περί άξονα Oz_1

↳ Αντιστοιχεί σε μεταφορά της γωνίας ϕ

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Στη συνέχεια θεωρούμε στοιχειώδη στροφή περί του άξονα $O\Delta$ (μεταβολή της θ)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Γ. Στοιχειώδη στροφή ως προς τον άξονα Oz

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΤΟΤΕ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Οι συντεταγμένες στο σωματόδετο σύστημα

Οι συντεταγμένες στο χωρόδετο σύστημα

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ομοίως

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (A_3 A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} = A_1^T A_2^T A_3^T = (A_3 A_2 A_1)^T$$

Στο Σωματίδετο σύστημα

Τότε

$$\omega_x = \sin\psi \sin\theta \frac{d\phi}{dt} + \cos\psi \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega_y = \sin\theta \cos\psi \frac{d\phi}{dt} - \sin\psi \frac{d\theta}{dt}$$

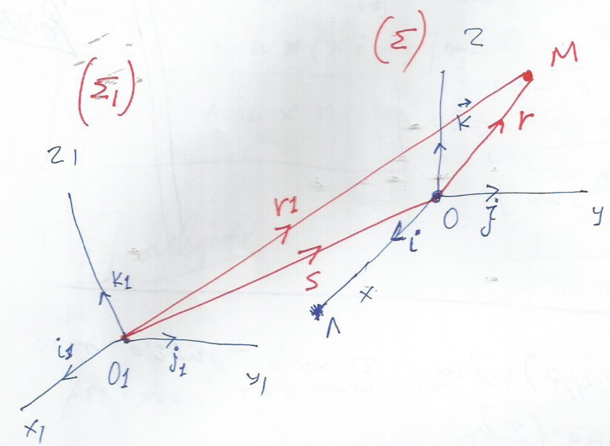
$$\omega_z = \cos\theta \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ EULER

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

2.13 ΑΠΟΛΥΤΗ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΘΕΩΡΗΜΑ Coriolis

Α. Απόλυτη, σχετική και μετοχική ταχύτητα



Θεωρούμε το σύστημα (Σ_1) σταθερό και το σύστημα (Σ) κινητό ως προς το (Σ_1) με ορισμένο νόμο κίνησης

Τότε:

– Μία κίνηση που αναφέρεται στο Σ_1 λέγεται απόλυτη

– Ενώ η ίδια κίνηση στο Σ –"– σχετική

Τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ παρακολουθούν την κίνηση του Σ του οποίου η γωνιακή ταχύτητα προς (Σ_1) είναι $\omega = \omega(t)$. τα

$$i = O\Lambda = r_\Lambda$$

$$\frac{di}{dt} = \dot{r}_\Lambda = v_\Lambda = \omega \times r_\Lambda = \omega \times i \,,$$

Ομοίως $\dfrac{dj}{dt} = \omega \times j$

$$\frac{dk}{dt} = \omega \times k$$

Αν $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ στο κινητό σύστημα (Σ)

τότε

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k}$$

Εξισώσεις Poisson

Ομοίως $\dfrac{d\vec{j}}{dt} = \omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i}$

και $\dfrac{d\vec{k}}{dt} = \omega_y \vec{i} - \omega_x \vec{j}$

(*) Έστω $M(x,y,z)$ ένα τυχαίο σημείο στο κινητό σύστημα (Σ).

Αν $OM = r$

$O_1M = r_1$

$O_1O = s$

τότε θα ισχύουν οι εξής διανυσματικές εξισώσεις

(1) $r_1 = s + r$

(2) $\dot{r}_1 = \dot{s} + x\dot{i} + y\dot{j} + z\dot{k} + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$

(3) $\ddot{r}_1 = \ddot{s} + x\ddot{i} + y\ddot{j} + z\ddot{k} + \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k + 2(\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} + \dot{z}\dot{k})$

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο m πού στο (Σ) έχει τις ίδιες συντεταγμένες με το M, αλλά σε αντίθεση με το M τις διατηρεί αμετάβλητες.

Την ταχύτητα του m στο σταθερό σύστημα (Σ_1) την βρίσκουμε με βάση την (4)

$$U_m = \dot{S} + x\underbrace{\dot{i}}_{\omega \times i} + y\underbrace{\dot{j}}_{\omega \times j} + z\underbrace{\dot{k}}_{\omega \times k}$$

$$= \dot{S} + \omega \times (xi + yj + zK)$$

$$\boxed{U_m = \dot{S} + \omega \times r} \Rightarrow$$ Μετοχική ταχύτητα του Μ (μία από τις συνιστώσες της ταχύτητάς του)

$\boxed{v_\mu}$ συμβολισμός

■ Η μετοχική ταχύτητα του Μ είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου m που συμπίπτει με το Μ την θεωρούμενη στιγμή, δηλαδή, η ταχύτητα με την οποία το Μ μετέχει στην κίνηση του (Σ).

■ Η άλλη συνιστώσα της ταχύτητας $\dot{r}_1 = \frac{dr_1}{dt}$ λέγεται σχετική ταχύτητα του Μ και συμβολίζεται με v_σ.

▶ Η v_σ οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης (x, y, z) του Μ ως προς το (Σ) με τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ = σταθερά.

απόλυτη ταχύτητα $\rightarrow$ $\boxed{v_\alpha = \dot{r}_1 = v_\mu + v_\sigma}$

2.13.2 ΑΠΟΛΥΤΗ, ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ (ή Coriolis) ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Από την (3) βρίσκουμε την μεταφορική επιτάχυνση
(όταν x, y, z = σταθ)

$$\boxed{(3):\quad \gamma_1 = \underbrace{\ddot{s} + x\ddot{i} + y\ddot{j} + z\ddot{k}}_{\gamma_\mu} + \underbrace{\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k}_{\gamma_\sigma} + \underbrace{2(\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} + \dot{z}\dot{k})}_{\gamma_c}}$$

$$\gamma_\mu = \ddot{s} + x\ddot{i} + y\ddot{j} + z\ddot{k}$$

(Αποτελεί την συνιστώσα της επιτάχυνσης με την οποία το Μ μετέχει στην κίνηση του (Σ)).

$$\gamma_\sigma = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k$$

(Αποτελεί την συνιστώσα της επιτάχυνσης που οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης του $M(x, y, z)$ ως προς το (Σ) με σταθερά τα s, i, j, k.)

Από την σχέση (3) βρίσκουμε έναν τρίτο όρο που καλείται συμπληρωματική ή Κοριόλης επιτάχυνση του Μ

$$\gamma_c = 2(\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} + \dot{z}\dot{k})$$

Με βάση τις σχέσεις Poisson η γ_c καταλήγει

$$\gamma_c = 2[\omega \times (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k)] = 2(\omega \times \upsilon_\sigma) \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma_c = 2(\omega \times \upsilon_\sigma)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

2.1 Γενικά

Το απολύτως στερεό σώμα ή "στερεό σώμα" αποτελείται από σύστημα υλικών σημείων των οποίων οι σχετικές αποστάσεις παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης. Ο καθορισμός της κίνησης ενός στερεού σώματος, και επομένως της θέσης του σε κάθε χρονική στιγμή, γίνεται με την χρήση συστήματος αναφοράς, συνήθως καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων Oxyz. Στο σύστημα τούτο καθορίζεται η θέση κάθε σημείου A του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή μέσω της διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{OA} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$. Λαμβανομένου υπόψη ότι στο στερεό σώμα οι αποστάσεις των σημείων μεταξύ τους είναι ορισμένες, αρκεί να γνωρίζουμε σε κάθε χρονική στιγμή τις θέσεις τριών σημείων του A_1, A_2, A_3 που δεν κείνται πάνω στην ίδια ευθεία, ούτως ώστε να καθορίσουμε την θέση του. Επομένως, η θέση του στερεού στον χώρο προσδιορίζεται πλήρως από εννέα (9) παραμέτρους (συντεταγμένες των τριών σημείων). Επειδή όμως μεταξύ των εννέα αυτών συντεταγμένων υφίστανται τρείς (3) σχέσεις, που εκφράζουν την σταθερότητα των αποστάσεων ανά δύο των σημείων $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, δηλαδή

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = (A_1A_2)^2 = \text{σταθ.},$$

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2 = (A_2A_3)^2 = \text{σταθ.},$$

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2 = (A_1A_3)^2 = \text{σταθ.}, \tag{2.1}$$

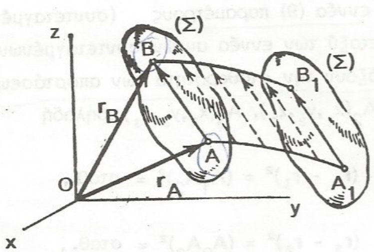
$$\mathbf{r} = (x,y,z),$$

έπεται ότι η θέση του στερεού σώματος καθορίζεται όταν δοθούν έξ (6) μόνο συντεταγμένες ή έξ (6) ανεξάρτητες σχέσεις μεταξύ τους. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι οι τρείς εξισώσεις (2.1) μειώνουν από εννέα σε έξ τις ανεξάρτητες παραμέτρους οι οποίες καθορίζουν την θέση του στερεού στον χώρο. Οι τρείς εξισώσεις (2.1) λέγονται **εξισώσεις συνδέσμων**, ενώ οι έξ ανεξάρτητες δυνατότητες κίνησης που έχει το στερεό λέγονται **βαθμοί ελευθερίας κίνησης.**

2.2 Μεταβατική ή Μεταφορική Κίνηση

Λέμε ότι το σώμα έχει μεταβατική κίνηση, όταν κινείται έτσι ώστε οιοδήποτε διάνυσμά του να διατηρείται ίσο. Κατά την μεταβατική κίνηση ευθεία γραμμή του σώματος παραμένει συνεχώς παράλληλη προς εαυτή. Η μεταβατική κίνηση δεν πρέπει να συγχέεται με την ευθύγραμμη. Στην πρώτη όλα τα σημεία του σώματος κινούνται σε ίσες τροχιές (καμπύλες ή ευθείες) και έχουν σε κάθε χρονική στιγμή την αυτή ταχύτητα $\mathbf{υ}$ και την αυτή επιτάχυνση $\mathbf{γ}$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε στερεό σώμα Σ (αναφερόμενο σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz) και δύο τυχόντα σημεία του A και B, που οι θέσεις τους σε κάθε χρονική στιγμή t καθορίζονται με τις διανυσματικές ακτίνες $\mathbf{OA} = \mathbf{r}_A$ και $\mathbf{OB} = \mathbf{r}_B$ (Σχ. 2.1). Τότε είναι

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{AB}. \tag{2.2}$$



Σχήμα 2.1: Μεταβατική κίνηση στερεού στον χώρο.

Το μήκος AB είναι σταθερό λόγω του στερεού σώματος, αλλά και η διεύθυνση

ΑΒ είναι σταθερή λόγω της μεταβατικής κίνησης. Έτσι, οι τροχιές των Α και Β είναι οι αυτές και συμπίπτουν όταν τεθεί η μία πάνω στην άλλη. Από τις εξισώσεις (2.2) παίρνουμε

$$\upsilon_B = \dot{r}_B = \dot{r}_A = \upsilon_A \ , \quad \gamma_B = \dot{\upsilon}_B = \dot{\upsilon}_A = \gamma_A . \qquad (2.3)$$

Καθώς τα Α και Β είναι τυχόντα σημεία προκύπτει ότι οι τροχιές, ταχύτητες και επιταχύνσεις όλων των σημείων του σώματος είναι οι ίδιες σε κάθε χρονική στιγμή. Επομένως, η μεταβατική κίνηση του στερεού σώματος καθορίζεται πλήρως με την κίνηση ενός υλικού σημείου. Η κοινή ταχύτητα **υ** και επιτάχυνση **γ** όλων των σημείων του σώματος καλούνται στην μεταβατική κίνηση **μεταβατική ταχύτητα** και **μεταβατική επιτάχυνση** αντίστοιχα.

2.3 Περιστροφική Κίνηση

Αν δύο σημεία B_1 και B_2 του στερεού σώματος του σχήματος 2.2 παραμένουν ακίνητα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, η κίνηση λέγεται ως προς το σύστημα τούτο περιστροφική περί την ευθεία γραμμή B_1B_2 (άξονας περιστροφής).

$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \int d\phi = \omega . dt$

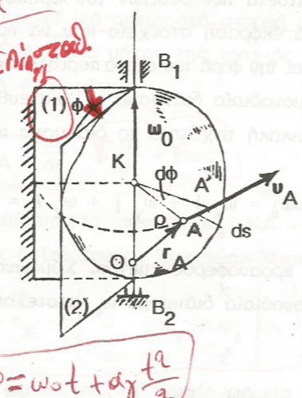
Επιταχ.

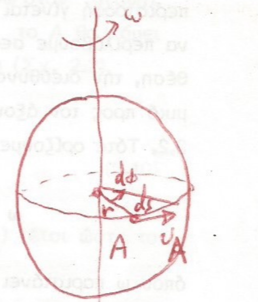
$\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \gamma_{\gamma} . dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \gamma_{\gamma} dt$

$\omega - \omega_0 = \gamma_{\gamma} t$

$\boxed{\omega = \omega_0 + \gamma_{\gamma} t}$

$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \boxed{d\phi = \omega . dt} \Rightarrow \boxed{\phi = \omega_0 t + \gamma_{\gamma} \frac{t^2}{2}}$





$\upsilon_A = \frac{ds}{dt} = \frac{r . d\phi}{dt} = r . \omega$

$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Σχήμα 2.2: Περιστροφική κίνηση στερεού περί άξονα.

Αφού η απόσταση δύο σημείων του στερεού δεν μεταβάλλεται, είναι προφανές ότι στην περιστροφική κίνηση όλα τα σημεία του άξονα περιστροφής είναι ακίνητα, ενώ η τροχιά κάθε άλλου από τα υπόλοιπα σημεία είναι περιφέρεια κύκλου, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα και το κέντρο K κείται πάνω σ΄ αυτόν. Θα εξετάσουμε πρώτα την κίνηση του σώματος ως συνόλου και ύστερα την κίνηση καθενός σημείου του.

Γιά να καθορίσουμε την θέση ενός περιστρεφόμενου σώματος θεωρούμε δύο επίπεδα διερχόμενα από τον άξονα περιστροφής, το επίπεδο (1) που είναι σταθερό, και το επίπεδο (2) που περνάει από το σώμα και περιστρέφεται μαζί του. Η θέση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται πλήρως με την προσημασμένη γωνία ϕ των δύο επιπέδων, που λέγεται **γωνία περιστροφής** του σώματος και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου από την σχέση

$$\phi = \phi(t) \,. \tag{2.4}$$

Καλούμε μέτρο της γωνιακής ταχύτητας την χρονική στιγμή t τον λόγο

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \,. \tag{2.5}$$

Το πρόσημο της ω καθορίζει την διεύθυνση της περιστροφής και είναι $\omega > 0$ όταν, γιά παρατηρητή πάνω στον άξονα B_1B_2 και παρατηρούντα από το B_1, η περιστροφή γίνεται αντίθετα των δεικτών του ωρολογίου (δεξιόστροφη φορά). Γιά να περιλάβουμε σε μιά έκφραση στοιχείο που να προσδιορίζει συγχρόνως την θέση, την διεύθυνση και την φορά του άξονα περιστροφής, εισάγουμε το συγγραμμικό προς τον άξονα μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}_0$, κατευθυνόμενο όπως στο σχήμα 2.2. Τότε ορίζουμε γωνιακή ταχύτητα το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \tag{2.6}$$

όπου ω παριστάνει το προαναφερθέν μέτρο. Σύμφωνα με τα παραπάνω η φορά της στροφής και το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}_0$ αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\boldsymbol{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{\omega}_0 = \varepsilon\,\boldsymbol{\omega}_0 \tag{2.7}$$

καλείται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος την χρονική στιγμή t. Το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\varepsilon}$ δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\gamma = \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}.} \tag{2.8}$$

Αν η γωνιακή ταχύτητα αυξάνει, η περιστροφή είναι επιταχυνόμενη· άλλως, είναι επιβραδυνόμενη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η περιστροφή είναι επιταχυνόμενη όταν τα ε και ω είναι ομόσημα και επιβραδυνόμενη όταν είναι ετερόσημα. Αν ω = σταθ., η περιστροφική κίνηση λέγεται **ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη.** Έστω τώρα ότι με ε = σταθερό έχουμε γιά

$$t = 0\,, \quad \phi = 0 \quad \text{και} \quad \omega = \omega_0$$

(ω_0 παριστάνει την αρχική γωνιακή ταχύτητα). Τότε, αντί των (2.8), παίρνουμε

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon\, dt \;\rightarrow\; \omega = \omega_0 + \varepsilon t \;\rightarrow\; \boxed{\phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}}\,. \tag{2.9}$$

Αν ω > 0 η περιστροφή είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, άλλως ομοιόμορφα επιβραδυνόμενη.

Κατά την περιστροφή του σώματος το τυχόν σημείο Α διατηρεί σταθερή απόσταση από τον άξονα περιστροφής και διαγράφει πάνω σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα περιφέρεια κύκλου ακτίνας ρ και κέντρου Κ (πάνω στον άξονα). Αν στον χρόνο dt το σώμα εκτελεί μιά απειροστή στροφή dφ, το Α θα κάμει απειροστή μετακίνηση ds = ρ dφ κατά μήκος της τροχιάς του (Σχ. 2.2). Η ταχύτητα $\mathbf{\upsilon}_A$ του σημείου Α έχει μέτρο

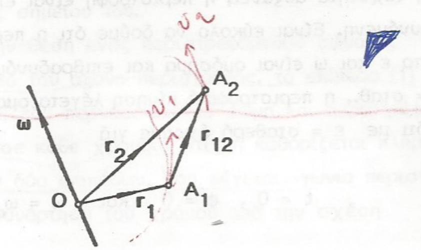
$$\boxed{\upsilon = \omega r} \qquad \boxed{\upsilon_A = \frac{ds}{dt} = \rho\,\frac{d\phi}{dt} = \rho\omega}\,, \tag{2.10}$$

ενώ η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο ($\boldsymbol{\omega}_0$, KA = ρ_A) έτσι ώστε το σύστημα ($\boldsymbol{\omega}_0$, ρ_A, $\boldsymbol{\upsilon}_A$) να είναι δεξιόστροφο. Συνεπώς, θέτουμε

$$\vec{\mathbf{\upsilon}}_A = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}\,, \tag{2.11}$$

όπου $\mathbf{r}_A$ είναι η διανυσματική ακτίνα από το τυχαίο σημείο Ο του άξονα B_1B_2 και x, y, z παριστούν τις συντεταγμένες του Α στο απόλυτο σύστημα αναφοράς Oxyz. Η ταχύτητα $\mathbf{\upsilon}_A$ λέγεται **γραμμική** ή **κυκλική** ταχύτητα του Α. Η εξίσωση (2.11) καθορίζει την ταχύτητα του σημείου Α ως την στατική ροπή προς αυτό της **ω.**

Ας είναι τώρα δύο σημεία A_1 και A_2 του περιστρεφόμενου περί άξονα στερεού με γωνιακή ταχύτητα ω (Σχ. 2.3). Οι ταχύτητες υ_1 και υ_2 των δύο σημείων, σύμφωνα με την (2.11) και το σχήμα 2.3, είναι



Σχήμα 2.3: Συσχετισμός δύο υλικών σημείων του εκ περιστροφής στερεού περί άξονα.

$$\vec{\upsilon}_1 = \omega \times r_1 \ , \quad \vec{\upsilon}_2 = \omega \times r_2 \tag{2.12}$$

και συνεπώς δι΄ αφαιρέσεως κατά μέλη

$$\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \omega \times r_{12} \tag{2.13}$$

$\vec r_2 - \vec r_1$

$\vec r_{12} = \vec r_2 - \vec r_1$

ή ισοδύναμα

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \vec{\omega} \times r_{12} \ , \quad r_{12} = r_2 - r_1 \ . \tag{2.14}$$

Από την σχέση (2.13) βλέπουμε ότι η διαφορά των ταχυτήτων δεν εξάρταται από την ορισμένη θέση του άξονα περιστροφής, αλλά μόνο από το ελεύθερο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας ω. Λαμβανομένου τώρα υπ΄ όψη ότι η ω είναι η αυτή γιά όλα τα σημεία του σώματος σε μιά χρονική στιγμή t, προκύπτει, με βάση την (2.10), ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου είναι ανάλογο προς την απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή

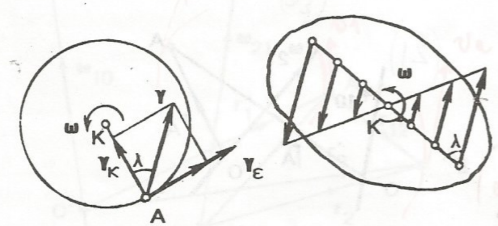
$$\upsilon_1 = \rho_1 \omega \ , \quad \upsilon_2 = \rho_2 \omega \ \rightarrow \ \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \ . \tag{2.15}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Α καθορίζεται με βάση τις σχέσεις (1.20), (1.20α) και (2.10) ως εξής:

$$\gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon}_A = \rho\dot{\omega} = \rho\varepsilon , \quad \gamma_K = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\rho^2\omega^2}{\rho} = \rho\omega^2 , \tag{2.16}$$

$$\gamma = \rho\,(\,\varepsilon^2 + \omega^4\,)^{\frac{1}{2}} ,$$

όπου γ_ε είναι η εφαπτόμενη στην τροχιά επιτάχυνση (κατά την διεύθυνση της περιστροφής γιά επιταχυνόμενη κίνηση και αντίστροφα γιά επιβραδυνόμενη), η δε γ_K είναι η κάθετη επιτάχυνση διευθυνόμενη πάντοτε κατά μήκος της ακτίνας ρ προς τον άξονα περιστροφής (Σχ. 2.4).



Σχήμα 2.4: Εφαπτομενική και κάθετη επιτάχυνση σημείου περιστρεφόμενου στερεού σώματος περί άξονα.

Η κλίση τώρα του διανύσματος **γ** προς την ακτίνα ρ της περιφέρειας που διαγράφει το Α καθορίζεται μέσω της γωνίας

$$\lambda = \text{arc tan}\,\frac{|\gamma_\varepsilon|}{\gamma_K} , \tag{2.17}$$

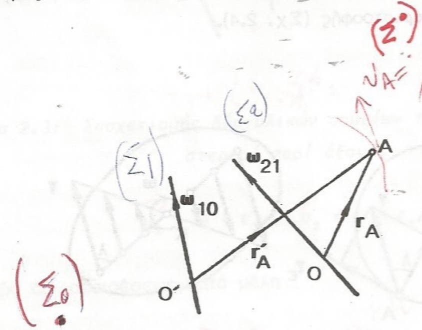
ή, βάσει των (2.16)

$$\lambda = \text{arc tan}\,\frac{|\varepsilon|}{\omega^2} . \tag{2.18}$$

Επειδή σε κάθε χρονική στιγμή τα ε και ω είναι τα αυτά γιά όλα τα σημεία του σώματος, από τις (2.16) και (2.17) προκύπτει ότι οι επιταχύνσεις όλων των σημείων του περιστρεφόμενου σώματος είναι ανάλογοι προς τις αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής και σχηματίζουν γωνία ίση προς λ με τις ακτίνες των διαγραφόμενων από αυτά περιφερειών.

2.4 Σύνθεση Περιστροφών

Θεωρήσουμε στερεό σώμα Σ_2 περιστρεφόμενο ως προς άλλο Σ_1 περί άξονα Γ με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_{21}$, και το σώμα Σ_1 συμπαρασύρον και το Σ_2 και τον άξονα Γ περιστρεφόμενο συγχρόνως ως προς το σταθερό σώμα Σ_0 (σύστημα αναφοράς) περί τον άξονα Γ΄ με μιά μετοχική γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_{10}$ (Σχ. 2.5).



Σχήμα 2.5: Σύνθεση περιστροφών.

Ζητούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα **υ** τυχόντος σημείου Α του στερεού Σ_2 ως προς το σταθερό στερεό Σ_0. Αν υπήρχε μόνο η περιστροφική κίνηση του Σ_2, η ταχύτητα του Α θα ήταν

$$\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_A ,$$

αν ~~δε~~ υπήρχε μόνο η δεύτερη κίνηση, δηλαδή η περιστροφή του Σ_1 (μαζί με το Σ_2 και τον άξονα Γ) ως προς το σταθερό σώμα Σ_0 (έπαυε η σχετική κίνηση ως προς το Σ_1), η ταχύτητα του Α θα ήταν

$$\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}'_A .$$

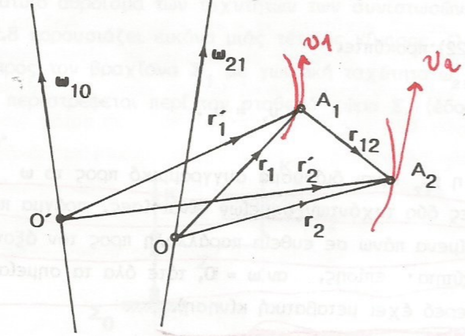
Επειδή όμως οι συνιστώσες ταχύτητες των σημείων αθροίζονται διανυσματικά, η ολική ταχύτητα **υ** του Α ως προς το Σ_0 είναι

$$\upsilon_A = \omega_{21} \times r_A + \omega_{10} \times r'_A. \tag{2.19}$$

Γιά δύο σημεία A_1, A_2 (Σχ. 2.6) προφανώς ισχύουν

πανταχού στο στερεό

$$\upsilon_1 = \omega_{21} \times r_1 + \omega_{10} \times r'_1,$$
$$\upsilon_2 = \omega_{21} \times r_2 + \omega_{10} \times r'_2. \tag{2.20}$$



Σχήμα 2.6: Συσχετισμός δύο υλικών σημείων στερεού κατά την σύνθεση περιστροφών.

Από την εξίσωση (2.20) συνάγουμε

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = \omega_{21} \times (r_2 - r_1) + \omega_{10} \times (r'_2 - r'_1) = (\omega_{21} + \omega_{10}) \times r_{12}. \tag{2.21}$$

Προκύπτει επομένως ότι η διαφορά ταχυτήτων δύο σημείων είναι ίση με εκείνη που θα προέκυπτε αν το στερεό σώμα Σ_2 περιεστρέφετο περί ένα άξονα με γωνιακή ταχύτητα ίση προς το διανυσματικό άθροισμα $\omega_{21} + \omega_{10}$ των γωνιακών ταχυτήτων των συνιστωσών περιστροφών.

Γενικώτερα, γιά κ συνεχείς περιστροφές του σώματος Σ_κ προς $\Sigma_{\kappa-1}$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\kappa,\kappa-1}$, του $\Sigma_{\kappa-1}$ προς το $\Sigma_{\kappa-2}$ με $\omega_{\kappa-1,\kappa-2}$, . . . , και του Σ_1

προς το Σ_0 με ω_{10}, παίρνουμε

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = \omega \times r_{12} \tag{2.22}$$

όπου

$$\omega = \omega_{10} + \omega_{21} + \omega_{32} + \ldots + \omega_{\kappa,\kappa-1}. \tag{2.23}$$

Το ελεύθερο διάνυσμα ω λέγεται γωνιακή ταχύτητα του στερεού Σ_κ. Παρατηρούμε ότι αν ισχύει

$$\omega \times r_{12} = 0,$$

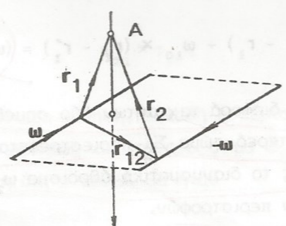
τότε από την (2.22) προκύπτει

$$\upsilon_1 = \upsilon_2. \tag{2.24}$$

Επομένως, όταν η r_{12} είναι διάνυσμα συγγραμμικό προς το ω ή όταν ω = 0, τότε οι ταχύτητες δύο τυχόντων σημείων είναι ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία τα κείμενα πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής έχουν την ίδια ταχύτητα· επίσης, αν ω = 0, τότε όλα τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα (το στερεό έχει μεταβατική κίνηση).

2.5 Επίπεδο Ζεύγος Περιστροφών

Περιστροφές ίσης έντασης και αντίρροπες, ω και - ω, περί άξονες παράλληλους αποτελούν το επίπεδο ζεύγος περιστροφών (Σχ. 2.7).



Σχήμα 2.7: Επίπεδο ζεύγος περιστροφών.

κινήσεων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο εν λόγω δίσκος θα παραμένει παράλληλος προς την αρχική του θέση. Το τμήμα λ.χ. (ΑΒ) θα βρεθεί στην θέση (Α΄΄Β΄΄) κινούμενο διαρκώς προς παράλληλη θέση.

2.6 Σύνθεση Περιστροφών περί Τεμνόμενους ΄Αξονες

Θεωρήσουμε δύο περιστροφές περί άξονες που τέμνονται στο σημείο Ο, με γωνιακές ταχύτητες $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ αντίστοιχα. Γιά κάθε σημείο Α του στερεού η ταχύτητα προκύπτει

$$\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OA} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{OA} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{OA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA}. \tag{2.26}$$

Επομένως, η συνισταμένη κίνηση είναι περιστροφική περί άξονα διερχόμενο από το Ο με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι περιστροφικές κινήσεις συντίθενται ως ολισθαίνοντα διανύσματα (που σημαίνει ότι γενικά η περιστροφική κίνηση είναι ολισθαίνον διάνυσμα καθοριζόμενο πλήρως από τον άξονα και την πάνω σ΄ αυτόν γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$). ΄Ετσι, κάθε σύνθεση ή ανάλυση περιστροφών γίνεται όπως η σύνθεση ή ανάλυση των ολισθαινόντων διανυσμάτων (π.χ., η ανάλυση μιάς περιστροφής κατά τρείς μη συνεπίπεδους άξονες που συναντώνται σε σημείο του άξονα περιστροφής, ή η ανάλυση μιάς περιστροφής κατά δύο συνεπίπεδες ευθείες τεμνόμενες σε σημείο του άξονα).

2.7 Η Κίνηση Στερεού ως Σύνθεση μιάς Μεταφοράς και μιάς Περιστροφής

΄Οπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, η θέση ενός στερεού σώματος στον χώρο των τριών διαστάσεων ορίζεται πλήρως από τις θέσεις τριών σημείων του που δεν κείνται πάνω στην ίδια ευθεία· επομένως, και η κίνηση του στερεού καθορίζεται από την κίνηση των σημείων του. Θεωρήσουμε τώρα στερεό σώμα και τρία σημεία του Ο, A_1, A_2 των οποίων οι ταχύτητες είναι $\boldsymbol{\upsilon}_0$, $\boldsymbol{\upsilon}_1$, $\boldsymbol{\upsilon}_2$. ΄Εστω, ακόμη, ότι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι $\boldsymbol{\omega}$. Θεωρούμε το σημείο Ο ως σημείο αναφοράς (σημείο συσχέτισης)· με βάση τις σχέσεις (2.13) και (2.14) γιά τα σημεία A_1 και A_2 έχουμε

$$\boldsymbol{\upsilon}_1 - \boldsymbol{\upsilon}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{01} \rightarrow \boldsymbol{\upsilon}_1 = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{01}, \tag{2.27}$$

$$\upsilon_2 - \upsilon_0 = \omega \times r_{02} \rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_0 + \omega \times r_{02}. \qquad (2.28)$$

Λόγω, όμως, της σταθερής απόστασης των A_1, A_2 από το O και αφού το σώμα είναι απολύτως στερεό ισχύουν

$$(r_1 - r_0)^2 = \text{σταθ.}, \qquad (2.29)$$

$$(r_2 - r_0)^2 = \text{σταθ.} \qquad (2.30)$$

Παραγωγίζοντας τις τελευταίες εξισώσεις προς t ευρίσκουμε:

$$2\,(r_1 - r_0) \cdot (\dot{r}_1 - \dot{r}_0) = 0 \rightarrow (\upsilon_1 - \upsilon_0) \cdot r_{01} = 0, \qquad (2.31)$$

$$2\,(r_2 - r_0) \cdot (\dot{r}_2 - \dot{r}_0) = 0 \rightarrow (\upsilon_2 - \upsilon_0) \cdot r_{02} = 0. \qquad (2.32)$$

Από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) συνάγεται ότι τα διανύσματα $(\upsilon_1 - \upsilon_0)$ και $(\upsilon_2 - \upsilon_0)$ είναι κάθετα στα επίπεδα των (ω, r_{01}) και (ω, r_{02}) αντίστοιχα. Από την άλλη μεριά, οι σχέσεις (2.31) και (2.32) υπαγορεύουν την συνθήκη ότι τα διανύσματα $(\upsilon_1 - \upsilon_0)$ και $(\upsilon_2 - \upsilon_0)$ είναι κάθετα προς τα r_{01} και r_{02} αντίστοιχα. Τα δύο παραπάνω συμπεράσματα οδηγούν στις εξισώσεις

$$(\upsilon_1 - \upsilon_0) \cdot \omega = 0, \qquad (2.33)$$

$$(\upsilon_2 - \upsilon_0) \cdot \omega = 0. \qquad (2.34)$$

Εξ άλλου, από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) δι΄ αφαιρέσεως κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση

$$(\upsilon_2 - \upsilon_1) = \omega \times (r_{02} - r_{01}) = \omega \times r_{12} \qquad (2.35)$$

Οι (2.33) και (2.34) προσδιορίζουν την κατεύθυνση του διανύσματος ω, που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τις αιχμές των διανυσμάτων υ_0, υ_1, υ_2 ενώ η εξίσωση (2.27) ή (2.28) καθορίζει την αλγεβρική τιμή του διανύσματος ω. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο το ω καθορίζεται πλήρως. Γιά το τυχαίο σημείο Α του σώματος, με σημείο αναφοράς το O, ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\upsilon_A - \upsilon_O = \omega \times r_{OA} \Longrightarrow \upsilon_A = \upsilon_O + \omega \times r_{OA}. \tag{2.36}$$

Συνεπώς, μετά τον καθορισμό του ω, η εξίσωση (2.36) καθορίζει ότι η κίνηση κάθε σημείου A του στερεού σώματος συντίθεται από μιά μεταφορά με ταχύτητα υ_O και μιά περιστροφή περί άξονα διερχόμενο από το σημείο O με γωνιακή ταχύτητα ω. Γιά ένα άλλο σημείο αναφοράς με την υπόθεση ότι η ω γίνεται ω' θα είχαμε

$$\upsilon_A - \upsilon_{O'} = \omega' \times r_{O'A}. \tag{2.37}$$

Ισχύει όμως ως προς το O

$$\upsilon_{O'} = \upsilon_O + \omega \times r_{OO'} \tag{2.38}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2.36) και (2.38) ευρίσκουμε

$$\upsilon_A - \upsilon_{O'} = \omega \times (r_{OA} - r_{OO'}) = \omega \times r_{O'A}. \tag{2.39}$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των (2.37) και (2.39) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\omega' = \omega, \tag{2.40}$$

δηλαδή ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι η αυτή γιά οποιοδήποτε σημείο αναφοράς. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει τελικά ότι η κίνηση στερεού σώματος στον χώρο των τριών διαστάσεων συντίθενται από μιά μεταβατική κίνηση (μεταφορά) με ταχύτητα αυτή του εκλεγέντος σημείου αναφοράς, και μιά περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από το σημείο αυτό με ορισμένη γωνιακή ταχύτητα ω. Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα αποτελεί πόρισμα γενικώτερου θεωρήματος του Euler, που θα δούμε παρακάτω, και φέρεται αποδιδόμενο στον Chasles.

2.8 Κεντρικός Άξονας της Κίνησης Στερεού

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας ω είναι το αυτό γιά οποιοδήποτε σημείο αναφοράς. Θα δείξουμε

Εξ άλλου, το διάνυσμα $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}_{A\Delta})$ βάσει τής $\boldsymbol{\upsilon}_{A\Delta}$ όπως έχει ορισθεί στο σχήμα 2.12, είναι κάθετο προς το $\boldsymbol{\gamma}_{A\Delta_\varepsilon}$ και επομένως κείται πάντοτε επί της (ΑΔ). Συμβολίζουμε τούτο με $\boldsymbol{\gamma}_{A\Delta_K}$ και το καλούμε **κάθετη επιτάχυνση.** Το μέτρο του είναι

$$\gamma_{A\Delta_K} = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}_{A\Delta}| = |\boldsymbol{\omega} \times \omega\,(A\Delta)\,\boldsymbol{\varepsilon}_0| = \omega^2\,(A\Delta)\,, \tag{2.56}$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο κάθετο προς την (ΑΔ) διάνυσμα. Έτσι ο τύπος (2.54) γράφεται

$$\boldsymbol{\gamma}_\Delta = \boldsymbol{\gamma}_A + \boldsymbol{\gamma}_{A\Delta}\,, \quad \boldsymbol{\gamma}_{A\Delta} = \boldsymbol{\gamma}_{A\Delta_\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}_{A\Delta_K} \tag{2.57}$$

όπου

$$\gamma_{A\Delta_\varepsilon} = (A\Delta)\,\varepsilon\,, \quad \gamma_{A\Delta_K} = \omega^2\,(A\Delta)\,.$$

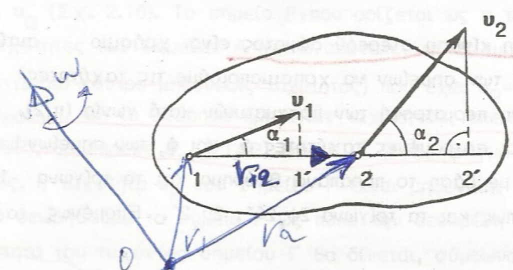
Είναι τώρα σαφές ότι το μέτρο της επιτάχυνσης $\gamma_{A\Delta}$ προκύπτει

$$\gamma_{A\Delta} = (A\Delta)\,(\varepsilon^2 + \omega^4)^{\frac{1}{2}} \tag{2.57α}$$

που συμπίπτει με την τρίτη των σχέσεων (2.16).

2.9.2 Το θεώρημα προβολών ταχυτήτων. Ορθές ταχύτητες

Θα αποδείξουμε ότι οι προβολές των ταχυτήτων δύο σημείων της τομής (Τ) ενός στερεού πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά είναι ίσες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα σημεία 1 και 2 μιάς επίπεδης τομής του στερεού (Σχ. 2.14)



Σχήμα 2.14: Ταχύτητες δύο σημείων επίπεδης τομής στερεού.

$\vec{\upsilon_2} - \vec{\upsilon_1} = \vec{\omega} \times \vec{r_{12}}$

$(\upsilon_2 - \upsilon_1) \cdot r_{12} = (\omega \times r_{12}) \cdot r_{12}$

Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της (2.13) εσωτερικά με r_{12}, ευρίσκουμε

$$\upsilon_2 \cdot r_{12} = \upsilon_1 \cdot r_{12} = (11') = (22') \tag{2.58}$$

ή, ισοδύναμα,

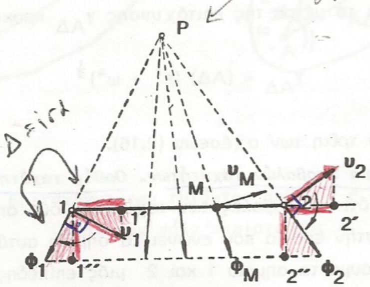
$$\boxed{\upsilon_1 \cos\alpha_1 = \upsilon_2 \cos\alpha_2 .} \tag{2.58α}$$

Με το θεώρημα αυτό μπορούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος αν η διεύθυνση της κίνησης του σημείου αυτού και η ταχύτητα ενός άλλου σημείου είναι γνωστές.

Γιά την γραφική λύση προβλημάτων κίνησης γίνεται συνήθως χρήση της λεγόμενης "ορθής" ή "κάθετης" ταχύτητας (Σχ. 2.15).

ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

στιγμιαίο κέντρο περιστροφής



Σχήμα 2.15: Ορθές ή κάθετες ταχύτητες.

Έτσι, κατά την επίπεδη κίνηση στερεού σώματος είναι χρήσιμο αντί των πραγματικών ταχυτήτων των σημείων να χρησιμοποιούμε τις ταχύτητες που προέρχονται με ομόφορη περιστροφή των πραγματικών κατά γωνία (π/2). Στο σχήμα 2.15 φαίνονται οι εστραμένες ταχύτητες ϕ_1 και ϕ_2 των σημείων 1 και 2. Εύκολα αποδεικνύεται, με βάση το παραπάνω θεώρημα, ότι τα τρίγωνα $1\phi_1 1''$ και $1\upsilon_1 1'$ είναι ίσα, όπως και τα τρίγωνα $2\phi_2 2''$, $2\upsilon_2 2'$. Επομένως ισχύουν οι ισότητες

$$(11'') = (11') , \quad (22'') = (22') . \Rightarrow 11'' = 22'' \Rightarrow$$

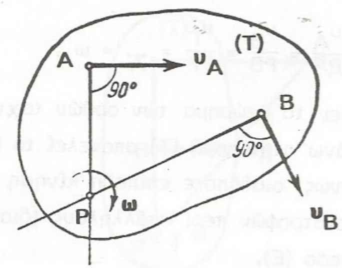
Όχημα από Θ. ορθών ταχ.: $11' = 22'$

$\Rightarrow \phi_1 \phi_2 // 12$

Από την παρατήρηση αυτή συνάγεται ότι η ευθεία $\phi_1\phi_2$ είναι παράλληλη προς την (12). Το σημείο τομής P των $1\phi_1$ και $2\phi_2$, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, είναι το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής και επίσης το τυχόν σημείο M της (12) έχει ταχύτητα την υ_M.

2.9.3 Η επίπεδη κίνηση ως διαδοχή περιστροφών περί επάλληλους στιγμιαίους άξονας. Κέντρο μηδενικής ταχύτητας

Σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχει πάνω στην τομή (T) ένα σημείο (P) ακίνητο, που καλείται "στιγμιαίο κέντρο περιστροφής" ή "κέντρο μηδενικής ταχύτητας" ή μονολεκτικά "πόλος".



Σχήμα 2.16: Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ή κέντρο μηδενικής ταχύτητας.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο σημεία A και B της επίπεδης τομής (T) του στερεού, τα οποία στην χρονική στιγμή t έχουν τις μη παράλληλες ταχύτητες υ_A και υ_B (Σχ. 2.16). Το σημείο P, που ορίζεται ως η τομή των καθέτων πάνω στις ταχύτητες των σημείων A και B, αποτελεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (στιγμιαίο κέντρο μηδενικής ταχύτητας) που έχει $\upsilon_P=0$. Έστω $\upsilon_P \neq 0$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα προβολών ταχυτήτων, επειδή $\upsilon_A \perp (AP)$ και $\upsilon_B \perp (BP)$, θα έπρεπε $\upsilon_P \perp (AP)$ και $\upsilon_P \perp (BP)$, πράγμα που είναι αδύνατον. Συνεπώς, η ταχύτητα υ_P του σημείου P είναι μηδενική.

Αν θεωρήσουμε το σημείο P ως πόλο την δεδομένη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα του τυχόντος σημείου Γ θα δίνεται, σύμφωνα με τον τύπο (2. 51), από

$$\gamma_O = \gamma_A - \gamma_{AO} = 0 \tag{2.66}$$

Έτσι, αν το σημείο Ο ληφθεί ως σημείο αναφοράς, τότε $\gamma_O = 0$ και η επιτάχυνση κάθε άλλου σημείου Δ της διατομής του στερεού προκύπτει

$$\gamma_\Delta = \gamma_O + \gamma_{O\Delta} = 0 + \gamma_{O\Delta} = \gamma_{O\Delta}$$

με μέτρο

$$\gamma_{O\Delta} = (O\Delta)\,(\varepsilon^2 + \omega^4)^{\frac{1}{2}} \,.$$

2.10 Η Μέθοδος των Ορθών Ταχυτήτων γιά τον Κινηματικό Έλεγχο της Χαλαρότητας - Στερεότητας Επιπέδων Φορέων

Την κινηματική μέθοδο, που βασίζεται στην έννοια της "κινηματικής αλύσου", χρησιμοποιούμε γιά την διακρίβωση της γεωμετρικής αοριστίας επίπεδου σχηματισμού.

Κινηματική άλυσος είναι ο επίπεδος σχηματισμός, γεωμετρικά παραμορφώσιμος, που προκύπτει από ένα στερεό επίπεδο σχηματισμό μετά από αφαίρεση μιάς απλής δεσμικής ράβδου· επομένως, η κινηματική άλυσος έχει ένα βαθμό ελευθερίας κίνησης, δηλαδή είναι χαλαρός σχηματισμός.

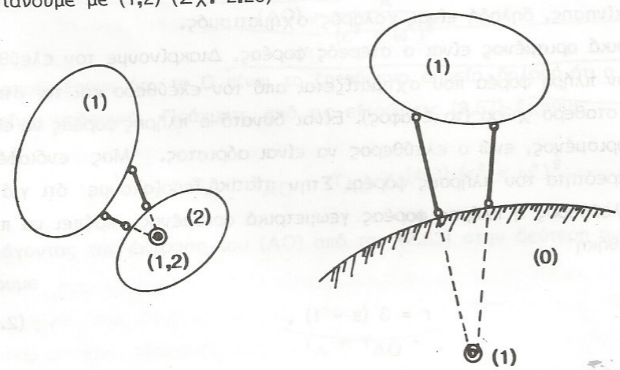
Γεωμετρικά ορισμένος είναι ο στερεός φορέας. Διακρίνουμε τον ελεύθερο φορέα και τον πλήρη φορέα που σχηματίζεται από τον ελεύθερο και τις στηρίξεις με τον σταθερό χώρο (το έδαφος). Είναι δυνατό ο πλήρης φορέας να είναι γεωμετρικά ορισμένος, ενώ ο ελεύθερος να είναι αόριστος. Μας ενδιαφέρει βέβαια η στερεότητα του πλήρους φορέα. Στην στατική ευρίσκουμε ότι γιά να είναι ένας ελεύθερος ή πλήρης φορέας γεωμετρικά ορισμένος, πρέπει να πληρούται η συνθήκη

$$r = 3\,(s - 1)\,, \tag{2.67}$$

όπου r παριστάνει τον αριθμό των δεσμικών ράβδων και s τον αριθμό των δίσκων. Γιά τον πλήρη φορέα στον αριθμό s περιλαμβάνεται και ο δίσκος του εδάφους. Η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή γιά την γεωμετρική στερεότητα του φορέα, γιατί μας εξασφαλίζει από άποψη αριθμητικής επάρκειας των δεσμικών ράβδων αλλά όχι και από άποψη καταλληλότητας διάταξής τους (π.χ. από το ενδεχόμενο της τυχόν σύμπτωσης των διευθύνσεων δύο ράβδων που συνδέουν ένα προστιθέμενο κόμβο). Έτσι, υπάρχουν φορείς όπου η διακρίβωση της γεωμετρικής στερεότητάς τους, παρ' όλο το γεγονός ότι παρουσιάζουν αριθμητική επάρκεια δεσμικών στοιχείων, δεν είναι εποπτικά δυνατή ή δεν είναι δυνατή με ασφάλεια. Στην περίπτωση αυτή προσφεύγουμε στην παρακάτω μέθοδο της κινηματικής αλύσου.

Η κινηματική άλυσος αποτελείται από στερεούς δίσκους συνδεόμενους κατά τέτοιο τρόπο, που επιτρέπει σχετική, έστω απειροστική, γεωμετρική παραμόρφωση. Αν λοιπόν τηρήσουμε τον ένα δίσκο σταθερό και δώσουμε σε κάποιο σημείο ενός άλλου δίσκου της αλύσου μιά μετακίνηση συμβιβαζόμενη με την δυνατότητα σχετικής γεωμετρικής κίνησης των δύο δίσκων, κάθε άλλο σημείο θα εκτελέσει καθορισμένο δρόμο οι δε μεταξύ τους λόγοι των δρόμων αυτών θα είναι σταθεροί (ανεξάρτητοι του μεγέθους των δρόμων). Στο εξής περιοριζόμαστε σε απειροστικές ματακινήσεις και επομένως σε στιγμιαίες σχετικές κινήσεις των μελών της αλύσου, δηλαδή σε σχετικές στροφές των δίσκων της περί **στιγμιαίους** ή **απόλυτους πόλους** των δίσκων.

Δύο δίσκοι (1) και (2) της αλύσου που συνδέονται με δύο δεσμικές ράβδους των οποίων οι διευθύνσεις τέμνονται σε πραγματικό ή ιδεατό σημείο Π (την λεγόμενη άρθρωση), έχουν **σχετικό στιγμιαίο πόλο** το σημείο αυτό Π, που παριστάνουμε με (1,2) (Σχ. 2.20)



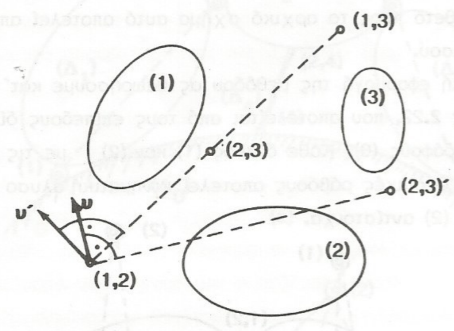
Σχήμα 2.20: Σχετικός στιγμιαίος πόλος περιστροφής δύο δίσκων.

Αν ο ένας δίσκος, π.χ. ο (2) είναι το έδαφος (ακίνητος δίσκος), τότε ο πόλος Π καλείται **απόλυτος πόλος** του δίσκου (1) και παρίσταται με (1) (Σχ. 2.20).

Συνεπώς, ο (1) είναι και ο σχετικός πόλος (1,0) του δίσκου (1) και του εδάφους (0). Στην κινηματική άλυσο η στιγμιαία κίνηση δίσκου στο επίπεδό του είναι στροφή αυτού περί ένα στιγμιαίο πόλο Π. Επομένως, και η σχετική στιγμιαία κίνηση δύο δίσκων είναι η σχετική στροφή αυτών περί τον στιγμιαίο σχετικό τους πόλο. Βέβαια, κατά την στιγμιαία αυτή στροφή ο σχετικός πόλος θεωρείται ως κοινό σημείο των δύο δίσκων.

Την ανεύρεση των σχετικών και απολύτων πόλων των δίσκων μιάς αλύσου διευκολύνει πολύ το θεώρημα των πόλων, σύμφωνα με το οποίο: **Οι σχετικοί πόλοι τριών δίσκων της κινηματικής αλύσου κείνται πάνω σε ευθεία.**

Πράγματι, θεωρούμε τρείς δίσκους (1), (2), (3) της κινηματικής αλύσου και τους τρείς σχετικούς πόλους αυτών (1,2), (1,3) και (2,3)΄ μη κείμενους επ΄ ευθείας (Σχ. 2.21).



Σχήμα 2.21: Σχετικοί πόλοι στροφής τριών δίσκων

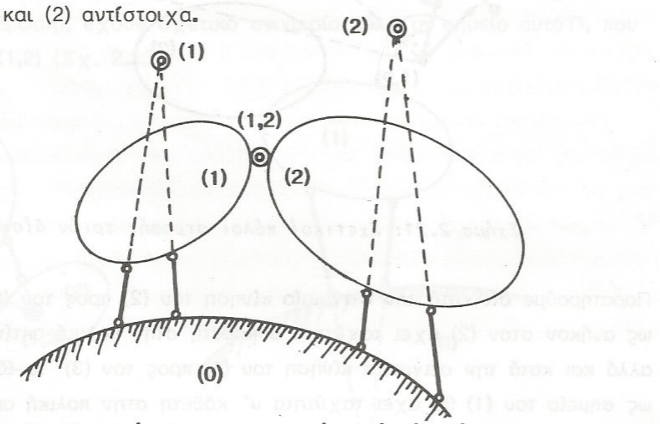
Παρατηρούμε ότι κατά την στιγμιαία κίνηση του (2) προς τον (3) το σημείο (1,2) ως ανήκον στον (2) έχει ταχύτητα **υ** κάθετη στην πολική ακτίνα (1,2) - (2,3)΄ αλλά και κατά την στιγμιαία κίνηση του (1) προς τον (3) το ίδιο σημείο (1,2) ως σημείο του (1) θα έχει ταχύτητα **υ΄** κάθετη στην πολική ακτίνα (1,2)-(1,3). Σύμφωνα όμως με τον ορισμό της κινηματικής αλύσου το σημείο (1,2) θα πρέπει να έχει εντελώς καθορισμένη τροχιά και ταχύτητα και επομένως θα πρέπει οι ταχύτητες **υ** και **υ΄** να συμπέσουν σε μιά και μόνη. Συνεπώς, πρέπει ο (2,3)΄ να κείται πάνω στην ευθεία (1,2) - (1,3). ΄Αρα οι τρείς σχετικοί πόλοι κείνται επ΄ ευθείας.

Μετά τον προσδιορισμό των σχετικών και απολύτων πόλων των δίσκων της κινηματικής αλύσου είναι εύκολο να χαράξουμε τα διαγράμματα ορθών ταχυτήτων με βάση αυτά που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο. Σημειώνουμε ακόμη εδώ, ότι το διάγραμμα ορθών ταχυτήτων των σημείων ενός δίσκου της κινηματικής αλύσου που προκύπτει με ένωση των άκρων των ορθών ταχυτήτων είναι σχήμα όμοιο προς το αρχικό σχήμα των σημείων του δίσκου και ομοιόθετο προς αυτό με κέντρο ομοιοθεσίας τον στιγμιαίο πόλο περιστροφής. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, η εξακρίβωση της τυχόν γεωμετρικής αοριστίας ενός επιπέδου σχηματισμού γίνεται εύκολα ως εξής:

α) Μετά τον καθορισμό των πόλων των δίσκων του φορέα ελέγχουμε αν οι πόλοι τριών δίσκων κείνται πάνω σε ευθεία, πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη κινηματικής αλύσου, ή

β) Κατασκευάζουμε το διάγραμμα των ορθών ταχυτήτων οπότε αν τούτο προκύψει όμοιο και ομοιόθετο προς το αρχικό σχήμα αυτό αποτελεί απόδειξη ύπαρξης κινηματικής αλύσου.

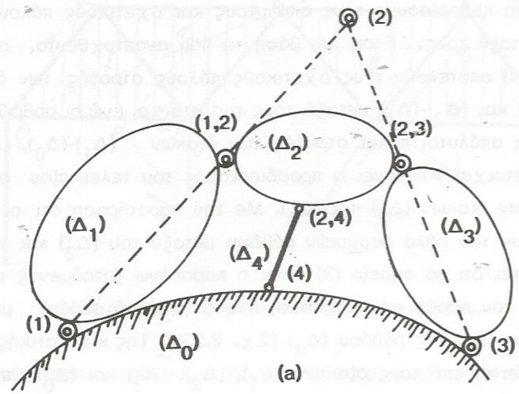
Γιά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου ας θεωρήσουμε κατ΄ αρχή τον φορέα του σχήματος 2.22, που αποτελείται από τους επίπεδους δίσκους (1), (2) και τον δίσκο του εδάφους (0). Κάθε δίσκος (1) και (2) με τις συνδέουσες αυτόν με το έδαφος δεσμικές ράβδους αποτελεί κινηματική άλυσο με απόλυτους πόλους τους (1) και (2) αντίστοιχα.

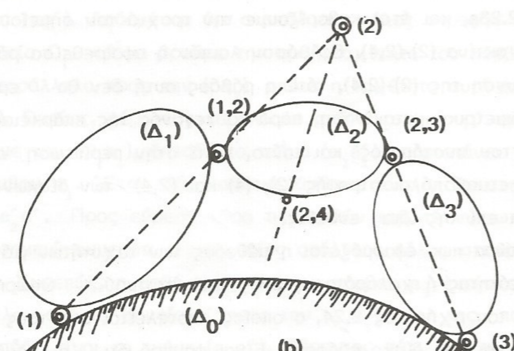


Σχήμα 2.22: Επίπεδος σχηματισμός από δύο δίσκους ανωδομής και τον δίσκο εδάφους.

Αν οι δύο αυτές άλυσοι συνδεθούν με μιά άρθρωση μεταξύ τους που αποτελεί τον σχετικό πόλο (1,2), τότε όλος ο σχηματισμός είναι γεωμετρικά ορισμένος, γιατί οι απόλυτοι πόλοι (1), (2) και ο σχετικός πόλος (1,2) σχηματίζουν τρίγωνο και συνεπώς δεν κείνται επί της αυτής ευθείας. Ο στερεός αυτός σχηματισμός αποτελεί τριαρθρωτό τόξο. Αν οι τρείς παραπάνω πόλοι έκειντο επί της αυτής ευθείας, τότε ο σχηματισμός θα ήταν κινηματική άλυσος (χαλαρός) με δυνατότητα απειροστικής μετακίνησης.

Θεωρήσουμε τώρα το σύνθετο φορέα του σχήματος 2.23a, που αποτελείται από τους τρείς δίσκους ανωδομής (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), τον δίσκο εδάφους (Δ_0) και την δεσμική ράβδο (δίσκο) (Δ_4) που συνδέει τον (Δ_2) με το έδαφος.





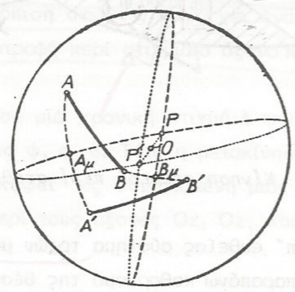
Σχήμα 2.23: (a) *Επίπεδος σχηματισμός από τέσσερεις δίσκους ανωδομής και τον δίσκο εδάφους.*

(b) *Ισοδύναμο σύστημα μετά την αφαίρεση της δεσμικής ράβδου* (Δ_4).

κόμβου b. Κατά τον τρόπον αυτόν, ενώνοντας τις αιχμές των ορθών ταχυτήτων των κόμβων του δίσκου (II) κατασκευάζουμε το ομοιόθετο προς τον δίσκο αυτόν σχήμα $a_2' a_3' b' q'$. Κέντρα ομοιοθεσίας είναι προφανώς τα O_I και O_{II}, όπου συναντώνται προεκτεινόμενες οι ορθές ταχύτητες. Ο λόγος, φυσικά, των αντίστοιχων πλευρών των σχημάτων $O_I a_1' a_2' p'$ και (I) δεν ταυτίζεται προς τον λόγον αντιστοίχων πλευρών των σχημάτων $a_2' a_3' b' q'$ και (II) και, συνεπώς, το όλο σχήμα $O_I a_1' a_2' p' q' b' a_3' a_2'$ δεν είναι όμοιο προς το $O_I a_1 a_2 pqba_3 a_2$. Τούτο σημαίνει το εξής: Αν υποθέσουμε ότι στο αρχικό σχήμα υπήρχε και η ράβδος (pq), τότε, εφ' όσον συνδεθούν δι' ευθείας τα σημεία p' και q', η προκύπτουσα πλευρά (p'q') δεν είναι παράλληλος προς την (pq). Τί θα εσήμαινε όμως αν οι (p'q') και (pq) ήσαν παράλληλοι; Σύμφωνα με τα ήδη αναπτυχθέντα, τούτο θα εσήμαινε ότι η κίνηση των σημείων p και q του φορέα θα ήταν κατά την θεωρούμενη χρονική στιγμή η ίδια ως εάν αυτά ανήκαν σε ένα απολύτως στερεό άξονα. Επομένως η παρεμβολή της στερεάς ράβδου (pq) δεν θα παρεμπόδιζε την μετακίνηση των σημείων p και q, και συνεπώς το όλο δικτύωμα θα ήταν χαλαρό. Εν προκειμένω, όπως ήδη παρατηρούμε, συμβαίνει το αντίθετον. Δηλαδή, οι ταχύτητες των σημείων p και q προβαλλόμενες επί της (pq) δίνουν μεγέθη που διαφέρουν μεταξύ τους και συνεπώς η απόσταση (pq) των σημείων p και q του χαλαρού δικτυώματος μεταβάλλεται κατ' απειροστό της ιδίας τάξης προς τις μεταθέσεις των σημείων. Επομένως, η παρεμβολή στερεάς ράβδου (pq) αίρει την κινητότητα του χαλαρού αρχικά δικτυώματος και δημιουργεί στερεό δικτύωμα. Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε ότι, αν στο αρχικό δικτύωμα δεν υπάρχει η ράβδος (pq), τότε τούτο είναι χαλαρό. Η προσθήκη βέβαια της (pq) παρέχει στερεό δικτύωμα.

2.11 Κίνηση Στερεού Σώματος περί Σταθερό Σημείο

Κατά την κίνηση στερεού συνεχιζόμενη περί σταθερό σημείο O τα σημεία του στερεού διαγράφουν τροχιές επί ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών με κέντρο το O. Κάθε τόξο (AB) μέγιστου κύκλου μιάς τέτοιας σφαιρικής επιφάνειας, που συνδέει σημεία A και B του στερεού, μπορεί να αχθεί γενικά στην νέα του θέση A'B' με περιστροφή περί την διάμετρο PP' (Σχ.2.25), όπου P και P' είναι τα σημεία που συναντώνται οι μέγιστοι κύκλοι, οι οποίοι τέμνουν καθέτως στο μέσον τα τόξα AA' και BB'. Αν παρατηρήσουμε αρκετά μικρές μετακινήσεις του AB από της αρχικής του θέσεως σε θέσεις πολύ κοντινές A'B', A''B'' κλπ., είναι εύκολο να δείξουμε ότι η κίνηση πραγματοποιείται ως μία περιστροφή περί διαδοχικές διαμέτρους ως η PP΄. Επομένως, όσα έχουν ήδη αναφερθεί στην επίπεδη κίνηση του στερεού, μπορεί κατ΄ επέκταση να επαναληφθούν και εδώ με την προσήκουσα αντιστοιχία εννοιών. Δηλαδή, όπως στην επίπεδη κίνηση όλα τα σημεία του στερεού κινούνται επί τροχιών παραλλήλων προς δοθέν επίπεδο, έτσι και τώρα όλα τα σημεία του στερεού κινούνται επί τροχιών παραλλήλων προς κάποια σφαίρα κέντρου Ο. Επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας αυτής μπορούμε να χαράξουμε την σταθερή και την κινητή πολική τροχιά. Επίσης, μπορούμε να νοήσουμε την κίνηση ως κύλιση μιάς κινητής μαζί με το στερεό επιφάνειας επί μιάς άλλης σταθεράς με κοινή γενέτειρα τον άξονα PP΄.

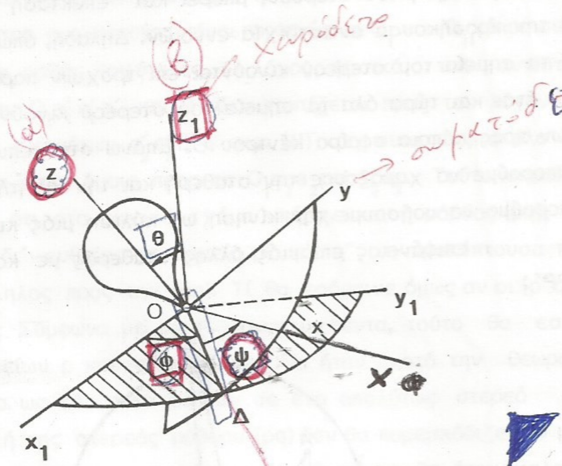


Σχήμα 2.25: Αλλαγή θέσης σημείων στερεού κατά την περιστροφή του περί σταθερό σημείο.

Με βάση την παραπάνω γεωμετρική παρουσίαση κίνησης του στερεού, γιά να προσδιορίσουμε την θέση του κατά την κίνηση του περί σταθερό σημείο Ο, θεωρούμε τρισορθογώνιο σύστημα Oxyz με αρχή το σημείο τούτο και στερεά συνδεδεμένο με το κινούμενο σώμα (Σχ. 2.26). Την κίνηση του σώματος και του μαζί με αυτό συνδεδεμένου όπως προηγούμενα συστήματος (σωματόδετο σύστημα) αναφέρουμε σε σταθερό τρισορθογώνιο σύστημα $Ox_1y_1z_1$ (χωρόδετο σύστημα). Την θέση του σώματος καθορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα **i, j, k** του Oxyz, δηλαδή τα εννέα διευθύνοντα συνημίτονα τούτων με τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ του χωρόδετου συστήματος. Λαμβανομένου όμως υπ΄όψη ότι ισχύουν έξ ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους τα συνημίτονα αυτά, παραμένουν τρείς ανεξάρτητες παράμετροι γιά τον καθορισμό της θέσης του σώματος, πράγμα που σημαίνει ότι τούτο έχει τρείς βαθμούς ελευθερίας κίνησης περί σταθερό σημείο.

περί z_1

ϕ, θ, ψ



ϕ: περιστροφή περί Oz_1

ψ: " Oz

θ: " $O\Delta$

Σχήμα 2.26: Κίνηση στερεού περί σταθερό σημείο.

Ο Euler εισήγαγε απ΄ ευθείας σύστημα τριών μόνον παραμέτρων, των "γωνιών Euler" γιά τον παραπάνω καθορισμό της θέσης του σώματος. Ας καλέσουμε ΟΔ (με μοναδιαίο διάνυσμα s_0) την τομή των επιπέδων Oxy και Ox_1y_1. Η θέση του τριέδρου Oxyz και επομένως του σώματος ως προς το σταθερό σύστημα $Ox_1y_1z_1$ καθορίζεται με τις γωνίες:

$$\phi = \sphericalangle \Delta O x_1 , \quad \psi = \sphericalangle x O \Delta , \quad \theta = \sphericalangle z_1 O z ,$$

που καλούνται "γωνίες Euler" με θετική φορά αυτή που καθορίζεται στο σχήμα 2.26.

Μεταβολή της γωνίας ψ σημαίνει στροφή του σώματος περί τον άξονα Oz, μεταβολή της γωνίας φ σημαίνει στροφή περί τον άξονα Oz_1 και μεταβολή της γωνίας θ σημαίνει στροφή περί την γραμμή ΟΔ. Γιά να καθορισθεί η κίνηση του σώματος πρέπει να είναι γνωστή η θέση του ως προς το σύστημα $Ox_1y_1z_1$, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή t πρέπει να είναι γνωστές οι συναρτήσεις

$$\psi = \psi(t) , \quad \phi = \phi(t) , \quad \theta = \theta(t) . \tag{2.68}$$

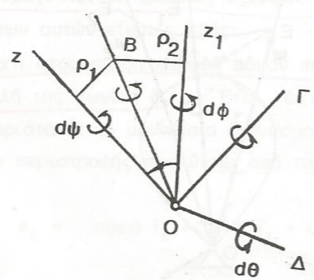
(xy) (yz) (xy)
φ, θ, ψ

Οι εξισώσεις (2.68) καλούνται **εξισώσεις κίνησης του στερεού περί σταθερό σημείο.**

Πράγματι, οι γωνίες ψ, φ, θ καθορίζουν την θέση του τριέδρου Οxyz και επομένως του στερεού σώματος ως προς το τρίεδρο $Ox_1y_1z_1$. Προς τούτο φέρουμε στο επίπεδο Ox_1y_1 την ΟΔ που σχηματίζει με τον άξονα Ox_1 την γωνία φ. Στην συνέχεια φέρουμε από τον Oz_1 επίπεδο κάθετο πάνω στην ΟΔ και παίρνουμε στο επίπεδο αυτό την γωνία $z_1Oz = \theta$ και έτσι ευρίσκουμε την θέση του άξονα Οz του κινητού συστήματος. Τέλος, φέρουμε από την ΟΔ επίπεδο κάθετο στον Οz, στο οποίο κείνται οι άξονες Οx, Οy. Ο άξονας Οx καθορίζεται με την γωνία ΔΟx = ψ και ο άξονας Οy κάθετος στον Οx.

Θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα των Euler - D΄Alembert: **Κάθε στοιχειώδης μετατόπιση σώματος που έχει ένα σταθερό σημείο ισοδυναμεί με στοιχειώδη περιστροφή περί στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο αυτό.**

Απόδειξη: Θεωρήσουμε σε μιά χρονική στιγμή t την θέση του σώματος, που καθορίζεται με τις γωνίες ψ, φ, θ. Τότε η μετακίνησή του σε ένα στοιχειώδη χρόνο dt μπορεί να προκύψει ως συνισταμένη μιάς σειράς περιστροφών κατά τις γωνίες dψ, dφ, dθ περί τους άξονες Οz, Oz_1 και ΟΔ αντίστοιχα (Σχ. 2.27).



Σχήμα 2.27: Στοιχειώδης περιστροφή περί τους άξονες Οz και Oz_1.

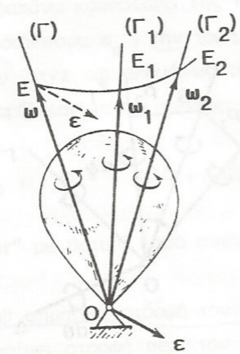
Σύμφωνα με το σχήμα αυτό θεωρούμε πρώτα σημείο Β μέσα στην γωνία zOz_1 πάνω στο επίπεδο zOz_1. Μιά περιστροφή περί τον άξονα z κατά γωνία dψ προκαλεί στοιχειώδη μετακίνηση του Β κάθετη στο επίπεδο αυτό, της οποίας η αλγεβρική τιμή είναι $\rho_1 d\psi$. Συγχρόνως, κατά την περιστροφή περί τον άξονα z_1

κατά $d\phi$ το Β, θα μετακινηθεί στην αντίθετη διεύθυνση κατά $\rho_2 d\phi$ και πάλι κάθετα προς το επίπεδο zOz_1. Συνεπώς, υπάρχει σημείο Β γιά το οποίο ισχύει:

$$\rho_1 d\psi = \rho_2 d\phi \tag{2.69}$$

και του οποίου η μετατόπιση είναι μηδενική.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η στοιχειώδης μετατόπιση του σώματος από τις δύο αυτές περιστροφές είναι η ίδια με την προκύπτουσα από την στοιχειώδη περιστροφή του σώματος περί τον άξονα ΟΒ, του οποίου τα σημεία Ο και Β είναι ακίνητα. Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι οι στοιχειώδεις στροφές περί τους άξονες ΟΒ και ΟΔ είναι ισοδύναμες προς μιά στοιχειώδη περιστροφή του σώματος περί ένα άξονα ΟΓ διερχόμενο από το Ο. αυτό αποδεικνύει και το θεώρημα. Ο άξονας ΟΒ λέγεται **στιγμιαίος άξονας περιστροφής.** Η περιστροφή περί τον ΟΒ φέρει το σώμα σε απείρως γειτονική θέση και στην συνέχεια ακολουθεί νέα περιστροφή περί τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής ΟΓ κ.ο.κ. Έτσι, η κίνηση ενός στερεού σώματος περί σταθερό σημείο νοείται συντιθέμενη από μιά σειρά διαδοχικών στοιχειωδών περιστροφών περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής διερχόμενους από το σημείο, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.28.



Σχήμα 2.28: Σειρά διαδοχικών στοιχειωδών περιστροφών περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής διά του Ο.

Η γωνιακή ταχύτητα **ω** με την οποία το σώμα εκτελεί στοιχειώδη περιστροφή περί τον στιγμιαίο άξονα ΟΒ λέγεται **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του σώματος.** Η φορά του διανύσματος **ω** καθορίζεται έτσι ώστε η φορά περιστροφής και το διάνυσμα να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Καθώς η διεύθυνση του άξονα ΟΒ μεταβάλλεται συνεχώς, το διάνυσμα **ω** μεταβάλλεται συνεχώς συναρτήσει του χρόνου και η κορύφη του Ε γράφει καμπύλη στον χώρο που καλείται **οδογράφος** του διανύσματος **ω** (Σχ. 2.28).

Την περιστροφή του στερεού με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα **ω** ευρίσκουμε από τον τύπο

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\phi}{dt}\,\mathbf{k}_1 + \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{s}_0 + \frac{d\psi}{dt}\,\mathbf{k}\,, \tag{2.70}$$

συντιθεμένη, με βάση τις παραμέτρους (γωνίες) Euler του Σχ. 2.26, από μιά περιστροφή περί τον άξονα $\mathbf{k}_1$ με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$, άλλη περί τον άξονα ΟΔ με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ και μιά τρίτη περί τον άξονα **k** με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$. Αυτά επειδή στα επόμενα θα απαιτηθεί η ανάλυση της γωνιακής ταχύτητας **ω** κατά τις διευθύνσεις των σωματοπαγών αξόνων Oxyz σύμφωνα με τον τύπο

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k}\,. \tag{2.71}$$

Είναι σημαντικό να καθορισθούν οι εξισώσεις που εκφράζουν τις συνιστώσες ω_x, ω_y, ω_z με τις γωνίες φ, θ, ψ και τις γωνιακές ταχύτητες $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ και $\dot{\psi}$. Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **κινηματικές εξισώσεις Euler.** Η λογική γιά τον καθορισμό των σχέσεων αυτών είναι η εξής:

1: Θεωρούμε κατ΄ αρχή στοιχειώδη στροφή μόνον περί τον άξονα Oz_1, αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας φ. ΄Ετσι έχουμε την παράσταση του σχήματος 2.29 ($\mathbf{q}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα ΟΕ, κάθετο στο **k** και $\mathbf{s}_0$). Το μητρώο περιστροφής προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις

$$\mathbf{s}_0 = \cos\phi\;\mathbf{i}_1 + \sin\phi\;\mathbf{j}_1 + 0\;\mathbf{k}_1\,,$$

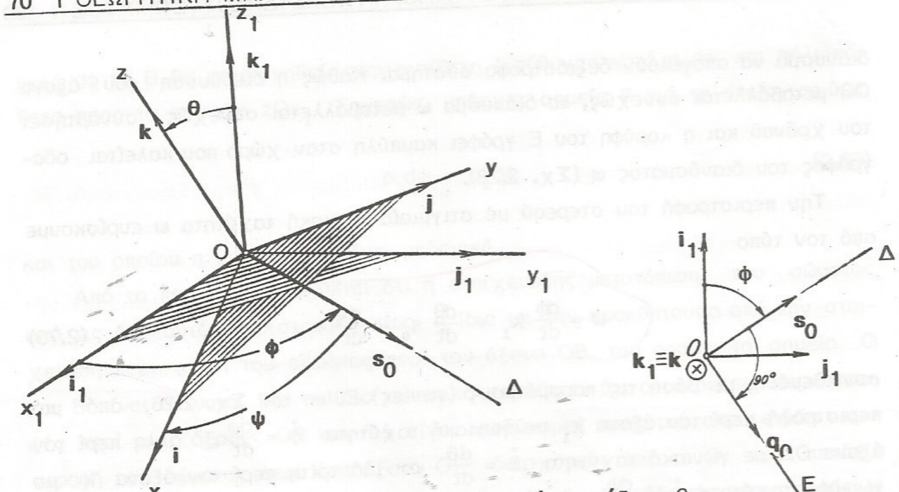
$$\mathbf{q}_0 = -\sin\phi\;\mathbf{i}_1 + \cos\phi\;\mathbf{j}_1 + 0\;\mathbf{k}_1\,,$$

$$\mathbf{k} = 0.\,\mathbf{i}_1 + 0.\,\mathbf{j}_1 + 1\;\mathbf{k}_1\,,$$

δηλαδή, είναι το

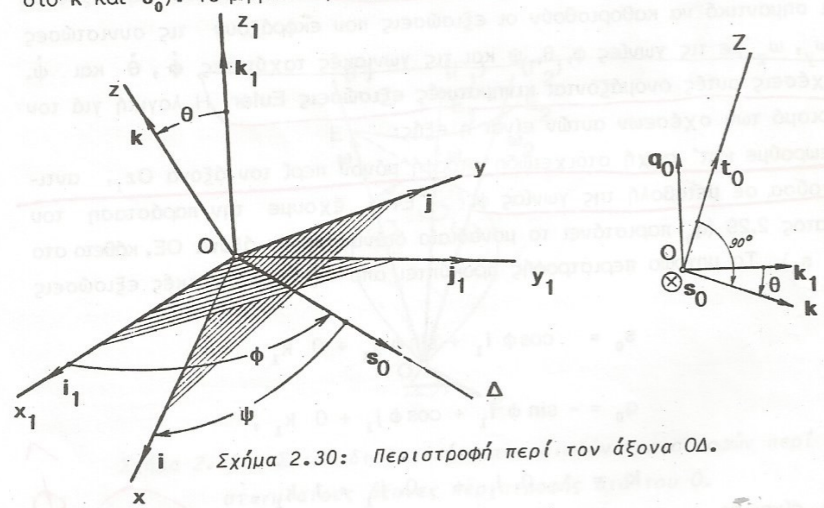
xy φ

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.72}$$



Σχήμα 2.29: Περιστροφή περί τον άξονα Oz_1.

2: Στην συνέχεια θεωρούμε μόνον στοιχειώδη στροφή περί τον άξονα ΟΔ, αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας θ. Παίρνουμε επομένως την παράσταση του σχήματος 2.30 (t_0 παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα ΟΖ, κάθετο στο k και s_0). Το μητρώο περιστροφής εδώ προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις



Σχήμα 2.30: Περιστροφή περί τον άξονα ΟΔ.

$$s_0 = 1.\, s_0 + 0\, q_0 + 0\, k_1 ,$$

$$t_0 = 0.\, s_0 + \cos\theta\, q_0 + \sin\theta\, k_1 ,$$

$$k = 0.\, s_0 - \sin\theta\, q_0 + \cos\theta\, k_1$$

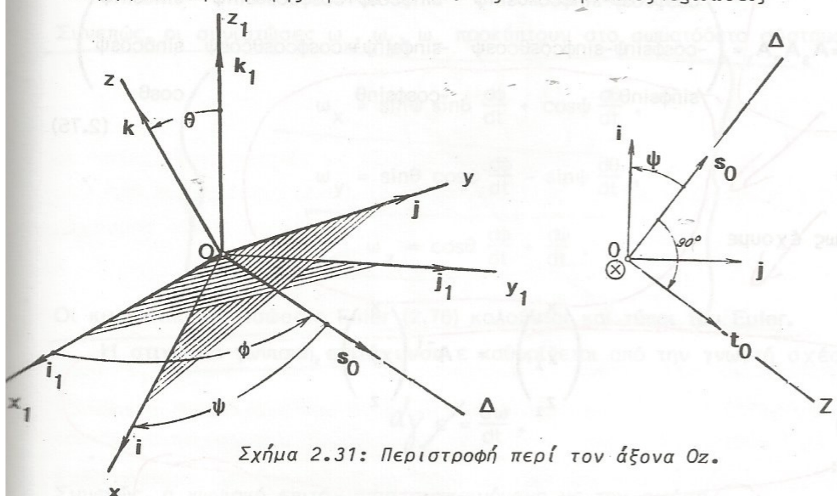
δηλαδή, είναι το

θ
yz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2.73)$$

3: Τέλος, θεωρούμε μόνον στοιχειώδη στροφή περί τον άξονα Oz, αντιστοιχούσα σε μεταβολή της γωνίας ψ. Έχουμε επομένως την παράσταση του σχήματος 2.31.

Το μητρώο περιστροφής προκύπτει από τις διανυσματικές εξισώσεις



Σχήμα 2.31: Περιστροφή περί τον άξονα Oz.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos\psi\, \mathbf{s}_0 + \sin\psi\, \mathbf{t}_0 + 0\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{j} &= -\sin\psi\, \mathbf{s}_0 + \cos\psi\, \mathbf{t}_0 + 0\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{k} &= 0.\, \mathbf{s}_0 + 0.\, \mathbf{t}_0 + 1\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

και συνεπώς είναι το

ψ
xy

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.74)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η περιστροφή γίνεται συγχρόνως περί τους άξονες Oz_1, OΔ και Oz, οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο σωματόδετο σύστημα προκύπτουν ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων του ιδίου διανύσματος στο χωρόδετο σύστημα από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} ,$$

όπου το μητρώο **A** καλείται **μητρώο περιστροφής** και δίνεται από τον τύπο:

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

Ομοίως έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

όπου:

$$A^{-1} = (A_3 A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} = A_1^T A_2^T A_3^T = (A_3 A_2 A_1)^T$$

λόγω της δομής των πινάκων A_1, A_2, A_3.

Είναι τώρα εύκολο να υπολογίσουμε τις συνιστώσες ω_x, ω_y, ω_z συναρτήσει των ϕ, θ, ψ, $\dot\phi$, $\dot\theta$, $\dot\psi$. Πράγματι, από την εξίσωση (2.70) παίρνουμε τα εξής εσωτερικά γινόμενα:

$$\begin{aligned} \omega\cdot i &= \omega_x = \dot\phi\,(k_1\cdot i) + \dot\theta\,(s_0\cdot i) + \dot\psi\,(k\cdot i) , \\ \omega\cdot j &= \omega_y = \dot\phi\,(k_1\cdot j) + \dot\theta\,(s_0\cdot j) + \dot\psi\,(k\cdot j) , \\ \omega\cdot k &= \omega_z = \dot\phi\,(k_1\cdot k) + \dot\theta\,(s_0\cdot k) + \dot\psi\,(k\cdot k) . \end{aligned}$$

Είναι όμως

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{s}_0 = 0, \quad \mathbf{s}_0\cdot\mathbf{i} = \cos\psi, \quad \mathbf{s}_0\cdot\mathbf{j} = -\sin\psi, \quad \mathbf{s}_0\cdot\mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}_1\cdot(\cos\psi\,\mathbf{s}_0 + \sin\psi\,\mathbf{t}_0) = \cos\psi\,\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{s}_0 + \sin\psi\,\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{t}_0 =$$

$$= \cos\psi\,\mathbf{k}_1\cdot(\cos\phi\,\mathbf{i}_1 + \sin\phi\,\mathbf{j}_1) + \sin\psi\,\mathbf{k}_1\cdot(\cos\theta\,\mathbf{q}_0 + \sin\theta\,\mathbf{k}_1) =$$

$$= \sin\psi\cos\theta\,\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{q}_0 + \sin\psi\sin\theta = \sin\psi\cos\theta\,\mathbf{k}_1\cdot(-\sin\phi\,\mathbf{i}_1 + \cos\phi\,\mathbf{j}_1) + \sin\psi\sin\theta =$$

$$= \sin\psi\sin\theta\,,$$

$$\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{j} = \sin\theta\cos\psi\,, \quad \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k} = \cos\theta\,.$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες ω_x, ω_y, ω_z προκύπτουν στο σωματόδετο σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_x &= \sin\psi\sin\theta\,\frac{d\phi}{dt} + \cos\psi\,\frac{d\theta}{dt}\,, \\ \omega_y &= \sin\theta\cos\psi\,\frac{d\phi}{dt} - \sin\psi\,\frac{d\theta}{dt}\,, \\ \omega_z &= \cos\theta\,\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

Οι κινηματικές εξισώσεις Euler (2.76) καλούνται και **τύποι του Euler.**

Η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση ε καθορίζεται από την γνωστή σχέση

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\,. \tag{2.77}$$

Συνεπώς, η γωνιακή επιτάχυνση συγκρινόμενη με την σχέση

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} \tag{2.78}$$

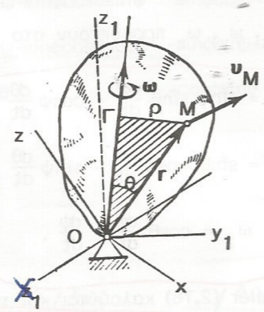
μπορεί να υπολογισθεί ως ταχύτητα της κορυφής του διανύσματος **ω** κινούμενου κατά μήκος της καμπύλης EE_3 (Σχ. 2.28). Η διεύθυνση της ε συμπίπτει με την διεύθυνση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο εν λόγω σημείο. Η διεύθυνση του ε, με εξαίρεση την περίπτωση της περιστροφής περί σταθερό άξονα, δεν συμπίπτει με αυτή του **ω**.

Τα διανύσματα **ω** και ε είναι τα βασικά κινηματικά μεγέθη της κίνησης σώματος περί σταθερό σημείο και καθορίζονται με βάση τις εξισώσεις κίνησης (2.77), (2.76) και επομένως τις (2.68).

Η ταχύτητα ενός σημείου Μ του σώματος κατά την χρονική στιγμή της περιστροφής του σώματος περί τον στιγμιαίο άξονα ΟΓ καθορίζεται από την σχέση

$$\upsilon = \omega\rho\,, \tag{2.79}$$

όπου ω η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του σώματος και ρ η απόσταση του Μ από τον ΟΓ (Σχ. 2.32).



Σχήμα 2.32: Το διάνυσμα ταχύτητος σημείου κατά την περιστροφή στερεού.

Το διάνυσμα **υ** είναι κάθετο στο επίπεδο ΜΟΓ με διεύθυνση της περιστροφής του σώματος. Επειδή είναι $\rho = \rho(t)$, η εξίσωση (2.79), εκτός της περίπτωσης όπου η ρ είναι σταθερά, δεν προσφέρεται πάντοτε γιά τον καθορισμό της **υ**. Προς τούτο θεωρούμε το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, όπου **r** είναι η διανυσματική ακτίνα του Μ, με μέτρο

$$|\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,| = \omega r \sin\theta = \omega\rho\,, \tag{2.80}$$

οπότε

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{2.81}$$

Αναλυτικά η ταχύτητα **υ** καθορίζεται από τις συντεταγμένες υ_x, υ_y, υ_z στο σωματόδετο σύστημα Oxyz, ως προς το οποίο το Μ έχει σταθερές συντεταγμένες M(x,y,z). Έτσι, από την (2.81) ευρίσκουμε

$$\mathbf{υ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ω_x & ω_y & ω_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad (2.82)$$

εκ της οποίας προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} υ_x &= ω_y z - ω_z y \\ υ_y &= ω_z x - ω_x z \\ υ_z &= ω_x y - ω_y x \end{aligned} \qquad (2.83)$$

οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις του Euler.

Από τις σχέσεις (2.81), (2.78) και (2.77) προκύπτει το διάνυσμα $\mathbf{γ}$ της επιτάχυνσης του Μ ως εξής:

$$\mathbf{γ} = \frac{d\mathbf{ω}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{ε} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ} = \mathbf{γ}_1 + \mathbf{γ}_2 \,, \qquad (2.84)$$

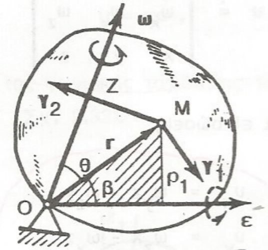
όπου $\mathbf{γ}_1 = \mathbf{ε} \times \mathbf{r}$ παριστάνει την περιστροφική συνιστώσα της επιτάχυνσης του Μ και $\mathbf{γ}_2 = \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}$ την συνιστώσα της επιτάχυνσης του Μ με διεύθυνση προς τον άξονα περιστροφή. Το διάνυσμα $\mathbf{γ}_1$ είναι κάθετο στο επίπεδο (ε,r) και έχει αλγεβρική τιμή

$$γ_1 = εr \sin β = ερ_1 \,, \qquad (2.85)$$

όπου $ρ_1$ δηλώνει την απόσταση του σημείου Μ από το διάνυσμα ε (Σχ. 2.33). Το διάνυσμα $\mathbf{γ}_2$ είναι κάθετο στα $\mathbf{υ}$ και $\mathbf{ω}$, διευθύνεται κατά μήκος της MZ, και έχει αλγεβρική τιμή

$$γ_2 = ωυ \sin \frac{π}{2} = ω^2 ρ \,. \qquad (2.86)$$

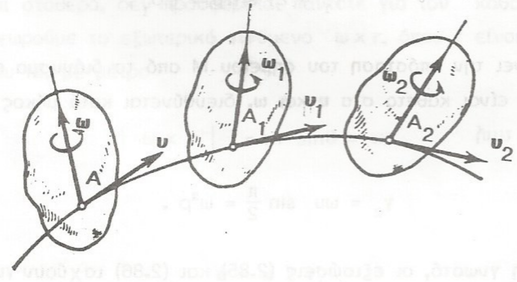
Όπως είναι ήδη γνωστό, οι εξισώσεις (2.85) και (2.86) ισχύουν γιά ένα σώμα περιστρεφόμενο περί σταθερό άξονα, όπου τα ω και ε διευθύνονται κατά μήκος του άξονα περιστροφής.



Σχήμα 2.33: Το διάνυσμα επιτάχυνσης σημείου κατά την περιστροφή στερεού.

2.12 Η Γενική Κίνηση του Στερεού Σώματος

Η γενικώτερη κίνηση ενός ελευθέρου στερεού σώματος συντίθεται από μιά μεταφορά του σώματος, κατά την οποία όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια ταχύτητα $\mathbf{υ}_A$ και ίδια τροχιά του εκλεγέντος τυχόντος πόλου Α, και μιά σειρά διαδοχικών απειροστών περιστροφών ω περί στιγμιαίους άξονες περιστροφής που διέρχονται από τον εκάστοτε πόλο Α (Σχ. 2.34).

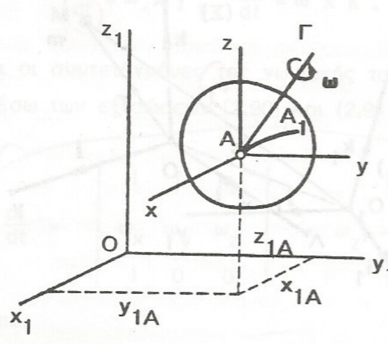


Σχήμα 2.34: Γενική κίνηση στερεού.

Τα βασικά κινηματικά χαρακτηριστικά της κίνησης είναι η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_A$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_A$ του πόλου, που καθορίζουν την ταχύτητα και επιτάχυνση της συνιστώσας της μεταβατικής κίνησης, και η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και επιτάχυνση $\boldsymbol{\varepsilon}$ της περιστροφής περί τον πόλο. Τα παραπάνω μεγέθη καθορίζονται σε κάθε στιγμή από τις εξισώσεις της κίνησης του ελεύθερου στερεού σώματος ως προς το σταθερό σύστημα αναφοράς $Ox_1y_1z_1$ (Σχ. 2.35), δηλαδή από τις εξισώσεις

$$\begin{gathered} x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad z_{1A} = z_{1A}(t), \\ \phi = \phi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \end{gathered} \tag{2.87}$$

όπου x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} είναι οι συντεταγμένες του πόλου Α ως προς το $Ox_1y_1z_1$ και ϕ, ψ, θ είναι οι γωνίες Euler, που καθορίζουν την θέση του σώματος σε σχέση προς το δεδομένο σύστημα αναφοράς $Ox_1y_1z_1$.



Σχήμα 2.35: Κίνηση του πόλου Α.

Η επίπεδη κίνηση του ελεύθερου σώματος προκύπτει ως ειδική περίπτωση κατά την οποία το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$ παραμένει συνεχώς κάθετο στο επίπεδο της κίνησης. Εδώ τονίζεται ότι τόσο στην γενική κίνηση όσο και στην επίπεδη κίνηση του στερεού σώματος η περιστροφική συνιστώσα της κίνησης είναι ανεξάρτητη της εκλογής του πόλου Α.

2.13 Απόλυτη και Σχετική Κίνηση - Θεώρημα Coriolis

2.13.1 *Απόλυτη, σχετική και μετοχική ταχύτητα*

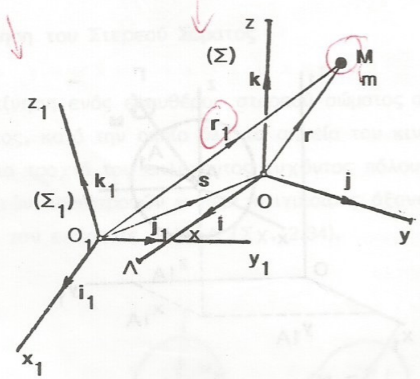
Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει την κίνηση υλικού σημείου ή στερεού σώματος ως προς χωρόδετο σύστημα αναφοράς $Ox_1y_1z_1$ ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων, το οποίο στα παρακάτω θα καλούμε συντόμως σύστημα ή σώμα Σ_1. Η κίνηση ενός σημείου $M(x_1,y_1,z_1)$ καθορίζεται πλήρως στο σύστημα αυτό εφ΄ όσον είναι γνωστή η εξίσωση της κίνησης

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t) = (x_1,y_1,z_1)\,, \tag{2.88}$$

όπου $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ παριστάνουν τις συντεταγμένες της διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{r}_1(t)$ ως προς το $Ox_1y_1z_1$- σύστημα με μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_1$ (Σχ. 2.36).

χωρόδετο

κινητό σύστημα



Σχήμα 2.36: Κίνηση σημείου στερεού ως προς χωρόδετο σωματόδετο σύστημα αναφοράς.

Από την εξίσωση (2.88) προκύπτουν

$$\begin{aligned} \upsilon &= \dot{x}_1\mathbf{i}_1 + \dot{y}_1\mathbf{j}_1 + \dot{z}_1\mathbf{k}_1\,, \\ \gamma &= \ddot{x}_1\mathbf{i}_1 + \ddot{y}_1\mathbf{j}_1 + \ddot{z}_1\mathbf{k}_1\,. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Σε άλλο σύστημα αναφοράς Oxyz, επίσης σταθερό, το Σ, οι μεν παράμετροι $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1$ θα μεταβληθούν, αλλά τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης **υ**, **γ** θα παραμείνουν αμετάβλητα. Θεωρούμε στο εξής το σύστημα Σ κινητό προς το σταθερό Σ_1 (με ορισμένο νόμο κίνησης) με μοναδιαία διανύσματα τα **i**, **j**, **k**. Το σύστημα Σ_1 καλείται σταθερό, ενώ το Σ κινητό· μιά κίνηση που αναφέρεται στο Σ_1 θα καλείται απόλυτη, ενώ η ίδια κίνηση στο Σ θα καλείται σχετική.

Τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j**, **k** παρακολουθούν την κίνηση του Σ του οποίου η γωνιακή ταχύτητα προς Σ_1 είναι $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. Συνεπώς, τα διανύσματα αυτά μεταβάλλουν διεύθυνση συναρτήσει του χρόνου. Ας καλέσουμε με Λ το άκρο του μοναδιαίου διανύσματος **i** πάνω στον Ox, δηλαδή $\mathbf{i} = \mathbf{O\Lambda} = \mathbf{r}_\Lambda$. Τότε με βάση αυτά που έχουν ήδη αναπτυχθεί ισχύει

$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ $(1,0,0)$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_\Lambda = \underbrace{\mathbf{u}_\Lambda = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\Lambda}_{} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \tag{2.90}$$

και ανάλογα

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}\,, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}\,. \tag{2.91}$$

Αν $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ είναι οι συντεταγμένες της γωνιακής ταχύτητας **ω** στο κινητό σύστημα Σ, τότε μέσω των εξισώσεων (2.90) και (2.91), εξάγουμε

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \mathbf{j} - \omega_y \mathbf{k} \tag{2.92}$$

και καθ΄ όμοιο τρόπο

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega_x \mathbf{k} - \omega_z \mathbf{i}\,, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega_y \mathbf{i} - \omega_x \mathbf{j}\,. \tag{2.93}$$

Οι εξισώσεις (2.92) και (2.93) είναι γνωστές ως **εξισώσεις Poisson.**

΄Εστω M(x,y,z) τυχόν σημείο αναφερόμενο στο κινητό σύστημα Σ. Αν καλέσουμε με

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r}\,, \quad \mathbf{O_1M} = \mathbf{r}_1\,, \quad \mathbf{O_1O} = \mathbf{s}\,,$$

τότε ισχύουν οι εξής διανυσματικές εξισώσεις:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\dot{i} = \frac{di}{dt} = \omega \times i$

$\dot{s} + \omega \times r$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s} + \mathbf{r}\,, \tag{2.94}$$

υ μετοχική $\qquad$ υ σχετική

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{s}} + x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}\,, \tag{2.95}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{s}} + x\ddot{\mathbf{i}} + y\ddot{\mathbf{j}} + z\ddot{\mathbf{k}} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + 2(\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}} + \dot{z}\dot{\mathbf{k}})\,. \tag{2.96}$$

a μετοχική $\qquad$ a σχετική $\qquad$ $a_{Coriolis} = 2(\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_\sigma)$

Γιά να αντιληφθούμε την σημασία των σχέσεων αυτών θα παρακολουθήσουμε στο εξής, εκτός του κινητού σημείου Μ, και ένα σημείο m στερεά συνδεδεμένο με το σύστημα Σ με το οποίο το κινούμενο σημείο Μ συμπίπτει κατά την θεωρούμενη στιγμή t. Το σημείο m έχει στο σύστημα Σ τις ίδιες συντεταγμένες με το Μ, αλλά σε αντίθεση με το Μ τις διατηρεί αμετάβλητες. Την ταχύτητα του m στο σταθερό σύστημα Σ_1 ευρίσκουμε με βάση την εξίσωση (2.95) όπως παρακάτω:

$$\boldsymbol{\upsilon}_m = \dot{\mathbf{s}} + x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,. \tag{2.97}$$

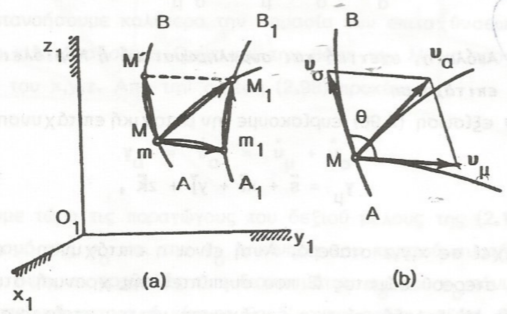
Αυτή η ταχύτητα καλείται **μετοχική ταχύτητα** του Μ και αποτελεί την μιά από τις συνιστώσες της ταχύτητάς του. Η μετοχική ταχύτητα του Μ είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου m του στερεού Σ, με το οποίο το Μ συμπίπτει κατά την θεωρούμενη χρονική στιγμή· είναι επομένως η ταχύτητα με την οποία το Μ μετέχει στην κίνηση του Σ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$.

Η άλλη συνιστώσα της ταχύτητας $\dot{\mathbf{r}}_1 = (d\mathbf{r}_1 / dt)$ καλείται **σχετική ταχύτητα** του Μ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$. Η $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης (x,y,z) του Μ ως προς το σύστημα Σ με τα **s, i, j, k** σταθερά. Με βάση τις εξισώσεις (2.95) και (2.97) ευρίσκουμε

$$\boldsymbol{\upsilon}_a = \dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\upsilon}_\mu + \boldsymbol{\upsilon}_\sigma\,, \tag{2.98}$$

όπου η $\boldsymbol{\upsilon}_a$, που αναφέρεται στο σταθερό σύστημα, είναι η **απόλυτη ταχύτητα.** Επομένως συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη ταχύτητα του Μ είναι το διανυσματικό άθροισμα της σχετικής ταχύτητας και της μετοχικής.

Γιά να αντιληφθούμε καλύτερα την σημασία των παραπάνω ας θεωρήσουμε σε μιά χρονική στιγμή t το κινητό σημείο Μ όπως στο σχήμα 2.37. Έστω ότι στο χρονικό διάστημα Δt η σχετική μετακίνηση του Μ επί της τροχιάς του ΑΒ ως προς το κινητό σύστημα Σ (που δεν παριστάνεται στο σχήμα 2.37) καθορίζεται με το διάνυσμα **ΜΜ΄**. Στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt η καμπύλη (ΑΒ) έχει κινηθεί μαζί με το κινητό σύστημα Oxyz στην νέα θέση A_1B_1. Συγχρόνως, το σημείο m στην καμπύλη ΑΒ (με το οποίο την χρονική στιγμή t συμπίπτει το Μ) εκτελεί μιά μετοχική μετακίνηση $\mathbf{mm_1} = \mathbf{Mm_1}$ (Σχ. 2.37a). Έτσι,



Σχήμα 2.37(a,b): Σχετική μετακίνηση σημείου κινούμενου στερεού σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

με την συνισταμένη των μετακινήσεων το σημείο Μ θα μετακινηθεί στην νέα θέση M_1, όπου το διάνυσμα $\mathbf{MM_1}$ είναι η απόλυτη μετακίνηση στο διάστημα Δt. Είναι όμως

$$\mathbf{MM_1} = \mathbf{Mm_1} + \mathbf{m_1M_1}$$

και

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{m_1M_1}}{\Delta t} .$$

δηλαδή

$$\upsilon_\alpha = \upsilon_\sigma + \upsilon_\mu .$$

Τα διανύσματα υ_α, υ_σ, υ_μ είναι εφαπτομενικά στις αντίστοιχες τροχιές (Σχ. 2.37b). Με βάση το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων του σχήματος 2.37b ευρίσκουμε το μέτρο της απόλυτης ταχύτητας υ_α όταν γνωρίζουμε την γωνία θ, δηλαδή

$$\upsilon_\alpha = (\upsilon_\sigma^2 + \upsilon_\mu^2 + 2\upsilon_\sigma\upsilon_\mu \cos\theta)^{\frac{1}{2}} .$$

2.13.2 Απόλυτη, σχετική και συμπληρωματική ή Κοριόλειος (Coriolis) επιτάχυνση

Από την εξίσωση (2.96) ευρίσκουμε την μετοχική επιτάχυνση του σημείου Μ

$$\gamma_\mu = \ddot{s} + x\ddot{i} + y\ddot{j} + z\ddot{k} , \tag{2.99}$$

που αντιστοιχεί σε x,y,z σταθερά. Αυτή είναι η επιτάχυνση ενός σημείου m(x,y,z) του στερεού σώματος Σ που συμπίπτει την χρονική στιγμή t με το κινητό σημείο Μ' δηλαδή, είναι η επιτάχυνση με την οποία το σημείο Μ μετέχει στην κίνηση του Σ. Επίσης, από την εξίσωση (2.96) ευρίσκουμε την σχετική επιτάχυνση του Μ

$$\gamma_\sigma = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k \tag{2.100}$$

η οποία αποτελεί την συνιστώσα της επιτάχυνσης την οφειλόμενη αποκλειστικά στην μεταβολή της θέσης του M(x,y,z) ως προς Σ με σταθερά τα **s, i, j, k .** Από την (2.96) ευρίσκουμε ένα τρίτο όρο, που καλείται **συμπληρωματική** ή **κοριόλειος επιτάχυνση** του Μ, ο οποίος είναι

$$\gamma_C = 2(\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} + \dot{z}\dot{k}) . \tag{2.101}$$

Η τελευταία εξίσωση με βάση τις σχέσεις Poisson καταλήγει

$$\gamma_C = 2 [\, \omega \times (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k)] = 2(\omega \times \upsilon_\sigma) . \tag{2.102}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε την απόλυτη επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ του Μ ως διανυσματικό άθροισμα των τριών επιταχύνσεων (σχετικής, μετοχικής και κοριολείου):

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \boldsymbol{\gamma}_\sigma + \boldsymbol{\gamma}_\mu + \boldsymbol{\gamma}_c \,. \tag{2.103}$$

Το θεώρημα Coriolis καθορίζει (βάσει της (2.102)) ότι η κοριόλειος επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_c$ ισούται προς το διπλάσιο του εξωτερικού γινομένου της γωνιακής ταχύτητας του κινητού συστήματος Σ επί την σχετική ταχύτητα του κινητού ως προς αυτό το σύστημα.

Γιά να κατανοήσουμε καλύτερα την σημασία των επιταχύνσεων αυτών ας θεωρήσουμε το κινητό σύστημα Οxyz και την θέση του Μ ως προς αυτό με τις συντεταγμένες του x,y,z. Από την σχέση (2.98) προκύπτει

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_\alpha = \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_\mu + \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_\sigma \,. \tag{2.104}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τις παραγώγους του δεξιού μέλους της (2.102). Αφού γιά τον καθορισμό της $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ και την $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ η κίνηση του κινητού συστήματος Σ δεν λαμβάνεται υπ΄ όψη, οι προβολές των διανυσμάτων $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ και $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ πάνω στους άξονες του Οxyz σε μιά μετοχική κίνηση θα δίνονται από τις εξής διανυσματικές εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\upsilon}_\sigma = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \,, \quad \boldsymbol{\gamma}_\sigma = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \,. \tag{2.105}$$

Ο περαιτέρω υπολογισμός εξαρτάται από το είδος της μετοχικής κίνησης. Έτσι, π.χ., αν η μετοχική κίνηση είναι μιά μεταφορά σχετικά με το σύστημα $Ox_1y_1z_1$, τότε προφανώς σε κάθε θέση του Μ θα ισχύουν

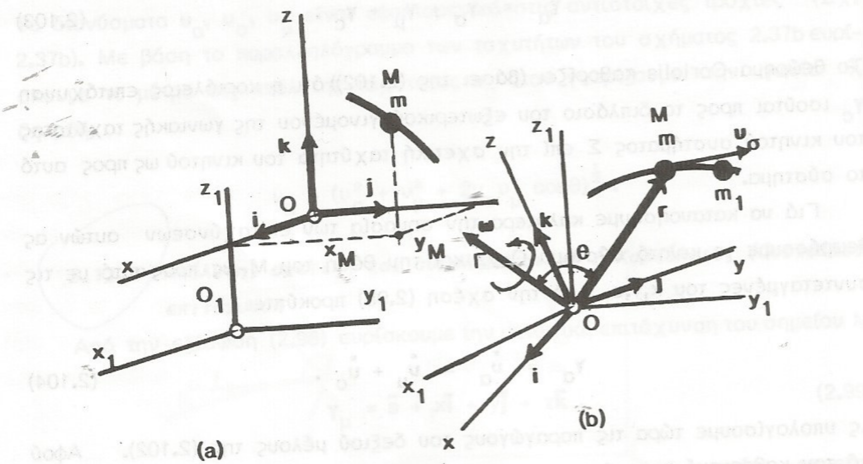
$$\boldsymbol{\upsilon}_\mu = \boldsymbol{\upsilon}_0 \,, \quad \boldsymbol{\gamma}_\mu = \boldsymbol{\gamma}_0 \,, \tag{2.106}$$

όπου $\boldsymbol{\upsilon}_0$ και $\boldsymbol{\gamma}_0$ είναι η ταχύτητα και επιτάχυνση του Ο (Σχ. 2.38a). Αλλά κατά την μεταβατική κίνηση του Οxyz τα **i**, **j**, **k** παραμένουν σταθερά και τότε προκύπτουν

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_\sigma = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} = \boldsymbol{\gamma}_\sigma \,, \quad \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_\mu = \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_0 = \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\gamma}_\mu \,,$$

οπότε η σχέση (2.103) παίρνει την μορφή

$$\gamma_\alpha = \gamma_\mu + \gamma_\sigma . \tag{2.107}$$



Σχήμα 2.38(a,b): Γενική περίπτωση σχετικής κίνησης στερεού.

Θεωρήσουμε τώρα την γενική περίπτωση κατά την οποία η μετοχική κίνηση , δηλαδή η κίνηση του Σ, είναι περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα ω περί τον στιγμιαίο άξονα ΟΓ (Σχ. 2.38b). Στην περίπτωση αυτή τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j**, **k** δεν είναι πλέον σταθερά, αλλά μεταβάλλουν διευθύνσεις. Επομένως, από τις ισχύουσες γιά κάθε μετοχική κίνηση σχέσεις (2.105) προκύπτουν:

$$\dot{\upsilon}_\sigma = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + (\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}} + \dot{z}\dot{\mathbf{k}}) = \gamma_\sigma + \gamma_1 . \tag{2.108}$$

Ο όρος γ_1, με βάση τις σχέσεις Poisson, παίρνει την μορφή

$$\gamma_1 = \omega \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) = \omega \times \upsilon_\sigma , \tag{2.109}$$

δηλαδή τελικά ευρίσκουμε την διανυσματική σχέση

$$\dot{\mathbf{υ}}_σ = \mathbf{γ}_σ + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_σ . \tag{2.110}$$

Στην τελευταία εξίσωση η $\mathbf{γ}_σ$ παριστάνει την μεταβολή του $\mathbf{υ}_σ$ μόνο στην σχετική κίνηση του Μ και η $\mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_σ$ την μεταβολή του $\mathbf{υ}_σ$ κατά την περιστροφή του με το σύστημα Oxyz περί τον ΟΓ, δηλαδή στην μετοχική κίνηση (Σχ. 2.38b).
Κατά την περιστροφική κίνηση, η ταχύτητα και επιτάχυνση ενός σημείου m, σταθερού ως προς το σύστημα Oxyz, καθορίζονται από τις σχέσεις (2.81) και (2.84), δηλαδή:

$$\mathbf{υ}_μ = \mathbf{ω} \times \mathbf{r} , \quad \mathbf{γ}_μ = \mathbf{ε} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_μ . \tag{2.111}$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου m, που την χρονική στιγμή t συμπίπτει με την διανυσματική ακτίνα του σημείου Μ. Από την πρώτη των (2.111) προκύπτει

$$\dot{\mathbf{υ}}_μ = \dot{\mathbf{ω}} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \dot{\mathbf{r}} . \tag{2.112}$$

Παρατηρούμε όμως ότι η $\dot{\mathbf{υ}}_μ$ είναι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (2.104) που καθορίζει την απόλυτη επιτάχυνση του Μ στο σύστημα $Ox_1y_1z_1$· επομένως, το $\dot{\mathbf{r}}$ στην (2.112) παριστάνει την ταχύτητα του Μ στο ίδιο σύστημα, δηλαδή την απόλυτη ταχύτητα του Μ

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{υ}_α = \mathbf{υ}_μ + \mathbf{υ}_σ .$$

Επειδή ισχύει

$$\dot{\mathbf{ω}} = \mathbf{ε},$$

η σχέση (2.112) καταλήγει στην

$$\dot{\mathbf{υ}}_μ = \mathbf{ε} \times \mathbf{r} + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_μ + \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_σ . \tag{2.113}$$

Η εξίσωση (2.113) με βάση τις (2.111) παίρνει την μορφή

$$\dot{\mathbf{υ}}_μ = \mathbf{γ}_μ + \mathbf{γ}_2 , \quad \mathbf{γ}_2 = \mathbf{ω} \times \mathbf{υ}_σ . \tag{2.114}$$

Η $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ δίνει την μεταβολή της $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$ μόνο στην μετοχική κίνηση, γιατί υπολογίσθηκε ως επιτάχυνση του m σταθερά συνδεδεμένου με το Oxyz- σύστημα. Η $\boldsymbol{\gamma}_2$ παρέχει την μεταβολή της $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$ στην σχετική κίνηση του M από την θέση m στην θέση m_1, όπου η $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$ είναι διαφορετική. Στην ακόμη γενικώτερη περίπτωση της μετοχικής κίνησης, δηλαδή της γενικής κίνησης του ελεύθερου σώματος, οι (2.108) και (2.114) παραμένουν οι ίδιες με την διαφορά ότι στην (2.114) η $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ θα υπολογισθεί βάσει της (2.96). Η εξίσωση (2.104) με βάση τις (2.108),(2.114) και (2.109) γίνεται

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \boldsymbol{\gamma}_\mu + \boldsymbol{\gamma}_\sigma + \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\gamma}_\mu + \boldsymbol{\gamma}_\sigma + \boldsymbol{\gamma}_C \,, \tag{2.115}$$

όπου

$$\boldsymbol{\gamma}_C = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}_\sigma) \,. \tag{2.116}$$

Η $\boldsymbol{\gamma}_C$, που χαρακτηρίζει την μεταβολή του διανύσματος $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ στην μετοχική κίνηση και την μεταβολή του διανύσματος $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$ στην σχετική κίνηση, είναι η συμπληρωματική ή κοριόλειος επιτάχυνση του M. Ειδικά στην περίπτωση που η μετοχική κίνηση είναι μεταφορά ισχύει $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ και επομένως $\boldsymbol{\gamma}_C = \mathbf{0}$.
Γιά τον υπολογισμό της $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ η κίνηση του κινητού συστήματος Oxyz μπορεί να ληφθεί υπ΄ όψη και επομένως η $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ υπολογίζεται με βάση την θεωρία της κινηματικής του υλικού σημείου. Γιά τον υπολογισμό της $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ η σχετική κίνηση του M μπορεί να ληφθεί υπ΄ όψη και επομένως η $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ υπολογίζεται ως επιτάχυνση σημείου στερεού σώματος σταθερά συνδεδεμένου με το Oxyz και κινούμενου μαζί του, δηλαδή με βάση την θεωρία της κινηματικής του στερεού σώματος. Η κοριόλειος επιτάχυνση υπολογίζεται ως το διπλάσιο του εξωτερικού γινομένου της γωνιακής ταχύτητας της μετοχικής κίνησης και της σχετικής ταχύτητας του σημείου. Με βάση το σχήμα 2.38b η αλγεβρική τιμή της γ_C προκύπτει

$$\gamma_C = 2\omega^2 r \sin\theta \,. \tag{2.117}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}_C$ έχει την ίδια φορά με το $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}_\sigma$, δηλαδή είναι κάθετο προς το επίπεδο των $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ με φορά τέτοια ώστε το σύστημα $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$, $\boldsymbol{\gamma}_C$ να είναι δεξιόστροφο (Σχ. 2.38). Από την σχέση (2.117) παρατηρούμε ότι η $\boldsymbol{\gamma}_C$ μηδενίζεται όταν:

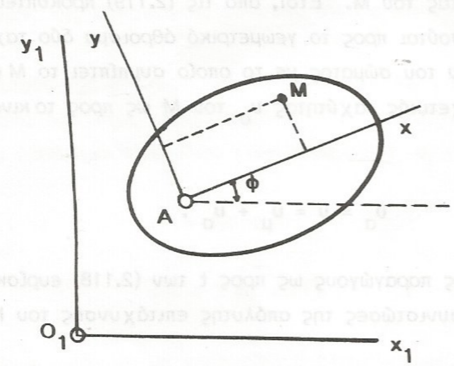
α) $\omega = 0$, δηλαδή όταν η μετοχική κίνηση είναι μεταβατική ή όταν η ω της περιστροφής σε κάποια χρονική στιγμή μηδενίζεται.

β) $\upsilon_\sigma = 0$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει σχετική κίνηση ή όταν η υ_σ γίνεται μηδέν σε κάποια χρονική στιγμή, και

γ) $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, δηλαδή όταν η σχετική κίνηση είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής της μετοχικής κίνησης ή όταν η υ_σ είναι παράλληλη στον άξονα αυτόν σε κάποια χρονική στιγμή.

2.13.3 *Επίπεδη κίνηση*

Ειδικά στην επίπεδη κίνηση, δηλαδή στην κίνηση σώματος παράλληλα προς σταθερό επίπεδο Ox_1y_1 (Σχ. 2.39), η κίνηση του σώματος είναι ως γνωστό πλήρως καθορισμένη με τις συντεταγμένες x_{1A}, y_{1A} του πόλου και την γωνία φ περιστροφής περί τον πόλο. Το κινητό σύστημα Αxy είναι στερεά συνδεδεμένο με το σώμα και κινείται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.39.



Σχήμα 2.39: Επίπεδη κίνηση στερεού σώματος.

Αν ένα σημείο Μ κινείται στο επίπεδο Αxy η θέση του στο σώμα καθορίζεται με τις σχετικές συντεταγμένες x_M, y_M που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Οι $\dot{x}_M$, $\dot{y}_M$ καθορίζουν τις συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας του Μ ως προς παρατηρητή κινούμενον με το σώμα. Έτσι, παίρνοντας και τις $\ddot{x}_M$, $\ddot{y}_M$ ευρίσκουμε τις συνιστώσες της σχετικής επιτάχυνσης του Μ. Οι απόλυτες συντεταγμένες του Μ προκύπτουν ως προς το σταθερό σύστημα όπως παρακάτω:

$$x_1 = x_{1A} + x_M\cos\phi - y_M\sin\phi$$

$$y_1 = y_{1A} + y_M \sin\phi + y_M \cos\phi . \qquad (2.118)$$

Οι συνιστώσες της απόλυτης ταχύτητας του Μ προκύπτουν από παραγώγιση προς t των (2.118), δηλαδή είναι

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{1A} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi)\dot{\phi} + \dot{x}_M \cos\phi - \dot{y}_M \sin\phi ,$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_{1A} + (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi)\dot{\phi} + \dot{x}_M \sin\phi + \dot{y}_M \cos\phi . \qquad (2.119)$$

Οι δύο πρώτοι όροι κάθε μιάς από αυτές τις εξισώσεις προκύπτουν θεωρώντας τα x_M και y_M ως σταθερές στις διαφοριζόμενες εξισώσεις (2.118) και παριστάνουν τις συνιστώσες της ταχύτητας εκείνου του σημείου του σώματος με το οποίο το κινητό σημείο Μ συμπίπτει στην θεωρούμενη χρονική στιγμή. Οι δύο τελευταίοι όροι των (2.119) παριστάνουν τις προβολές στους σταθερούς άξονες της σχετικής ταχύτητας του Μ. Έτσι, από τις (2.119) προκύπτει ότι η απόλυτη ταχύτητα του Μ ισούται προς το γεωμετρικό άθροισμα δύο ταχυτήτων, της ταχύτητας του σημείου του σώματος με το οποίο συμπίπτει το Μ (μετοχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_\mu$) και της σχετικής ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}_\sigma$ του Μ ως προς το κινούμενο σώμα. Επομένως, ισχύει

$$\boldsymbol{\upsilon}_\alpha = \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_\mu + \boldsymbol{\upsilon}_\sigma .$$

Παίρνοντας τις δεύτερες παραγώγους ως προς t των (2.118) ευρίσκουμε στους σταθερούς άξονες τις συνιστώσες της απόλυτης επιτάχυνσης του Μ ως εξής:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_{1A} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi)\ddot{\phi} - (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi)\dot{\phi}^2 -$$
$$- 2(\dot{x}_M \sin\phi + \dot{y}_M \cos\phi)\dot{\phi} + \ddot{x}_M \cos\phi - \ddot{y}_M \sin\phi ,$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_{1A} - (x_M \cos\phi - y_M \sin\phi)\ddot{\phi} - (x_M \sin\phi + y_M \cos\phi)\dot{\phi}^2 +$$
$$+ 2(\dot{x}_M \cos\phi - \dot{y}_M \sin\phi)\dot{\phi} + \ddot{x}_M \sin\phi + \ddot{y}_M \cos\phi . \qquad (2.120)$$

Οι τρείς πρώτοι όροι κάθε μιάς από τις τελευταίες εξισώσεις προκύπτουν θεωρώντας τα x_M και y_M ως σταθερές κατά την διαφόριση. Επομένως, παριστάνουν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης εκείνου του σημείου του σώματος με το οποίο το Μ συμπίπτει στην δεδομένη χρονική στιγμή (μετοχική επιτάχυνση

γ_μ). Οι δύο τελευταίοι όροι στις (2.120) οφείλονται στην σχετική κίνηση του Μ ως προς το σώμα. Μπορούμε να χωρίσουμε αυτούς τους όρους σε δύο ομάδες:

i) τους όρους που περιέχουν τα $\ddot{x}_M$ και $\ddot{y}_M$ και που παριστάνουν τις προβολές στους σταθερούς άξονες της σχετικής επιτάχυνσης $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ του σημείου, και

ii) τους όρους που έχουν τον συντελεστή 2 και παριστάνουν την καλούμενη συμπληρωματική ή κοριόλειο επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_c$.