24/02/2021

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

$$\mathbf{\upsilon} = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\ )\ ,\quad \varepsilon_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)\ ,\quad \mathbf{\upsilon} = \upsilon\varepsilon_0$$

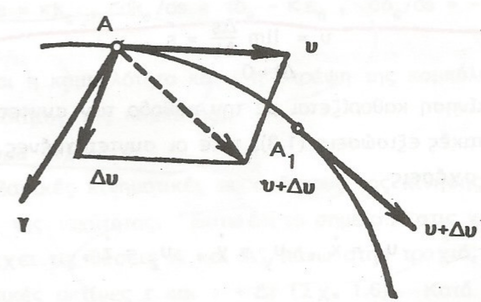
όπου cosα, cosβ, cosγ παριστούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος ε_0 με τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j**, **k** του απολύτου συστήματος αναφοράς αντίστοιχα (α, β, γ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες (Ox), (Oy) και (Oz) αντίστοιχα). Σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{i}$, $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{j}$ και $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{k}$ ευρίσκουμε

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\upsilon}\ ,\quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{\upsilon}\ ,\quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{\upsilon}\ . \tag{1.16}$$

1.2.2 *Διάνυσμα επιτάχυνσης*

Αναφερόμενοι στο Σχ. 1.7 παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\Delta\mathbf{\upsilon}$ διευθύνεται προς το εσωτερικό της τροχιάς. Καλούμε επιτάχυνση στο Α κατά την χρονική στιγμή t το διάνυσμα που δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{\upsilon}}{dt} = \dot{\mathbf{\upsilon}} = \ddot{\mathbf{r}}\ . \tag{1.17}$$



Σχήμα 1.7: Διάνυσμα επιτάχυνσης υλικού σημείου.

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης διευθύνεται προς το εσωτερικό της τροχιάς. Με βάση τις σχέσεις (1.12) και (1.17) προκύπτει

$$\mathbf{\gamma} = \dot{\mathbf{\upsilon}} = (\upsilon\varepsilon_0)^{\cdot} = \dot{\upsilon}\varepsilon_0 + \upsilon\dot{\varepsilon}_0\ . \tag{1.18}$$

Σύμφωνα τώρα με την πρώτη των διανυσματικών εξισώσεων Frenet (πρώτη των 1.10) και την (1.13) παίρνουμε

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\upsilon\mathbf{k}_0 = \frac{1}{R}\upsilon\,\mathbf{k}_0 . \tag{1.19}$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι η τελευταία σχέση προκύπτει επίσης με την βοήθεια του Σχήματος 1.7. Συνεπώς, η εξίσωση (1.18) γράφεται

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon + \boldsymbol{\gamma}_K , \quad \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = \dot{\upsilon}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0 , \quad \boldsymbol{\gamma}_K = \frac{\upsilon^2}{R}\mathbf{k}_0 \tag{1.20}$$

όπου τα διανύσματα $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ και $\boldsymbol{\gamma}_K$ έχουν αντίστοιχα μέτρα

$$\gamma = [\ \dot{\upsilon}^2 + (\upsilon^2/R)^2\ ]^{\frac{1}{2}} , \quad \gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon} , \quad \gamma_K = \upsilon^2/R . \tag{1.20α}$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε κάθε κίνηση σημείου η επιτάχυνση εκφράζεται ως διανυσματικό άθροισμα:

i) Της επιτρόχιας ή εφαπτομενικής συνιστώσας $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ με αλγεβρική τιμή $\dot{\upsilon}$, και

ii) Της κεντρομόλου ή κάθετης συνιστώσας $\boldsymbol{\gamma}_K$ με αλγεβρική τιμή υ^2/R.

Η πρώτη διευθύνεται πάνω στην εφαπτομένη της καμπύλης τροχιάς, ενώ η δεύτερη πάνω στην πρώτη κάθετο της καμπύλης και προς το κέντρο καμπυλότητος. Αν η κίνηση καθορίζεται με βάση την φυσική μέθοδο, δηλαδή την εξίσωση (1.1), τότε από τις σχέσεις (1.13) και (1.20) θα είναι

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{R}\mathbf{k}_0 , \quad \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds} . \tag{1.21}$$

Τέλος, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\gamma}$ μπορεί να καθορισθεί βάσει της (1.17) και από την εξίσωση

$$\boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} , \tag{1.22}$$

όπου το μέτρο γ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = (\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2\ )^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{1.22α}$$

Αν $\boldsymbol{\gamma}_0 = (\cos a_1 , \cos\beta_1 , \cos\gamma_1)$ παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα το αντιστοιχούν στο $\boldsymbol{\gamma}$, τότε με βάσει τις σχέσεις

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (a,\ b = \sigma\tau\alpha\theta.,\quad \omega>0) \tag{1.36}$$

μπορεί να μετασχηματισθεί στην εξίσωση (1.32). Πράγματι, η (1.36) γράφεται

$$x = \alpha \sin\theta \cos\omega t + \alpha \cos\theta \sin\omega t$$

όπου

$$\alpha = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \arctan\frac{a}{b} .$$

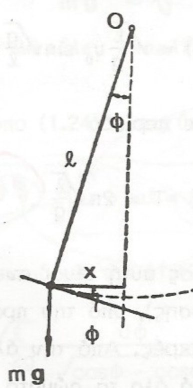
Έτσι, η εξίσωση (1.36) γράφεται

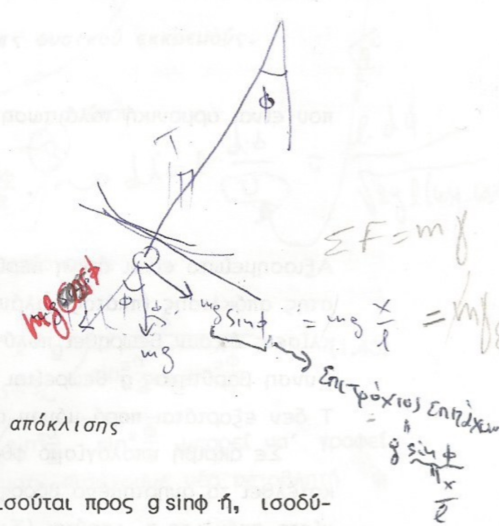
$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)}\,\sin(\theta + \omega t) = \alpha \sin(\theta + \omega t) . \tag{1.37}$$

δηλαδή η κίνηση που καθορίζεται από την (1.36) είναι αρμονική ταλάντωση.

1.3.6 Το απλούν (μαθηματικό) εκκρεμές

Σύμφωνα με το Σχ. 1.11 η κίνηση του ανηρτημένου βάρους προϋποθέτει επιτάχυνση ίση προς την επιτάχυνση της βαρύτητας g.





Σχήμα 1.11: Εκκρεμές μικρής απόκλισης

Συνεπώς, το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης ισούται προς $g\sin\phi$ ή, ισοδύναμα προς $g\frac{x}{\ell}$. Γιά πολύ μικρές αποκλίσεις, δηλαδή γιά πολύ μικρές γωνίες φ, αντί της επιτρόχιας επιτάχυνσης (d^2s/dt^2) του τύπου (1.21) μπορούμε να εισάγουμε κατά πρώτη προσέγγιση την οριζόντιο προβολή της ίση προς (d^2x/dt^2). Έτσι, η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$\Sigma F = m\ddot{r}$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\, g \sin\phi$

$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{x}{\ell}$

$w = \frac{g}{\ell}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x. \tag{1.38}$$

Δεδομένου ότι $(g/\ell) > 0$ η ολοκλήρωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές (1.38) καταλήγει στην

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t \tag{1.39}$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες

$$\text{γιά} \quad t = 0\,, \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0$$

ευρίσκουμε

$$c_1 = 0\,, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\upsilon_0$$

και επομένως

$$x(t) = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\upsilon_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t \tag{1.40}$$

που είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,. \tag{1.41}$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η περίοδος αυτή είναι ανεξάρτητη της γωνίας της μέγιστης απόκλισης (πλάτος ταλάντωσης), υπό την προϋπόθεση φυσικά ότι οι αποκλίσεις έχουν θεωρηθεί πολύ μικρές. Από την άλλη μεριά, επειδή η επιτάχυνση βαρύτητας g θεωρείται γιά όλα τα σώματα η ίδια, η ευρεθείσα περίοδος T δεν εξαρτάται παρά μόνον από το μήκος του εκκρεμούς.

Σε ακριβή υπολογισμό φθάνουμε όταν σκεφθούμε ότι το ύψος h, που έχει κατέλθει το ανηρτημένο βάρος από την ακραία θέση που αντιστοιχεί στην μεγίστη απόκλιση α, ισούται (Σχ. 1.12) προς $\ell(\cos\phi - \cos\alpha)$. Εξ άλλου, στην θέση αυτή το σώμα έχει αποκτήσει, σύμφωνα με την σχέση (1.28β), ταχύτητα που προκύπτει από την ισότητα

$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon^2 = \cancel{m}gh \Rightarrow \upsilon^2 = 2gh$

$\boxed{h = \ell(\cos\phi - \cos\alpha)}$ (2)

$$\boxed{h = \frac{\upsilon^2}{2g}} \quad (1)$$

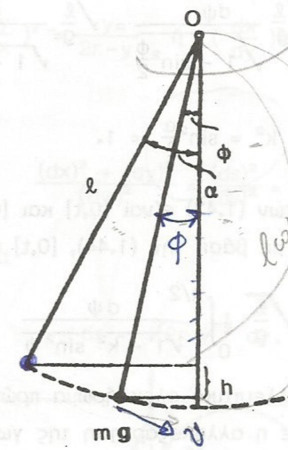
$\boxed{\upsilon = \sqrt{2g\ell(\cos\phi - \cos\alpha)}}$

Επομένως

(1),(2) $\Rightarrow$

$$\ell\,(\cos\phi - \cos\alpha\,) = \frac{\upsilon^2}{2g}\,. \tag{1.42}$$

$\upsilon = \ell\omega = \ell\frac{d\phi}{dt}$



Σχήμα 1.12: Μεγάλες αποκλίσεις φυσικού εκκρεμούς.

Αλλά σύμφωνα με τον τύπο (1.24) η ταχύτητα υ ισούται

$$\boxed{\upsilon = \omega\ell = \ell\frac{d\phi}{dt}\,.} \quad (3) \rightsquigarrow dt = \ell\frac{d\phi}{\upsilon} = \frac{\ell\,d\phi}{\sqrt{2g\ell(\cos\phi-\cos\alpha)}}$$

εκ της οποίας, σε συνδυασμό με την (1.42), παίρνουμε

$$dt = \ell\frac{d\phi}{\upsilon} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}}\,. \tag{1.43}$$

$\cos\phi = 1-2\sin^2\frac{\phi}{2}$, $\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο παρονομαστής $\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή $\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}$ $(k^2 < 1)$. Πράγματι, εισάγουμε νέα μεταβλητή ψ οριζόμενη από την σχέση

Θέτω $k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi \tag{1.44}$$

εκ της οποίας, μετά από διαφόριση ευρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\,d\phi = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi\,d\psi. \tag{1.45}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα αμφότερα τα μέλη της (1.43) με $\cos\frac{\phi}{2}$ και αντικαθιστώντας την ϕ με την ψ συνάγουμε

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\cos\frac{\phi}{2}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi}{2}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{1.46}$$

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} < 1.$$

Αν τα όρια ολοκλήρωσης των (1.43) είναι $[0,t]$ και $[0,\alpha]$, τότε τα όρια της ολοκλήρωσης στην (1.46) είναι, με βάση την (1.44), $[0,t]$ και $[0,\frac{\pi}{2}]$. Συνεπώς

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \tag{1.47}$$

που ουσιαστικά είναι πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους διδόμενο από πίνακες. Συνεπώς, βρέθηκε η αλληλεξάρτηση της γωνίας ψ και του χρόνου t, ή της γωνίας ϕ και του χρόνου t. Από την εξίσωση (1.47) είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την περίοδο T, δηλαδή τον χρόνο μιάς πλήρους ταλάντωσης, αν τετραπλασιάσουμε, δηλαδή

$$T = 4t. \tag{1.48}$$

Κατά προσέγγιση θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε κατά τον τύπο του διωνύμου την συνάρτηση $(1-k^2\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}$, οπότε αρκούμενοι στους δύο πρώτους όρους αυτής της σειράς, θα παίρναμε

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}(1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\psi)d\psi = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1+\frac{k^2}{4}) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1+\frac{\alpha^2}{16}) \tag{1.49}$$

1.3.7 *Η κίνηση επί κυκλοειδούς*

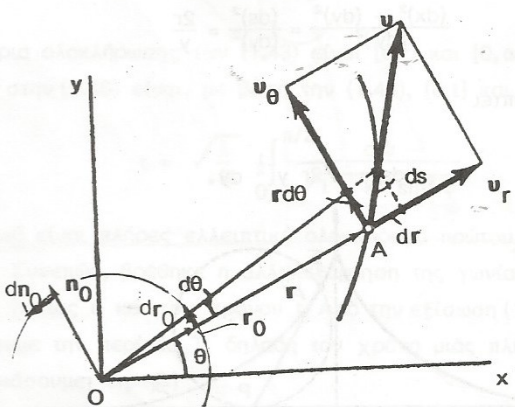
Η απλή κυκλοειδής καμπύλη γράφεται από κάθε σημείο Α της περιφέρειας κύκλου, ο οποίος κυλίεται επάνω σε σταθερή ευθεία αα (Σχ. 1.13). Συνεπώς, η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό είναι κάθετη στην (ΡΑ), που συνδέει το σημείο επαφής Ρ με το Α, και άρα διέρχεται από το διαμετρικό

$$s = 2\sqrt{2ry} = 2\,(KA) = 4r\,\sin\phi. \qquad (1.50\alpha)$$

1.4 Επίπεδη Κίνηση σε Πολικές Συντεταγμένες

Στο επίπεδο και σε σύστημα πολικών συντεταγμένων οι παράμετροι της κίνησης είναι

$$r = r(t)\ , \quad \theta = \theta(t) \qquad (1.51)$$



Σχήμα 1.14: Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες.

Η θέση του υλικού σημείου Α προσδιορίζεται με την διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r}$, γιά την οποία, αν $\mathbf{r}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, έχουμε

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0\ , \quad d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{r}_0 + r\,d\mathbf{r}_0\ , \qquad (1.52)$$
$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{r}_0 + r\,\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}.$$

Θεωρούμε τώρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}_0$ κάθετο επί του $\mathbf{r}_0$. Από την διαφόριση της εξίσωσης

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = 1$$

έπεται

$$2\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = 0 ,$$

δηλαδή ότι $\mathbf{r}_0 \perp d\mathbf{r}_0$.
Συνεπώς, γράφουμε με βάση το σχήμα 1.14

$$d\mathbf{r}_0 = d\theta\, \mathbf{n}_0$$

και επομένως η ταχύτητα **υ** από τις εξισώσεις (1.52) προκύπτει:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\theta}\,\mathbf{n}_0$$

$\dot\theta$

ή

$\upsilon_\theta = \omega . r$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\upsilon}_r + \boldsymbol{\upsilon}_\theta, \quad \upsilon_r = \dot{r} , \quad \upsilon_\theta = r\dot{\theta} . \qquad (1.53)$$

THIS

Εξ άλλου, το μέτρο της **υ** είναι ίσο

OK

$$\upsilon = (\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}} . \qquad (1.54)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες από το Σχ. 1.14 ευρίσκουμε

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \qquad (1.55)$$

από την παραγώγιση των οποίων παίρνουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \quad , \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \quad . \qquad (1.56)$$

Επομένως

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \ldots$

$$\upsilon = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

δηλαδή επανευρίσκουμε τον τύπο (1.54).

$v_r = \dot{r}$

Ομοίως

$v_\theta = r\dot{\theta}$

$$\gamma = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_r}{dt} + \frac{d\upsilon_\theta}{dt} = \ddot{r}\,\mathbf{r_0} + \dot{r}\frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + (r\dot{\theta})^{\cdot}\,\mathbf{n_0} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{n_0}}{dt}\,.$$

Αλλά, δεδομένου ότι

$$\mathbf{n_0} \cdot \mathbf{n_0} = 1 \rightarrow 2\mathbf{n_0} \cdot d\mathbf{n_0} = 0 \rightarrow \mathbf{n_0} \perp d\mathbf{n_0}$$

και με βάση το σχήμα 1.14 , συνάγουμε

$$d\mathbf{n_0} = -\,d\theta\,\mathbf{r_0}\,.$$

Συνεπώς, ο τύπος της **γ** μετασχηματίζεται στον

$$\boldsymbol{\gamma} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{r_0} + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{n_0} + (r\dot{\theta})^{\cdot}\,\mathbf{n_0} - r\dot{\theta}^2\mathbf{r_0}\,,$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma_r} + \boldsymbol{\gamma_\theta}\,,\quad \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\,,\quad \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{(r^2\dot{\theta})^{\cdot}}{r}\,. \qquad (1.57)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε αν παραγωγίσουμε τις (1.56). Πράγματι

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\sin\theta\,,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\cos\theta\,,$$

από τις οποίες, μετά την εκτέλεση απλών πράξεων, παίρνουμε

$$\gamma = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2]^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (1.57\alpha)$$

Η διανυσματική συνιστώσα $\boldsymbol{\gamma_r} = \gamma_r\mathbf{r_0} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{r_0}$ καλείται **ακτινική επιτάχυνση ή επιτάχυνση διαφυγής**, και η διανυσματική συνιστώσα $\boldsymbol{\gamma_\theta} = \gamma_\theta\mathbf{n_0} = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{n_0} = [(r^2\dot{\theta})^{\cdot}/r]\,\mathbf{n_0}$ καλείται **κάθετη επιτάχυνση ή επιτάχυνση περιφοράς.**

Με αναφορά πάλι το σχήμα 1.14 ορίζουμε:

i) ***Εμβαδική ταχύτητα*** $\mathbf{U_E}$ το διάνυσμα με μέτρο το εμβαδό που διαγράφεται

Αντικαθιστώντας στην (1.68) παίρνουμε

$$\gamma = -\frac{4E^2}{r^2}\frac{1}{p} . \tag{1.71}$$

Εάν η τροχιά είναι έλλειψη με α και β μέγιστο και ελάχιστο ημιάξονα ($\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{\beta^2}$), η επιτάχυνση, κατευθυνόμενη προς μιά των εστιών της έλλειψης, δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = -\frac{4E^2}{r^2}\frac{\alpha}{\beta^2} . \tag{1.72}$$

΄Εστω Τ ο χρόνος μιάς πλήρους περιφοράς. Επειδή η κατά τον χρόνον αυτόν καλυπτόμενη επιφάνεια έχει εμβαδόν παβ, συνάγεται ότι

$$E = \frac{\pi\alpha\beta}{T}, \qquad \gamma = -\frac{4\pi^2\alpha^3}{T^2}\frac{1}{r^2} = -K\frac{1}{r^2},$$
$$K = \frac{4\pi^2\alpha^3}{T^2} . \tag{1.73}$$

Προκειμένου περί κυκλικής τροχιάς είναι α = r και ο τελευταίος τύπος παίρνει την γνωστή μορφή

$$\gamma = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} . \tag{1.74}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εφαρμογή 1.2: Υλικό σημείο διαγράφει την κυκλική έλικα με αναλυτικές εξισώσεις

$$x = \alpha\cos\omega t\ , \quad y = \alpha\sin\omega t\ , \quad z = \lambda\omega t\ ,$$

$x=3\cos t,\ y=2+5\sin t,\ z=5$

όπου α, ω, λ είναι σταθερές και t ο χρόνος.

Ζητούμε:

α) Το μήκος του τόξου s(t) με αρχή το σημείο της έλικας που αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $t = 0$.

β) Τις προβολές υ_x, υ_y, υ_z του διανύσματος της ταχύτητας και τις προβολές γ_x, γ_y, γ_z του διανύσματος της επιτάχυνσης στους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, καθώς επίσης και τα μέτρα των παραπάνω διανυσμάτων.

γ) Την επιτρόχιο και κεντρομόλο επιτάχυνση των υλικών σημείων, καθώς επίσης την ακτίνα καμπυλότητος της έλικας, και

δ) Το εφαπτομενικό διάνυσμα $\varepsilon_0 = d\mathbf{r}/ds$ και το διάνυσμα $\varepsilon_0' = d\varepsilon/ds$.

Λύση: α) Η αρχή της έλικας που διαγράφει το υλικό σημείο προκύπτει από τις δοθείσες αναλυτικές εξισώσεις γιά $t = 0$, δηλαδή είναι το σημείο

$$(x_0,\ y_0,\ z_0) = (\alpha,\ 0,\ 0)\ .$$

Με εφαρμογή του τύπου (1.7) ευρίσκουμε

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ dt = \int_0^t \sqrt{\alpha^2\omega^2\sin^2\omega t+\alpha^2\omega^2\cos^2\omega t+\lambda^2\omega^2}\ dt =$$

$$= \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\int_0^t dt = \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\ t \qquad (10.3)$$

β) Οι σχέσεις (1.14) παρέχουν

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t\ , \quad \upsilon_y = \dot{y} = \alpha\omega\cos\omega t\ , \quad \upsilon_z = \dot{z} = \lambda\omega\ ,$$

ενώ μέσω της εξίσωσης (1.15) υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή

$$\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} = \text{σταθερά}\ . \qquad (10.4)$$

Εξ άλλου, από τον τύπο (1.22) ευρίσκουμε

$$\gamma_x = \ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t\ , \quad \gamma_y = \ddot{y} = \alpha\omega^2\sin\omega t\ , \quad \gamma_z = \ddot{z} = 0\ ,$$

ενώ η εξίσωση (1.22α) παρέχει το μέτρο της επιτάχυνσης

$$\gamma = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = \sqrt{\alpha^2\omega^4} = \alpha\omega^2 = \text{σταθερά}\ . \qquad (10.5)$$

γ) Εφαρμόζουμε τους τύπους (1.20), (1.20α), (10.4) και ευρίσκουμε

$$\gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\,\right] = 0\ , \qquad (10.6)$$

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2(\alpha^2+\lambda^2)}{R}\ .$$

Από την άλλη μεριά, από τις (10.6) υπολογίζουμε

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\varepsilon^2 + \gamma_\kappa^2} = \frac{\omega^2(\alpha^2+\lambda^2)}{R}\ . \qquad (10.7)$$

Εξισώνοντας τώρα τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (10.5) και (10.7) προσδιορίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας της έλικας

$$R = \frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha} = \text{σταθερά}\ .$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα κ προκύπτει

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} = \text{σταθερά}\ . \qquad (10.8)$$

δ) Γιά το τελευταίο ερώτημα εφαρμόζουμε κατ΄ αρχήν τον τύπο (1.9), δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \alpha \cos\omega t \ \mathbf{i} + \alpha \sin\omega t \ \mathbf{j} + \lambda\omega t \ \mathbf{k} \ ,$$

ο οποίος, βάσει της (10.3) μετασχηματίζεται στον

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \alpha \cos \frac{s(t)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{i} + \alpha \sin \frac{s(t)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{j} + \lambda \frac{s(t)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{k} \qquad (10.9)$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{i} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{j} + \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{k}$$

και επομένως

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{i} - \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} \sin \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \ \mathbf{j} + 0 \ \mathbf{k} \quad (10.10)$$

με μέτρο

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds} \right| = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} \ . \qquad (10.11)$$

Εφαρμογή 1.3: Υλικό σημείο διαγράφει την εκθετική (λογαριθμική) έλικα $r = \alpha e^{\theta}$ κατά τον νόμο $\theta = \omega t$, όπου α και ω είναι σταθερές (Σχ. 10.1).

Ζητούνται:

α) Το μέτρο της ταχύτητος και ο φορέας της σε σχέση με την πολική ακτίνα ΟΜ·

β) Το μέτρο της επιτάχυνσης και ο φορέας της σε σχέση με την πολική ακτίνα ΟΜ·

γ) Το μέτρο της ακτίνας καμπυλότητας γιά την τυχούσα θέση Μ του κινητού, και

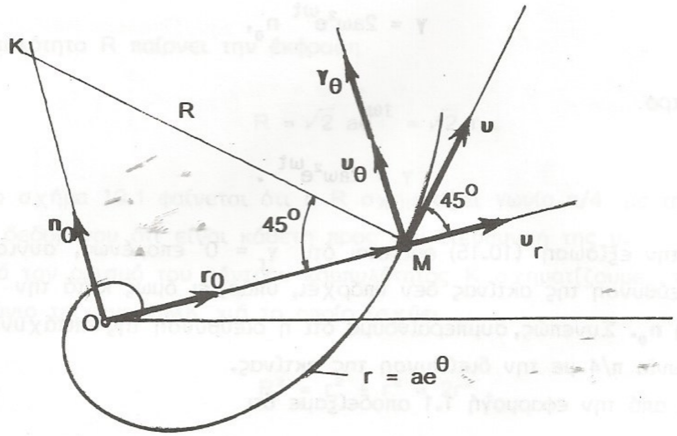
δ) Το αντίστοιχο κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς.

Λύση: α) Σύμφωνα με την παράγραφο 1.4, τον τύπο (1.53) και το σχήμα 10.1 έχουμε

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_r \mathbf{r}_0 + \upsilon_\theta \mathbf{n}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\theta}\mathbf{n}_0 \qquad (10.12)$$

όπου

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = a\omega e^{\omega t}\ , \qquad r\dot{\theta} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\,\omega = a\omega e^{\omega t}\ . \tag{10.13}$$



Σχήμα 10.1: Κίνηση υλικού σημείου σε λογαριθμική έλικα.

Συνεπώς, η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ προκύπτει

$$\boldsymbol{\upsilon} = a\omega e^{\omega t}\mathbf{r}_0 + a\omega e^{\omega t}\mathbf{n}_0$$

με μέτρο

$$\upsilon = \sqrt{2(a\omega e^{\omega t})^2} = \sqrt{2}\,a\omega e^{\omega t}\ . \tag{10.14}$$

Αφού τώρα $\upsilon_r = \upsilon_\theta$ ο φορέας της $\boldsymbol{\upsilon}$ με βάση το σχήμα 10.1 φαίνεται ότι σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με την διεύθυνση της κίνησης.

β) Με βάση πάλι τον τύπο (1.57) εξάγουμε

$$\boldsymbol{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{n}_0$$

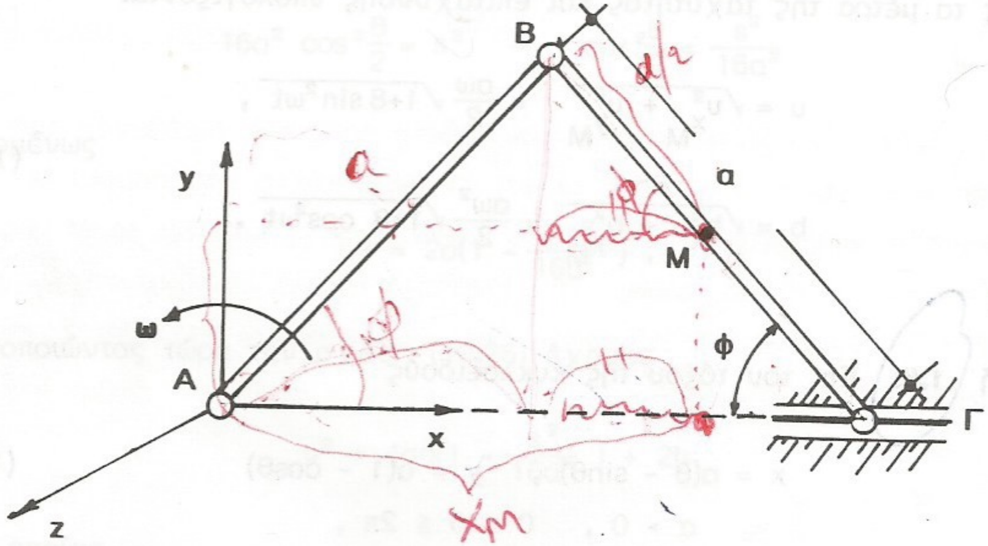
όπου

$$\ddot{r} = a\omega^2 e^{\omega t}\ , \quad \dot{\theta} = \omega\ , \quad \ddot{\theta} = 0\ .$$

Συνεπώς είναι

Εφαρμογή 1.5: Δύο ράβδοι ΑΒ και ΒΓ ίσων μηκών συνδέονται δι΄ αρθρώσεως στο Β. Η ΑΒ περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα διά του άκρου της Α με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ενώ το άκρο Γ της ΒΓ κινείται ευθύγραμμα (Σχ. 10.3). Ζητούνται η τροχιά, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του μέσου Μ της ΒΓ.

Λύση: Ορίζουμε το σύστημα συντεταγμένων Αxyz όπως φαίνεται στο σχήμα 10.3. Η γωνιακή ταχύτητα ω με μέτρο ω σταθερό έχει κατεύθυνση τον άξονα z. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ είναι



Σχήμα 10.3: Σύστημα ράβδων σε τριγωνικό σχηματισμό.

$$x_M = \alpha\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\cos\phi = \frac{3}{2}\alpha\cos\phi\,, \qquad (10.21)$$

$$y_M = \frac{\alpha}{2}\sin\phi\,.$$

Απαλείφοντας την γωνία ϕ από τις (10.21) καταλήγουμε στην

$$\frac{x_M^2}{\frac{3\alpha^2}{4}} + \frac{y_M^2}{\frac{\alpha^2}{4}} = 1 , \qquad (10.22)$$

που παριστάνει έλλειψη. Συνεπώς η τροχιά του μέσου της ράβδου ΒΓ είναι ελλειπτική.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας και επιτάχυνσης του Μ, δεδομένου ότι

$$\phi = \omega t ,$$

προκύπτουν

$$\upsilon_{x_M} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2}\alpha\omega \sin\omega t , \qquad \upsilon_{y_M} = \dot{y}_M = \frac{\alpha\omega}{2}\cos\omega t ,$$

$$b_{x_M} = \ddot{x}_M = -\frac{3}{2}\alpha\omega^2 \cos\omega t , \qquad b_{y_M} = \ddot{y}_M = -\frac{\alpha\omega^2}{2}\sin\omega t .$$

Επομένως τα μέτρα της ταχύτητας και επιτάχυνσης υπολογίζονται

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{x_M}^2 + \upsilon_{y_M}^2} = \frac{\alpha\omega}{2}\sqrt{1+8\sin^2\omega t} ,$$

$$b = \sqrt{b_{x_M}^2 + b_{y_M}^2} = \frac{\alpha\omega^2}{2}\sqrt{1+8\cos^2\omega t} . \qquad (10.23)$$

Εφαρμογή 1.6: Επί του τόξου της κυκλοειδούς

$$x = \alpha(\theta - \sin\theta) , \quad y = \alpha(1 - \cos\theta) \qquad (10.24)$$

$$\alpha > 0 , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi ,$$

κινείται υλικό σημείο ούτως ώστε

$$\upsilon^2 = 2(gy + h) , \quad g, h = \text{σταθερές} . \qquad (10.25)$$

Ζητούνται το είδος της κίνησης του σημείου και το διανυόμενο διάστημα από το σημείο συναρτήσει του χρόνου. Δίνεται ότι γιά $t = 0$ είναι $\upsilon = \upsilon_0 = 0$.

Λύση: Από τις εξισώσεις (10.24) παίρνουμε

$$dx = \alpha(1 - \cos\theta)d\theta\ , \qquad dy = \alpha\sin\theta\ d\theta\ . \tag{10.26}$$

Συνεπώς

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [\,\alpha^2(1-\cos\theta)^2 + \alpha^2\sin^2\theta]\,d\theta^2 = 4\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta^2$$

$(\alpha^2 + \alpha^2\cos^2\theta - 2\alpha^2\cos\theta + \alpha^2\sin^2\theta) = \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2\cos\theta = 2\alpha^2 - 2\alpha^2\cos\theta = 2\alpha(1-\cos\theta)$, $1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

και

$$s = 2\alpha\int_0^\theta \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = -\,4\alpha\,\cos\frac{\theta}{2}\,. \tag{10.27}$$

Με βάση τον ισχύοντα τύπο (10.25) πρέπει να εκφράσουμε την y συναρτήσει του s. Από την δεύτερη των εξισώσεων (10.24) παίρνουμε

$$y = \alpha(1-\cos\theta) = \alpha(1-2\cos^2\frac{\theta}{2}+1) = 2\alpha(1-\cos^2\frac{\theta}{2})\ .$$

Αλλά, μέσω της (10.27), υπολογίζουμε

$$16\alpha^2\cos^2\frac{\theta}{2} = s^2 \quad\rightarrow\quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{s^2}{16\alpha^2}$$

και επομένως

$$y = 2\alpha(1 - \frac{s^2}{16\alpha^2})\ . \tag{10.28}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση (10.25) έχουμε

$$\upsilon^2 = 4\alpha g(1 - \frac{s^2}{16\alpha^2}) + 2h$$

εκ της οποίας

$$\upsilon\dot{\upsilon} = -\alpha g\,\frac{s\dot{s}}{4\alpha^2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $\upsilon = \dot{s}$, $\dot{\upsilon} = \ddot{s}$ και αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση ευρίσκουμε

$$\dot{s}\ddot{s} = - g\frac{s\dot{s}}{4a} ,$$

η οποία γιά $\dot{s} \neq 0$ παίρνει την μορφή

$$\ddot{s} + \frac{g}{4a} s = 0 , \qquad (10.29)$$

που είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Ως γνωστόν, η γενική λύση της (10.29) είναι

$$s = C_1\cos kt + C_2\sin kt , \qquad k = \sqrt{\frac{g}{4a}} \qquad (10.30)$$

με παράγωγο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} = 2\pi \cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = \boxed{T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

$$\dot{s} = \upsilon = - C_1k\sin kt + C_2k\cos kt . \qquad (10.31)$$

Παίρνοντας τις αρχικές συνθήκες γιά $t = 0$, $\dot{s}_0 = \upsilon_0 = 0$, $s = s_0$, υπολογίζουμε το διάστημα s από τον τύπο

$$s = s_0 \cos kt . \qquad (10.32)$$

Εφαρμογή 1.7: Μία ράβδος (α) κινείται κάθετα προς την διεύθυνση της με ομοιόμορφη ταχύτητα c. Η ράβδος τέμνει σταθερό κύκλο στο σημείο Μ (Σχ. 10.4). Με ποία ταχύτητα υ και με ποία επιτάχυνση γ κινείται το Μ ως σημείο του κύκλου; Επίσης, βρείτε την ταχύτητα $υ_1$ και επιτάχυνση $γ_1$ του Μ ως σημείου της ευθείας (α). Εννοείται ότι των παραπάνω ταχυτήτων και επιταχύνσεων ζητούνται τα μέτρα.

Λυση: Το Μ ως σημείο του κύκλου έχει ταχύτητα $υ = ω\cdot r \Rightarrow \frac{c}{\sin φ} = \frac{dφ}{dt}$

$$υ = \frac{c}{\sin φ} = \frac{r\,dφ}{dt} \to \frac{dφ}{dt} = \frac{υ}{r} = \frac{c}{(r\sin φ)} = ω\,,$$

$\Rightarrow ω = \frac{dφ}{dt} = \frac{c}{r\sin φ}$

όπου ω παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα του Μ προς το κέντρο του κύκλου Ο. Συνεπώς, το Μ πάνω στον κύκλο έχει εφαπτομενική επιτάχυνση

$$γ_ε = \frac{dυ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sin φ}\right) = -\frac{c^2\cos φ}{(r\sin^3 φ)}$$

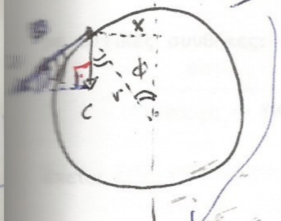
$γ = \sqrt{γ_ε^2 + γ_κ^2}$

$= -\boxed{\frac{c\cdot\cos φ}{\sin^2 φ}\cdot\frac{dφ}{dt}} \Leftarrow \frac{c}{r\sin φ} = -\frac{c^2\cos φ}{r\sin^3 φ}$

και κεντρομόλο επιτάχυνση

$$γ_K = \frac{υ^2}{r} = \frac{c^2}{(r\sin^2 φ)}\,.$$

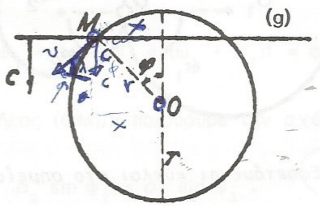
Αυτό



$\sin φ = \frac{c}{υ} \Rightarrow$

$\boxed{υ = \frac{c}{\sin φ}} \Rightarrow υ = \dots$

$\frac{dφ}{dt} = \frac{c}{r\sin φ} \Rightarrow φ(t) = \dots$



Σχήμα 10.4: *Κίνησης ευθείας σχετικά με κύκλο.*

$\sin φ = \frac{c}{υ} \Rightarrow \boxed{υ = \frac{c}{\sin φ}}$

$υ = ω\cdot r \Rightarrow \boxed{υ = \frac{dφ}{dt}\cdot r}$

$\frac{c}{\sin φ} = \frac{dφ}{dt}\cdot r \Rightarrow \boxed{\frac{dφ}{dt} = \frac{c}{r\sin φ}}$

Το μέτρο λοιπόν της συνολικής επιτάχυνσης του Μ, θεωρούμενου ως σημείου του κύκλου, είναι:

$$γ = (γ_ε^2 + γ_K^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^2}{(r\sin^3 φ)}\,, \quad γ_ε/γ_K = -\cot φ\,.$$

$γ_K = \frac{υ^2}{r} = \frac{\frac{c^2}{\sin^2 φ}}{r} \Rightarrow \boxed{γ_K = \frac{c^2}{r\sin^2 φ}}$

Το Μ τώρα, κινούμενο πάνω στην ευθεία (α), έχει προβολές διαστήματος, ταχύτητας και επιτάχυνσης τις εξής:

$\sin φ = \frac{x}{r} \Rightarrow$

$$x = r\sin φ\,, \quad υ_1 = \boxed{\dot x = r\cos φ\,\dot φ} = c\cot φ\,, \quad γ_1 = \boxed{\ddot x = r\cos φ\,\ddot φ - r\sin φ\,\dot φ^2} =$$

$$= -\frac{c^2}{(r\sin^3 φ)} = -γ\,.$$

$\dot φ = \frac{c}{r\sin φ}$