Εξισώσεις LAGRANGE

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

T= Κινητική Ενέργεια

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$\dot{q}_i$ = Γενικευμένες ταχύτητες

Q_j= Γενικευμένες Δυνάμεις

q_j= Γενικευμένες συντεταγμένες

όπου : $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

και j=1,2,…., k

Εξισώσεις LAGRANGE

Στην περίπτωση κατά την οποία οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

όπου: $V=V(r_1, r_2, \ldots, r_N)$

και $r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$

οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γίνονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = -\frac{\partial (V-V)}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Εφόσον η V δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$

$$V=V(r_1, r_2, \ldots, r_N)$$

Επομένως εισάγοντας μια καινούργια συνάρτηση L που ορίζεται ως L :

$$L = T - V$$

θα έχουμε :

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \\ &\boxed{L = T - V} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

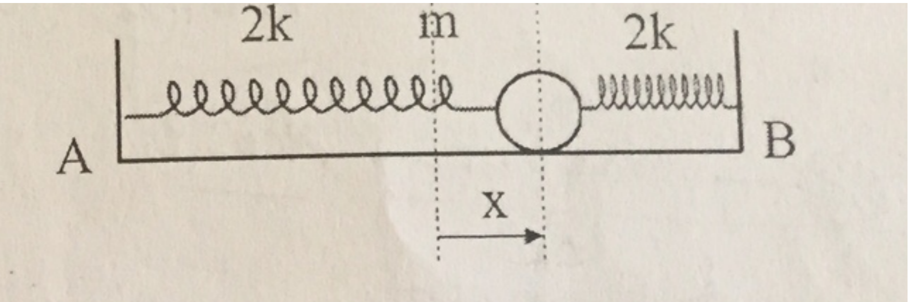
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση Lagrange**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΗ 11



ΘΕΜΑ 3: Μία μικρή μάζα m συνδέεται με δύο όμοια ελατήρια σταθεράς $2k$ το καθένα απ΄ αυτά. Η μάζα m είναι ελεύθερη να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια ευθεία πάνω σ' ένα οριζόντιο τραπέζι AB (σχήμα 2) και αρχικά τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Τα σημεία A και B όπου στερεώνονται τα άκρα των ελατηρίων είναι σταθερά. Θεωρώντας σαν μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση x της μάζας m σε μια τυχαία θέση από την θέση ισορροπίας να βρείτε:

(α) την συνάρτηση Lagrange του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(β) την εξίσωση Lagrange που διέπει την κίνηση του συστήματος **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

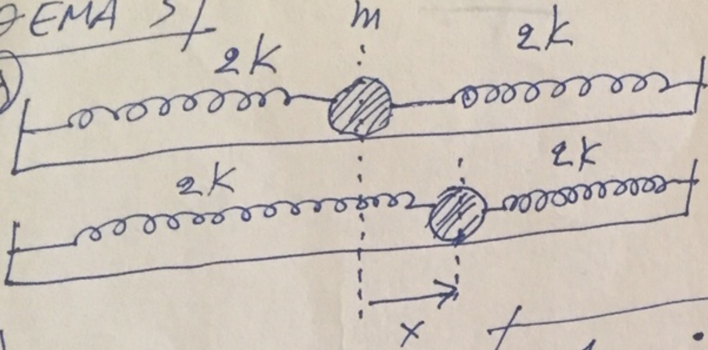
ΑΣΚΗΣΗ 11

ΘΕΜΑ 3

ΜΟΝ: 4

ΜΟΝ: 2 (i) $L = ;$

ΜΟΝ: 2 (ii) Εξισώσεις Lagrange



(i)

$$T = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2}$$

$$V = \frac{1}{2} 2k x^2 + \frac{1}{2} 2k (-x)^2 \Rightarrow V = kx^2 + kx^2 \Rightarrow \boxed{V = 2kx^2}$$

Οπότε: $\boxed{L = T - V} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2kx^2}$

ΜΟΝ: 2

(ii)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2} \dot{x} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + 4kx = 0}$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή t_1 έως την χρονική στιγμή t_2 είναι τέτοια ώστε το συναρτησιοειδές :

$$F=\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, \mathrm{q}, \mathrm{t})dt$$

όπου *L=T-V* , να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστο)

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα από όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο, επιλέγει εκείνη για την οποία η ποσότητα F γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα F ονομάζεται δράση του συστήματος

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η ποσότητα

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

είναι σταθερή και ονομάζεται Hamiltonian του συστήματος

Ορίζοντας ως γενικευμένη ορμή την ποσότητα που ορίζεται ως

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

τότε η Hamiltonian του συστήματος γράφεται:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

Εξισώσεις HAMILTON

Οι εξισώσεις :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Είναι γνωστές ως κανονικές εξισώσεις του Hamilton

Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων V(r). Δεν υπάρχει σύνδεσμος, επομένως:

$$\boxed{H = T + V}$$

$$\boxed{L = T - V}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες (r,θ) σαν γενικευμένες συντεταγμένες, τότε:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2r\,\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2r\,\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επομένως :

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \big(\dot{r}^{\,2}\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 - \cancel{2r\, \dot{r} \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}} + \dot{r}^{\,2}\sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \cancel{2r\, \dot{r} \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}}\big) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \big(\dot{r}^{\,2}\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \dot{r}^{\,2}\sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2\big) \longrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \big[\, \dot{r}^{\,2} \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + r^2 \dot{\theta}^2 \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} \,\big] \longrightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}$$

Εξισώσεις HAMILTON

Επομένως :

$$\boxed{L = T - V}$$

$$\left.\begin{aligned} & T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ & V = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Οπότε :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \longrightarrow p_r = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2} \dot{r} \longrightarrow p_r = m\dot{r}$$

Ομοίως :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \longrightarrow p_\theta = \cancel{\frac{1}{2}} m r^2 \cancel{2} \dot{\theta} \longrightarrow p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$$

Εξισώσεις HAMILTON

Συνεπώς :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$q_r = r$$

$$q_\theta = \theta$$

$$\longrightarrow$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$p_r = m\dot{r}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$\longrightarrow$$

Οπότε :

$$H = m\dot{r}\dot{r} + mr^2\dot{\theta}\dot{\theta} - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \longrightarrow$$

$$H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \longrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \longrightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Εξισώσεις HAMILTON

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Συνεπώς οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton γράφονται :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{2p_r}{2m} = \dfrac{p_r}{m} \longrightarrow \boxed{\dot{r} = \dfrac{p_r}{m}} \\[2ex] \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{2p_\theta}{2mr^2} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}} \end{cases}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right] = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \\[2ex] \qquad = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \longrightarrow \boxed{\dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r}} \\[2ex] \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \longrightarrow \boxed{\dot{p}_\theta = 0} \end{cases}$$

από την οποία, επειδή $\sin\theta \neq 0$, συνεπάγεται κατ΄ ανάγκη ότι

$$\phi = \text{σταθερά} .$$

Επομένως η κίνηση γίνεται με σταθερά ϕ, δηλαδή επί του μεσημβρινού της σφαίρας που είναι γεωδαισιακή γραμμή.

SOS

7.4 Αρχή της Ελάχιστης Δράσης

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε τις εξισώσεις Lagrange και τονίσαμε ότι η γνώση της L γιά το τυχόν ιδανικό μηχανικό πρόβλημα μας οδηγεί αυτομάτως στην λύση του προβλήματος της αναλυτικής δυναμικής μέσω των εξισώσεων (7.49). Η μέθοδος των εξισώσεων Lagrange είναι τόσο ισχυρή ώστε μπορεί να εφαρμοσθεί και σε περιοχές όπου δεν έχουμε καμιά απεικονιστική ιδέα του τί συμβαίνει, π.χ. πυρηνική φυσική. Τέτοιες περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των εξισώσεων Lagrange σε άλλες περιοχές της φυσικής βάζουν αυτομάτως ορισμένα ερωτήματα, όπως:

α) Είναι αυτοδύναμη η αναλυτική περιγραφή; δηλαδή μπορεί κανείς να ξεκινήσει πάντοτε από μιά γενική αρχή αναφερομένη στην ίδια την Lagrangian και όχι στους νόμους του Νεύτωνος;

β) Επειδή η L ορίζεται στην θεσεογραφικό χώρο, τι είδους γεωμετρική εικόνα μπορούμε να έχουμε στον χώρο αυτόν; Ποιό παραστατικά θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε: Είναι δυνατή η αναγωγή του αναλυτικού προβλήματος σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο θεσεογραφικό χώρο, και αν ναι, τί είδους νέα γεωμετρία θέτει το αναλυτικό πρόβλημα;

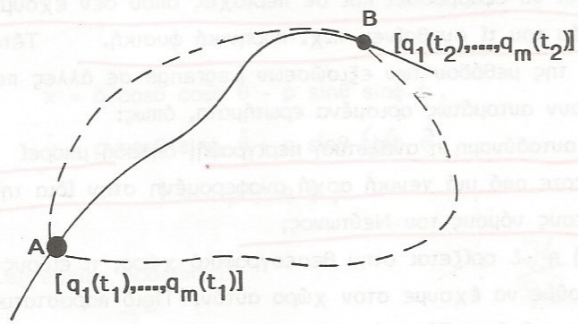
γ) Τι άλλα πράγματα η Lagrangian μπορεί να μας δόσει εκτός από τις εξισώσεις κίνησης; Μπορεί η Lagrangian να μας δόσει διατήρηση ενέργειας, ορμής, φορτίου και με ποιό τρόπο;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε λεπτομερώς στο ερώτημα (α). Θα δείξουμε δηλαδή ότι οι εξισώσεις Lagrange, που προήλθαν ουσιαστικά από τον νόμο του Νεύτωνος μέσω της αρχής των δυνατών έργων, προέρχονται επίσης από μιά αρχή η οποία αναφέρεται αυστηρά στην συνάρτηση Lagrange L. Η αρχή αυτή καλείται **αρχή της ελαχίστης δράσης** συναντάται δε και ως **αρχή Hamilton**. Η διατύπωση της είναι ως εξής: ***Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή t_1 στην χρονική στιγμή t_2 είναι τέτοια ώστε το συναρτησειοειδές*** δράση

$$F = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k,\ q_k,\ t)\ dt\ , \tag{7.51}$$

όπου $L = T - V$, να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστη).

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα διαλέγει απ΄ όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο εκείνη γιά την οποία η ποσότητα F γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα F καλείται **δράση του συστήματος.** Ας εξηγήσουμε τώρα λεπτομερέστερα τι εννοούμε λέγοντας εξέλιξη του φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο. Την χρονική στιγμή t_1 το σύστημα χαρακτηρίζεται πλήρως από τις m τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων q_k $(k = 1, \ldots, m)$. ΄Εστω λοιπόν το αντίστοιχο σημείο του θεσεογραφικού χώρου (Σχ. 7.5).



Σχήμα 7.5: Σημεία στον θεσεογραφικό χώρο.

Ομοίως, την χρονική στιγμή t_2 θα έχουμε ένα νέο σημείο του θεσεογραφικού χώρου. Τα ενδιάμεσα σημεία όμως είναι άγνωστα, δηλαδή η τροχιά του φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο είναι άγνωστη και δίνεται από την αρχή της ελαχίστης δράσης όπως προαναφέραμε.

Φυσικά η τροχιά που θα προκύψει πρέπει να είναι η ίδια με εκείνη που προκύπτει από τις εξισώσεις Lagrange (7.49). Με άλλα λόγια πρέπει να δείξουμε ότι η αρχή της ελαχίστης δράσης οδηγεί στις εξισώσεις Lagrange. Ξεκινάμε από την τροχιά $q_k(t)$, η οποία κάνει το συναρτησοειδές F ακρότατο. Αυτό σημαίνει πως γι΄ αυτήν την τροχιά και γιά πολύ μικρές μεταβολές της (μεταβολή από την $q_k(t)$ στην $q_k(t) + \delta q_k(t)$) η μεταβολή του F θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta F = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, q_k, t)\, dt = 0 . \tag{7.52}$$

Φυσικά όλες οι τροχιές που δοκιμάζουμε θα πρέπει κατά τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 να διέρχονται από τα σημεία A και B του θεσεογραφικού χώρου αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει

$$\delta q_k(t_1) = 0 , \quad \delta q_k(t_2) = 0 , \quad \delta q_k(t) \neq 0 , \tag{7.53}$$

με $k = 1, 2, \dots , m$, $t \in (t_1, t_2)$.
Με αυτή την προϋπόθεση το σύμβολο της ολοκλήρωσης και της μεταβολής δ εναλλάσσονται και επομένως παίρνουμε

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = 0 \tag{7.54}$$

ή

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0 . \tag{7.55}$$

Ο όρος $\frac{\partial L}{\partial t}\delta t$ δεν εμφανίζεται δεδομένου ότι δεν μεταβάλλεται ο χρόνος, δηλαδή η παράμετρος της τροχιάς, αλλά μόνον το είδος της τροχιάς στον θεσεογραφικό χώρο. Γιά να μας δόσει τώρα αποτέλεσμα η εξίσωση (7.55) πρέπει να εκφράσουμε το $\delta\dot{q}_k$ συναρτήσει του δq_k. Γιά τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης συναρτήσεων, δηλαδή

$$f\,\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(fg) - \left(\frac{df}{dt}\right) . g .$$

Στην περίπτωσή μας η εναλλαγή του δ με το σύμβολο της παραγώγισης $\frac{d}{dt}$ είναι επιτρεπτή, δεδομένου ότι η μεταβολή δ δεν αναφέρεται στον χρόνο t. Συνεπώς γράφουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt}(\delta q_k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k .$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (7.55) ευρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt\,. \qquad (7.56)$$

Ο δεύτερος όρος της (7.56) παρέχει

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \qquad (7.56a)$$

λόγω των συνθηκών (7.53). Κατά συνέπεια η αρχή της ελάχιστης δράσης καταλήγει στην συνθήκη

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\,dt=0\,. \qquad (7.57)$$

Η L είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[t_1, t_2]$ και επομένως γιά να ισχύει η (7.57) γιά αυθαίρετες μεταβολές των q_k πρέπει να έχει κανείς εκ ταυτότητος

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0\,, \qquad (7.58)$$

με $k = 1, \dots, m$, που είναι ακριβώς οι εξισώσεις Lagrange (7.49).

Ισχύει επίσης και το αντίστροφο, δηλαδή οι εξισώσεις Lagrange κάνουν το ολοκλήρωμα της δράσης ακρότατο. Τούτο προκύπτει αμέσως γιατί όλα τα βήματα από τις (7.53) στις (7.58) είναι αντιστρεπτά. Υπολογίζονται κατά συνέπεια το δF και χρησιμοποιώντας τις (7.58) καταλήγουμε στην (7.56a) που είναι μηδέν, άρα και $\delta F = 0$.

7.5 Θεωρήματα Διατήρησης και Ιδιότητες των Εξισώσεων Lagrange

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μορφή των εξισώσεων Lagrange είναι αναλλοίωτη στην αλλαγή των γενικευμένων συντεταγμένων. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες

$$q_k \longrightarrow q'_k = q'_k(q_1, \dots, q_m, t)\,, \qquad (7.59)$$

με $k = 1, \dots, m$. Τότε αν καλέσουμε με $L'(q'_k, \dot{q}'_k, t)$ την νέα Lagrangian αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right]\frac{\partial q_s}{\partial q'_k} . \quad (7.60)$$

Επειδή οι μετασχηματισμοί είναι παραδεκτοί, δηλαδή επειδή $\left|\frac{\partial q_s}{\partial q'_k}\right| \neq 0$, συνάγεται ότι αν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 ,$$

τότε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_s}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_s} = 0 .$$

Δεύτερη πολύ σπουδαία παρατήρηση είναι ότι η Lagrangian ενός μηχανικού προβλήματος, ακόμη και γιά δεδομένο γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων, δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πράγματι, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$L \longrightarrow L' = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} g(q,t) \quad (7.61)$$

όπου γιά ευκολία έχουμε παραλείψει τους δείκτες. Οι εξισώσεις Lagrange γιά την L' είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} . \quad (7.62)$$

Η (7.62) μας λέει ότι η καινούργια Lagrangian L' η οποία κατασκευάσθηκε μέσω του μετασχηματισμού (7.61), οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις του Lagrange στις οποίες οδηγεί και η L. Με άλλα λόγια οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς της μορφής (7.61). Οι μετασχηματισμοί (7.61) καλούνται **μετασχηματισμοί βαθμίδος** και επομένως συμπεραίνουμε ότι:

Οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδος. Δύο Lagrangian που συνδέονται με ένα μετασχηματισμό βαθμίδος θα καλούνται **ισοδύναμοι.**

Ύστερα από τις δύο παραπάνω θεμελιώδεις παρατηρήσεις διατυπώνουμε το εξής ερώτημα: ***Πώς εμφανίζονται τα θεωρήματα διατήρησης στην αναλυτική μηχανική των ολονόμων συστημάτων;***

Πρώτη περίπτωση: Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από την μεταβλητή q_i. Τότε η i - εξίσωση Lagrange (7.49) παρέχει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

ή

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{σταθ.} \tag{7.63}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ διατηρείται και την ονομάζουμε **γενικευμένη ορμή.**

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η γενικευμένη συντεταγμένη που διατηρείται δεν είναι πάντοτε και κάποια φυσική ποσότητα, και αν ακόμη δεν μας είναι εύκολο να διακρίνουμε σε ποιά ποσότητα της απεικονιστικής (Νευτώνειας) μηχανικής αντστοιχεί.

Η μεταβλητή q_i, η οποία δεν εμφανίζεται στην Lagrangian, καλείται **κυκλική.** Η εξίσωση δε (7.63) σημαίνει ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή της Lagrangian ενός συστήματος αντιστοιχεί και ένα διατηρούμενο μέγεθος.

Δεύτερη περίπτωση: Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο t, δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \,.$$

Τότε μέσω των εξισώσεων Lagrange (7.49) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j) = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j)\right] .$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(L-\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0\,.} \qquad (7.64)$$

Συνεπώς, η ποσότητα

$$\boxed{L-\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=-H} \qquad (7.65)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{H=\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L}$

p_j

$\boxed{H=\sum_j \dot{q}_j p_j - L}$

είναι σταθερή και καλείται **Hamiltonian** του συστήματος.

Διατυπώνουμε τώρα τα εξής δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 7.1: Η Hamiltonian ενός συστήματος είναι μιά σταθερά των εξισώσεων κίνησης του συστήματος τότε και μόνον τότε όταν η Lagrangian L δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή τότε και μόνον τότε όταν

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0\,.$$

Θεώρημα 7.2: Η Hamiltonian ενός μηχανικού συστήματος συμπίπτει με την σταθερά της ολικής ενέργειας τότε και μόνον τότε όταν

α) $\frac{\partial L}{\partial t}=0$,

β) Οι σύνδεσμοι του συστήματος είναι ανεξάρτητοι του χρόνου (σκληρόνομοι σύνδεσμοι)

Απόδειξη:

α) Από τον ορισμό της $L = T - V$ έχουμε

$$P_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,.$$

Συνεπώς

$$H=\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-L\,. \qquad (7.66)$$

β) Με βάση την υπόθεση, οι σύνδεσμοι δεν εξαρτώνται από τον χρόνο.

Επομένως γράφουμε

$$\upsilon_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

και

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \Big(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k} A_{jk}(q)\, \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

στην οποία

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} .$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q)\, \dot{q}_k$$

και

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q)\, \dot{q}_k \dot{q}_k = 2T . \tag{7.67}$$

Από τις (7.66), (7.67) και τον ορισμό της L παίρνουμε

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V . \tag{7.68}$$

Επειδή ακόμη

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

λόγω του θεωρήματος 7.1 είναι

$$H = \text{σταθερά}$$

και συνεπώς

$$H = T + V = \text{σταθ.} = E_{\text{ολ.}} \tag{7.69}$$

Χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες ορμές

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

η Hamiltonian γράφεται

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j\ p_j - L} \qquad (7.70)$$

$L = T - V$

7.6 Κανονική Εξίσωση Hamilton

Έχουμε ήδη ορίσει την Hamiltonian ως

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Λόγω του ορισμού της γενικευμένης ορμής μπορεί κανείς να εκφράσει την H ως H(p, q, t). Είναι δυνατόν τώρα να θεμελιώσει κανείς την μηχανική μέσω της Hamiltonian H κατά τρόπο ανάλογο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε γιά τις εξισώσεις Lagrange. Αυτή η θεμελίωση είναι πρόσφορη γιά γενικεύσεις (κβαντική μηχανική, θεωρία πεδίων). Γιά να γίνει αντιληπτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο θεμελιώσεις παρατηρούμε ότι στην μηχανική του Lagrange ένα μηχανικό σύστημα περιγράφεται πλήρως όταν δοθούν οι αρχικές τιμές των γενικευμένων θέσεων $q_i(0)$ και γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i(0)$ · στην μηχανική του Hamilton ξεχνάμε τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ και δουλεύουμε με τις γενικευμένες ορμές p_i, οι οποίες τώρα νοούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Η διαφορά είναι ουσιώδης, γιατί ενώ στην μηχανική του Lagrange γιά k βαθμούς ελευθερίας έχουμε k διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, στην μηχανική του Hamilton έχουμε 2k διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Διαφορίζοντας την H νοουμένη ως συνάρτηση των p, q, t έχουμε

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt. \qquad (7.71)$$

Διαφορίζοντας την (7.70) έχουμε επίσης

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i + \sum_i p_i \, d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \, . \quad (7.72)$$

Επειδή από τον ορισμό της γενικευμένης ορμής και τις εξισώσεις Lagrange ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \, ,$$

η (7.72) παρέχει

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \, . \quad (7.73)$$

Συγκρίνοντας τις (7.71), (7.73) καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \, , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \, .} \quad (7.74)$$

Οι (7.74) είναι γνωστές ως **κανονικές εξισώσεις του Hamilton** και, εφ΄ όσον δοθεί η H, αποτελούν διαφορικό σύστημα 2k εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η φυσική σημασία της H έχει ήδη μελετηθεί. Μπορούμε όμως να ξαναδούμε μερικά από τα χαρακτηριστικά της με την βοήθεια των (7.74). Ισχύει

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \, . \quad (7.75)$$

Μέσω τώρα των (7.74) η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \, . \quad (7.76)$$

συνεπώς

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (7.77)$$

και επομένως αν η Lagrangian δεν εξαρτάται από τον χρόνο το ίδιο συμβαίνει με την Hamiltonian και επιπλέον

$$H = \text{σταθερά} \, . \quad (7.78)$$

Ας θεωρήσουμε γιά παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων V(r). Δεν υπάρχει σύνδεσμος και

$$H = T + V\ ,$$

$$L = T - V\ ,$$

$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$\dot{x}=\cos\theta\,\dot{r} \to \dot{x}^2=\cos^2\theta\,\dot{r}^2$

$\dot{y}=\sin\theta\,\dot{r} \to \dot{y}^2=\sin^2\theta\,\dot{r}^2$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι πολικές συντεταγμένες

γεν. συν. (r, θ)

$$x = r\ \cos\theta\ ,$$

$$y = r\ \sin\theta\ .$$

$\dot{x}=-r\sin\theta\,\dot{\theta} \to \dot{x}^2=r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$

$\dot{y}=r\cos\theta\,\dot{\theta} \to \dot{y}^2=r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=r^2\dot{\theta}^2$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ , \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L \Rightarrow H=p_r\dot{q}_r+p_\theta\dot{q}_\theta - L \Rightarrow$

και συνεπώς

$\Rightarrow H=m\dot{r}\,\dot{r}+mr^2\dot{\theta}\,\dot{\theta}-L$

$\Rightarrow H=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2-L$ (T-V)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\ .$$

$\Rightarrow H=\frac{m^2\dot{r}^2}{m}+\frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^2}-L$

$H=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}-T+V$

Οι τέσσερεις κανονικές εξισώσεις Hamilton είναι

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\ , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}\ , \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}\ , \quad \dot{p}_\theta = 0\ .$$

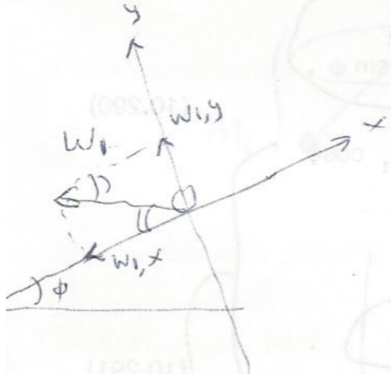
Οι δύο πρώτες είναι απλώς ταυτότητες και μας δίδουν την σχέση μεταξύ γενικευμένων ταχυτήτων και γενικευμένων ορμών. Οι δύο τελευταίες είναι οι εξισώσεις κίνησης και ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange.

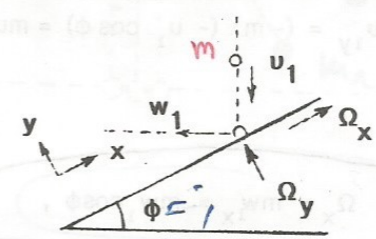
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

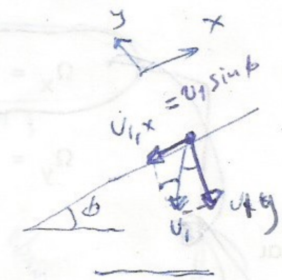
18/5/07

6. ΚΡΟΥΣΗ

Εφαρμογή 6.1: Μικρή σφαίρα μάζης m πίπτει κατακορύφως και συναντά κεκλιμένο επίπεδο (Σχ. 10.58). Αν ο συντελεστής κρούσης είναι κ κάθετα προς το επίπεδο, ζητείται η γωνία κλίσης του επιπέδου ούτως ώστε η σφαίρα μετά την κρούση να κινηθεί οριζόντια.







Σχήμα 10.58: Κρούση σφαίρας επί κεκλιμένου επιπέδου

Λύση: Κατά την κρούση καλούμε $\mathbf{υ}_1 = (υ_{1x}, υ_{1y})$ και $\mathbf{w}_1 = (w_{1x}, w_{1y})$ την ταχύτητα της σφαίρας m προ και ολίγον μετά την κρούση αντίστοιχα, ενώ με $\mathbf{Ω} = (Ω_x, Ω_y)$ το διάνυσμα της παρόρμησης κατά το στάδιο της συμπίεσης (Σχ. 10.58). Από την άλλη μεριά, οι ταχύτητες του δευτέρου σώματος, δηλαδή του κεκλιμένου επιπέδου, πριν και ολίγον μετά την κρούση αντίστοιχα, είναι

$\upsilon_2 = (0, 0)$ και $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$. Ας είναι τέλος $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_x, \upsilon_y)$ το κοινό διάνυσμα της ταχύτητος σφαίρας - επιπέδου κατά το τέλος της συμπίεσης. Η διανυσματική εξίσωση (6.6) γράφεται υπό αναλυτική μορφή ως εξής:

→ γιατί το άρα κεκλιμένο επίπεδο δεν κινείται θα πρέπει η $\upsilon_{κοινή} = 0$

I. Στάδιο συμπίεσης:

$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = \Omega$

$m_2(\upsilon - \upsilon_2) = -\Omega$

$$\text{΄Αξονας } x: \quad \Omega_x = m(\upsilon_x - \upsilon_{1x}),$$
$$\text{΄Αξονας } y: \quad \Omega_y = m(\upsilon_y - \upsilon_{1y}). \tag{10.288}$$

II. Στάδιο ανάπαλσης:

$m_1(w_1 - \upsilon) = \Omega$

$m_2(w_2 - \upsilon) = -\kappa\Omega$

$$\text{΄Αξονας } x: \quad \Omega_x = m(w_{1x} - \upsilon_x),$$
$$\text{΄Αξονας } y: \quad \kappa\Omega_y = m(w_{1y} - \upsilon_y). \tag{10.289}$$

$\upsilon_x = 0, \ \upsilon_y = 0$

Δεδομένου ότι $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{0}$ και λαμβανομένου υπ΄ όψη του σχήματος 10.58, οι εξισώσεις (10.288) και (10.289) γράφονται αντίστοιχα:

$$\Omega_x = -m\upsilon_{1x} = (-m)(-\upsilon_1 \sin\phi) = m\upsilon_1 \sin\phi,$$
$$\Omega_y = -m\upsilon_{1y} = (-m)(-\upsilon_1 \cos\phi) = m\upsilon_1 \cos\phi \tag{10.290}$$

και

κεκλιμένο επίπεδο

$$\Omega_x = mw_{1x} = mw_1 \cos\phi,$$
$$\kappa\Omega_y = mw_{1y} = mw_1 \sin\phi \tag{10.291}$$

Από τις δύο πρώτες των εξισώσεων (10.290) και (10.291) παίρνουμε

$$1 = \frac{\upsilon_1}{w_1} \tan\phi, \tag{10.292}$$

$\rightarrow \tan\phi = \dfrac{w_1}{\upsilon_1}$

ενώ από τις δύο τελευταίες των (10.290) και (10.291)

$$\kappa = \frac{w_1}{\upsilon_1} \tan\phi. \tag{10.293}$$

$\rightarrow \kappa = \tan^2\phi$

$\tan\phi = \sqrt{\kappa}$

$\tan\phi$

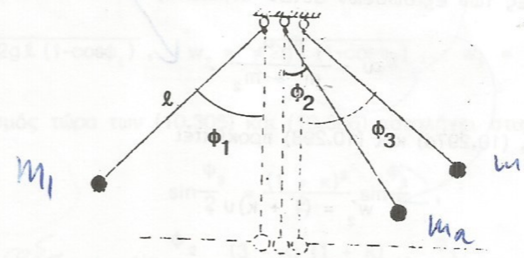
Συνεπώς υπολογίζουμε

$$\tan\phi = \sqrt{\kappa} \tag{10.294}$$

και

$$w_1 = \upsilon_1 \tan\phi = \sqrt{\kappa}\,\upsilon_1 . \tag{10.295}$$

Εφαρμογή 6.2: Τρεις σφαίρες μαζών m_1, m_2, m_3 είναι ανηρτημένες με αβαρή κατακόρυφα νήματα και ισορροπούν εν επαφή όπως φαίνεται στο σχήμα 10.59. Η σφαίρα m_1 εκτρέπεται κατά γωνία ϕ_1 και αφήνεται ελεύθερη. Ζητούνται οι γωνίες εκτροπής ϕ_2 και ϕ_3 των άλλων σφαιρών, όταν ο συντελεστής κρούσης είναι κ. Εφαρμογή γιά $m_1 = 2m_2 = 6m_3$.



Σχήμα 10.59: Σύστημα τριών σφαιρών εν επαφή.

Λύση: Πρόκειται περί κεντρικής ευθείας κρούσης επί του άξονος xx (Σχ. 10.59) τριών σωμάτων. Καλούμε με υ_1, υ_2, υ_3 τις τρεις ταχύτητες των μαζών προ της κρούσης και w_1, w_2, w_3 τα αντίστοιχα μεγέθη μετά την κρούση. Ας είναι επίσης Ω η παρόρμηση στο τέλος της συμπίεσης της κρούσης των δύο πρώτων σφαιρών και υ η κοινή τους ταχύτητα. Θεωρήσουμε τις δύο πρώτες μάζες m_1 και m_2. Αν καλέσουμε με w_1 και w_2' τις ταχύτητες αυτών μετά την κρούση, βάσει των εξισώσεων (6.16) και (6.17) μπορούμε να γράψουμε:

$$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = \Omega ,$$

$$m_2(\upsilon - \upsilon_2) = -\Omega , \tag{10.296}$$

$$m_1(w_1 - \upsilon) = \kappa\Omega ,$$

$$m_2(w_2' - \upsilon) = -\kappa\Omega ,$$

όπου κ παριστάνει τον συντελεστή κρούσης. Σημειώνοντας ότι $\upsilon_2 = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = \Omega , \tag{10.297a}$$

$$m_2\upsilon = -\Omega , \tag{10.297b}$$

$$m_1(w_1 - \upsilon) = \kappa\Omega , \tag{10.297c}$$

$$m_2(w_2' - \upsilon) = -\kappa\Omega . \tag{10.297d}$$

Από τις δύο πρώτες των εξισώσεων αυτών ευρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} . \tag{10.298}$$

Από τις (10.297b), (10.297d) και (10.298) προκύπτει

$$w_2' = (1 + \kappa)\upsilon , \tag{10.299}$$

ενώ από τις ίδιες εξισώσεις σε συνδυασμό με την (10.298) προκύπτει επίσης

$$w_2' = (1 + \kappa)\frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} . \tag{10.300}$$

Θεωρούμε τώρα τις δύο επόμενες σφαίρες με μάζες m_2 και m_3, με ταχύτητες πριν την κρούση w_2', υ_3, ταχύτητες μετά την κρούση w_2, w_3 και κοινή ταχύτητα κατά το τέλος της σύνθλιψης ίση προς υ'. Λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι $\upsilon_3 = 0$, ότι η w_2' δίνεται συναρτήσει της υ ή υ_1 μέσω των τύπων (10.299) και (10.300) και ακολουθώντας τελείως ανάλογη προς την παραπάνω πορεία επίλυσης, ευρίσκουμε:

$$\upsilon' = \frac{m_2w_2'}{m_2 + m_3} , \tag{10.301}$$

$$w_3 = (1 + \kappa)\frac{m_2w_2'}{m_2 + m_3} = (1 + \kappa)^2\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}\upsilon_1 . \tag{10.302}$$

Από τις εξισώσεις (10.297a) και (10.297c) έχουμε

$$w_1 = (1+\kappa)\upsilon - \kappa\upsilon_1 \,, \tag{10.303}$$

ενώ γιά την δεύτερη κρούση αντίστοιχα

$$w_2 = (1+\kappa)\upsilon' - \kappa w' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{m_2-\kappa m_3}{m_2+m_3}\,(1+\kappa)\upsilon_1 \,. \tag{10.304}$$

Με βάση τώρα την συνθήκη $m_1 = 2m_2 = 6m_3$ οι εξισώσεις (10.302) και (10.304) παρέχουν

$$w_3 = (1+\kappa)^2\,\frac{\upsilon_1}{2}\,, \qquad w_2 = \frac{(3-\kappa)\,(1+\kappa)}{6}\,\upsilon_1 \,. \tag{10.305}$$

Είναι όμως από το σχήμα 10.59

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell\,(1-\cos\phi_1)}\,, \quad w_2 = \sqrt{2g\ell\,(1-\cos\phi_2)}\,, \quad w_3 = \sqrt{2g\ell\,(1-\cos\phi_3)}\,. \tag{10.306}$$

Ο συνδυασμός τώρα των (10.305) και (10.306) καταλήγει στις εκφράσεις

$$\sin\frac{\phi_3}{2} = \frac{(1+\kappa)^2}{2}\sin\frac{\phi_1}{2}\,,$$
$$\sin\frac{\phi_2}{2} = \frac{(3-\kappa)\,(1+\kappa)}{6}\sin\frac{\phi_1}{2}\,. \tag{10.307}$$

505

Εφαρμογή 6.3: Ράβδος μήκους ℓ και μάζης m κινείται παράλληλα προς εαυτή με σταθερή ταχύτητα υ_0, της οποίας το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονά της (Σχ. 10.60). Κατά την κίνηση η ράβδος συναντά μικρό εμπόδιο σε απόσταση (ℓ/4) από το κέντρο βάρους της. Ζητούνται τα μεγέθη κίνησης της ράβδου ευθύς μετά την κρούση και η παρόρμηση του εμποδίου. Η κρούση θεωρείται ανελαστική και ανευ ολισθήσεως.

του κέντρου βάρους
$w = ;$
$\Omega = ;$

Λύση: Πρόκειται περί έκκεντρης κρούσης. Θεωρούμε το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz του σχήματος 10.60 και έστω Ω η συνολική παρόρμηση του εμποδίου και **w** η ταχύτητα του κέντρου βάρους της ράβδου μετά την κρούση.

Το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά όλο το φαινόμενο της κρούσης, που δίνεται από τον τύπο (6.6), γράφεται

$m(w - v_0) = \Omega$

$\Delta G = \vec r \times \vec \Omega \Rightarrow J_S \cdot \omega = \frac{\ell}{4}\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{4 J_S \omega}{\ell}$, $J_S = \frac{m\ell^2}{12}$ $\Rightarrow \Omega = \frac{m\omega\ell}{3}$

$\frac{dG}{dt} = \vec r \times \vec F \Rightarrow d\vec G = \vec r \times \vec F\, dt$

ΘΜΟ

$$m(\mathbf{w} - \mathbf{\upsilon}_0) = \Omega, \qquad (10.308)$$

$\Rightarrow \vec w - \vec v_0 = \frac{\Omega}{m}$

ενώ το θεώρημα μεταβολής της συστροφής ως προς τον άξονα z, που δίνεται από την τρίτη των εξισώσεων (6.12) σε συνδυασμό με την τρίτη των εξισώσεων (4.60), γράφεται

ΘΜΣ

$\Delta G = \Sigma r \times \Omega_i$

$$J_S\, \omega\, \mathbf{k} = \mathbf{SH} \times \Omega = \frac{\ell}{4}\, \Omega\, \mathbf{k} \qquad (10.309)$$

$J_S \omega = \frac{\ell}{4}\Omega$

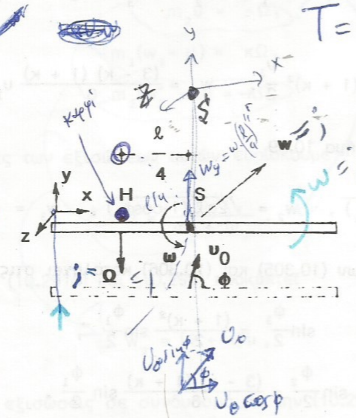
$\Omega = \frac{4 J \omega}{\ell}$

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

$T = \frac{1}{2} J \omega^2$

$G = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \frac{1}{2} J 2\omega$

$G = J \omega$



$w = 0$

$\Omega = 1$

Σχήμα 10.60: Κίνηση ράβδου παράλληλα προς εαυτή.

Από το είδος της κρούσης συνάγεται η έκφραση

$$\Omega = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} = -\Omega\, \mathbf{j} \qquad (10.310)$$

Από την εξίσωση (10.309) υπολογίζουμε

$$\Omega = \frac{4 J_S \omega}{\ell},$$

$J_S = \frac{m\ell^2}{12}$

η οποία με βάση την εφαρμογή 4.1 γράφεται

$$\Omega = \frac{m \omega \ell}{3} \qquad (10.311)$$

$W_x = \frac{\Omega x}{m} + v_{0x}$ (1) $\Rightarrow W_x = v_0 \cos\phi$

$W_y = \frac{\Omega y}{m} + v_{0y}$ (2) $\Rightarrow \boxed{W_y = -\frac{\Omega}{m} + v_0 \sin\phi}$ (3)

(3) $\boxed{W_y = -\frac{\Omega}{m} + v_0 \sin\phi}$

Από την (10.308) παίρνουμε

$\vec{w} = -\frac{\Omega}{m} + \vec{v}_0$

$$\mathbf{w} = -\frac{\Omega}{m}\, j + \upsilon_0 \,. \tag{10.312}$$

Είναι τώρα σαφές ότι η ταχύτητα του στηρίγματος Η είναι μηδενική, δηλαδή (4)

$$\upsilon_H = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\upsilon_H = 0 = \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{SH} = \mathbf{w} + \omega \frac{\ell}{4} (k \times (-i)) = \mathbf{w} - \frac{\omega \ell}{4}\, j$$

ή

$$0 = j \cdot \mathbf{w} - \frac{\omega\ell}{4} \rightarrow j \cdot \mathbf{w} = \frac{\omega\ell}{4} \,. \tag{10.313}$$

$v_H = 0 \Rightarrow$

$W_y + \omega\left(\frac{\ell}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$W_y = \frac{\omega\ell}{4}$ (4)

Εισάγοντας την (10.312) στην (10.313) ευρίσκουμε

$(3),(4) \Rightarrow \frac{\omega\ell}{4} = -\frac{\Omega}{m} + v_0 \sin\phi$

$$j \cdot \left(-\frac{\Omega}{m}\, j + \upsilon_0\right) = \frac{\omega\ell}{4}$$

ή

$$-\frac{\Omega}{m} + j \cdot (\upsilon_0 \cos\phi\, i + \upsilon_0 \sin\phi\, j) = \frac{\omega\ell}{4}$$

$\frac{\omega\ell}{4} = -\frac{m\omega\ell}{3m} + v_0 \sin\phi$

$\frac{\omega\ell}{4} + \frac{\omega\ell}{3} = v_0 \sin\phi$

ή ακόμη

$\Omega = \frac{m\omega\ell}{3}$

$$\upsilon_0 \sin\phi - \frac{\Omega}{m} = \frac{\omega\ell}{4} \,.$$

$\frac{7\omega\ell}{12} = v_0 \sin\phi$

$\omega = \frac{12}{7}\frac{v_0 \sin\phi}{\ell}$

από την οποία, μέσω και της (10.311), υπολογίζουμε

$$\omega = \frac{12\upsilon_0 \sin\phi}{7\ell} \,. \tag{10.314}$$

$\omega = ;$

$\ell = ;$

Τέλος, από την (10.312) ευρίσκουμε

$$\mathbf{w} = -\frac{\Omega}{m}\, j + \upsilon_0 = -\frac{\omega\ell}{3}\, j + \upsilon_0 \cos\phi\, i + \upsilon_0 \sin\phi\, j =$$

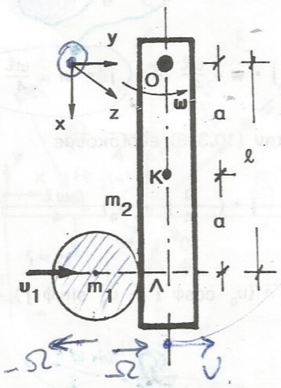
$$= \left(\upsilon_0 \sin\phi - \frac{\omega\ell}{3}\right) j + \upsilon_0 \cos\phi\, i = \; V_0 \cos\phi\, i + \left(V_0 \sin\phi - \frac{\omega\ell}{3}\right) j$$

$$= \upsilon_0 \cos\phi\, i + \frac{3}{7}\upsilon_0 \sin\phi\, j \,. \tag{10.315}$$

Εφαρμογή 6.4: Υλικό σημείο μάζης m_1 και ταχύτητος $\mathbf{υ_1}$ κρούει στερεό σώμα μάζης m_2 που μπορεί να περιστραφεί περί σταθερό άξονα O. Τα σώματα κατά την στιγμή της κρούσης ευρίσκονται σε ηρεμία. Η διεύθυνση της κρούσης συναντά τον άξονα συμμετρίας του σώματος με αποτέλεσμα η αντίδραση κρούσης στό O να είναι μία οριζόντια δύναμη (Σχ. 10.61). Ζητούνται:

α) Η κοινή ταχύτητα $\mathbf{υ}$ στο τέλος της σύνθλιψης, και

β) Οι ταχύτητες $\mathbf{w_1}$ και $\mathbf{w_2}$ μετά την ανάπαλση, καθώς και η παρόρμηση αντίδρασης Ω_0 στην στήριξη κατά την διάρκεια της όλης κρούσης.



Σχήμα 10.61: Έκκεντρη ανελαστική κρούση σφαίρας και ράβδου.

Λύση: Το στερεό σώμα μάζης m_2, εκτός της παρόρμησης $\mathbf{\Omega}$ του κρούοντος υλικού σημείου μάζης m_1, υπόκειται και στην παρόρμηση της αντίδρασης $\mathbf{\Omega_0}$ στο O. Αν J_0 είναι η ροπή αδρανείας του σώματος m_2 ως προς O και i_0 η ακτίνα αδρανείας τότε, βάσει του θεωρήματος μεταβολής της συστροφής ως προς άξονα παράλληλο προς τον z και διερχόμενο από το O καθώς επίσης και της εξίσωσης (4.60), έχουμε

$$J_0\, ω\, \mathbf{k} = \mathbf{ΛO} \times \mathbf{\Omega} = \ell\Omega\,(-\mathbf{i})\times(-\mathbf{j}) = \ell\Omega\,\mathbf{k}$$

ή

$$ω = \frac{\ell\Omega}{J_0} = \frac{\ell\Omega}{m_2\, i_0^2}\,, \tag{10.316}$$

αν για σώμα μάζης M η ροπή αδρανείας του ως προς άξονα δίνεται από την σχέση $I = Mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{M}}$, ράβδο $k = \frac{L}{2\sqrt{3}}$

$i_0 = \sqrt{\frac{J}{A=εμβ}}$

όπου i_0 είναι ακτίνα αδρανείας ως προς O.

Είναι τώρα σαφές ότι κατά το τέλος του σταδίου της σύνθλιψης η κοινή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ των δύο σωμάτων προκύπτει από την σχέση

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\, \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O\Lambda} = \omega \ell\, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \omega \ell\, \mathbf{j} \ ,$$

η οποία, με βάση την (10.316) δίδει το μέτρο υ

$$\upsilon = \omega \ell = \frac{\Omega \ell^2}{m_2 i_0^2} \tag{10.317}$$

εκ της οποίας

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{j} \ , \quad \Omega = \frac{m_2 i_0^2}{\ell^2}\, \upsilon = \mu_2 \upsilon \ , \quad \mu_2 = \frac{m_2 i_0^2}{\ell^2} \ . \tag{10.318}$$

Από την άλλη μεριά, βάσει της αρχής διατηρήσεως της ορμής και λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_2$ του σώματος μάζης m_2 είναι πριν την κρούση μηδενική, η διανυσματική έκφραση των εξισώσεων (6.16), 6.17) είναι:

$$m_1(\upsilon \mathbf{j} - \upsilon_1 \mathbf{j}) = -\Omega \mathbf{j} \ , \quad m_1(\mathbf{w}_1 - \upsilon \mathbf{j}) = -\kappa \Omega \mathbf{j}$$
$$m_2 \upsilon \mathbf{j} = \Omega \mathbf{j} \ , \quad m_2(\mathbf{w}_2 - \upsilon \mathbf{j}) = \kappa \Omega \mathbf{j} \ , \tag{10.319}$$

στις οποίες $\mathbf{w}_1$ και $\mathbf{w}_2$ παριστάνουν τις τελικές ταχύτητες των μαζών m_1 και m_2 και κ ο συντελεστής κρούσης. Σημειώνουμε εδώ ότι στο σχήμα 10.61 το διάνυσμα της παρόρμησης $\boldsymbol{\Omega}$ έχει παρασταθεί ως αντίδραση της μάζας m_2 στην μάζα m_1, επειδή με βάση το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγή το $\boldsymbol{\Omega}$ γράφεται

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{j} \ ,$$

δικαιολογείται η αλλαγή προσήμου των δευτέρων μελών των (10.319) σε σύγκριση με τις (6.16) και (6.17). ΄Ετσι, οι (10.319) γράφονται και υπό αναλυτική μορφή ως εξής:

$$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = -\Omega \ , \quad m_1(w_1 - \upsilon) = -\kappa\Omega \ ,$$
$$m_2 \upsilon = \Omega \ , \quad m_2(w_2 - \upsilon) = \kappa \Omega \ . \tag{10.320}$$

$m_2(\upsilon - \upsilon_2) = \Omega$

0

Λαμβανομένου δε υπ΄ όψη ότι με βάση τις (10.318) είναι

$$\Omega = \mu_2 \upsilon ,$$

οι (10.320) γράφονται τελικά

$$\left.\begin{aligned} & m_1(\upsilon - \upsilon_1) = -\Omega , \quad m_1(w_1 - \upsilon) = -\kappa\Omega , \\ & \mu_2 \upsilon = \Omega , \; \mu_2(w_2 - \upsilon) = \kappa\Omega \end{aligned}\right\} \qquad (10.321)$$

δεδομένου ότι

$$\mu_2 = m_2 .$$

Από τις (10.321) υπολογίζουμε

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \qquad \Omega = \frac{\mu_2 m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \qquad (10.322)$$

$$w_1 = \frac{(m_1 - \kappa\mu_2)\upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \quad w_2 = \frac{(1+\kappa)m_1\upsilon_1}{\mu_2 + m_1} = (1+\kappa)\upsilon .$$

Οι ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon}_K$, $\mathbf{w}_K$ του κέντρου μάζης του σώματος m_2 κατά το τέλος της σύνθλιψης και ανάπαλσης προκύπτουν από την παρατήρηση ότι το σημείο στήριξης O είναι κέντρο μηδενικής ταχύτητος, δηλαδή

$$\boldsymbol{\upsilon}_K = \upsilon_K \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OK} = \omega a\, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \omega a\, \mathbf{j} = \frac{\upsilon a}{\ell}\, \mathbf{j} = \frac{m_1 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}\, \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{w}_K = w_K \mathbf{j} = \frac{(1+\kappa)\upsilon a}{\ell}\, \mathbf{j} = \frac{(1+\kappa) m_1 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}\, \mathbf{j} , \qquad (10.323)$$

όπου κατά το στάδιο του τέλους της ανάπαλσης με βάση την πρώτη και τέταρτη των (10.322) τέθηκε αντί υ η (1 + κ)υ.

Αν Ω'_0 είναι η παρόρμηση της αντίδρασης κατά την σύνθλιψη, ισχύει με βάση την τρίτη των (10.320)

$$\Omega + \Omega'_0 = m_2 \boldsymbol{\upsilon}_K ,$$

οπότε, μέσω των (10.322) και (10.323), η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{\mu_2 m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} + \Omega'_0 = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}$$

ή

$$\Omega_0' = \frac{m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} \left[\frac{m_2 \alpha}{\ell} - \mu_2 \right] . \qquad (10.324)$$

Από την άλλη μεριά, η παρόρμηση Ω_0 κατά την διάρκεια της όλης κρούσης προκύπτει

$$\Omega_0 = (1+\kappa)\Omega_0' = \frac{(1+\kappa) m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} \left[\frac{m_2 \alpha}{\ell} - \mu_2 \right] . \qquad (10.325)$$

Η ισότητα

$$\Omega_0 = \Omega_0'$$

ισχύει προφανώς εφ΄ όσον

$$\mu_2 = \frac{m_2 \alpha}{\ell} = \frac{m_2 i_0^2}{\ell} ,$$

δηλαδή εφ΄ όσον

$$i_0^2 = \alpha \ell$$

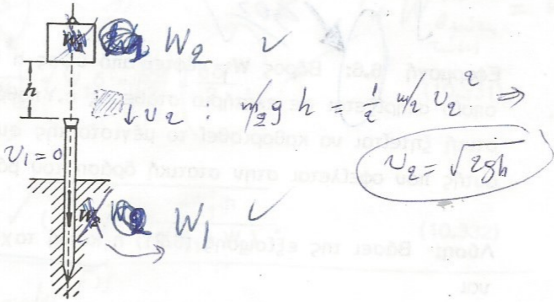
ή ακόμη

$$i_K^2 = i_0^2 - \alpha^2 = \alpha \alpha' ,$$

που σημαίνει ότι ο άξονας Ο διέρχεται από το κέντρο κρούσης Λ.

√ ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

Εφαρμογή 6.5: Ξύλινος πάσσαλος βάρους $\mathbf{W_1}$ λόγω κτυπήματος από σφύρα βάρους $\mathbf{W_2}$, που πέφτει από ύψος h, διεισδύει κατά μήκος β εντός του εδάφους (Σχ. 10.62). Ζητείται η αντίδραση κατά την διείσδυση. Η κρούση θεωρείται τελείως πλαστική.



Σχήμα 10.62: Διείσδυση πασσάλου διά κρούσης.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Λύση: Με βάση την εξίσωση (6.21) η κοινή ταχύτητα υ μετά την σύνθλιψη είναι

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad v = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} \quad m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\upsilon = \frac{W_2 \upsilon_2}{W_1 + W_2} = \frac{W_2\sqrt{2gh}}{W_1 + W_2} \tag{10.326}$$

Γιά κρούση απόλυτα πλαστική η κινητική ενέργεια K σφύρας και πασσάλου καθώς και το έργο της βαρύτητος $(W_1 + W_2)\delta$ αναλίσκονται στο έργο αντίδρασης $B\beta$, δηλαδή

ΘΜΚΕ

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K - 0 = (W_1 + W_2)\delta + N \cdot b \Rightarrow K \simeq N \cdot b \Rightarrow \frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon^2 \simeq N \cdot b \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \simeq N \cdot b$$

$$K + (W_1 + W_2)\delta = B\beta\ . \tag{10.327}$$

για $W_1 + W_2 << N$

Επειδή ισχύει

$$W_1 + W_2 << B\ ,$$

προκύπτει

$$K \simeq B\beta \Rightarrow \frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon^2 = N \cdot b$$

και συνεπώς παίρνουμε

$$\frac{(W_1 + W_2)W_2^2\, 2gh}{2g(W_1 + W_2)^2} \simeq B\beta \quad \rightarrow \quad B = \frac{hW_2^2}{(W_1 + W_2)\beta}\ . \tag{10.328}$$

Από την τελευταία εξίσωση εξάγεται

$$\frac{B\beta}{W_2 h} = \frac{W_2}{(W_1 + W_2)} = \frac{\text{παρεχόμενο ωφέλιμο έργο}}{\text{αναλισκόμενη ενέργεια}}\ .$$

Ο λόγος αυτός τείνει προς την μονάδα όταν $W_2 >> W_1$, οπότε έχουμε την ευνοϊκότερη περίπτωση.

ΣΟΣ

Εφαρμογή 6.6: Βάρος W_1 πέφτει από ύψος h σε ένα σώμα βάρους W_2, το οποίο στηρίζεται σε ελατήριο σταθεράς c. Υποθέτοντας ότι η κρούση είναι πλαστική ζητείται να καθορισθεί το μέγιστο της συμπίεσης δ του ελατηρίου πέραν αυτής που οφείλεται στην στατική δράση του βάρους W_2.

Λύση: Βάσει της εξίσωσης (6.21) η κοινή ταχύτητα υ μετά την σύνθλιψη είναι

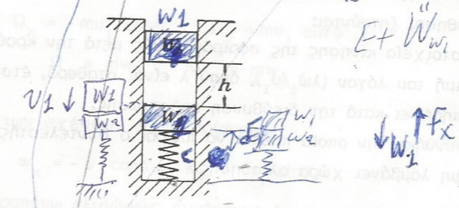
$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow$

$v_1 = \sqrt{2gh}$

$U = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$$u = \frac{W_1 \sqrt{2gh}}{W_1 + W_2}. \qquad (10.329)$$

$E + W_{W_1}^{W_1 \delta} = W_{F_x}^{\frac{1}{2} c \delta^2}$



Σχήμα 10.63: Πτώση βάρους επί σώματος στηριζομένου σε ελατήριο.

Δεδομένου ότι ζητείται το μέγιστο της συμπίεσης δ του ελατηρίου πέραν της οφειλομένης στην στατική δράση του βάρους W_2, ως έργο βαρύτητος λαμβάνεται η ποσότητα $W_1\delta$ αντί της $(W_1 + W_2)\delta$. Συνεπώς, η συνολική κινητική ενέργεια L_1 των δύο σωμάτων γιά την πλαστική κρούση μαζί με το έργο βαρύτητος αναλίσκονται στο έργο της αντίστασης $B\delta/2$. Γράφοντας την αντίσταση B ως

του ελατηρίου

$$B = c\delta\ ,$$

παίρνουμε

F, x

$W = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} k x \, x = \frac{1}{2} k x^2$

$E = \frac{1}{2} m_{ολ} U^2$

$$L = \frac{(W_1 + W_2) W_1^2\, 2gh}{2g\,(W_1 + W_2)^2} = \frac{W_1^2 h}{W_1 + W_2}\ , \qquad (10.330)$$

και

$K = \frac{1}{2}\frac{(W_1+W_2)}{g}\left(\frac{W_1\sqrt{2gh}}{W_1+W_2}\right)^2$

$K^{συστ} + W^{W_1}_{βαρύτ.\ του\ W_1} = W_{F_{ελ}}$

$$\frac{W_1^2 h}{W_1 + W_2} + W_1\delta = \frac{B\delta}{2} = \frac{c\delta^2}{2}\ , \qquad (10.331)$$

από την οποία υπολογίζουμε

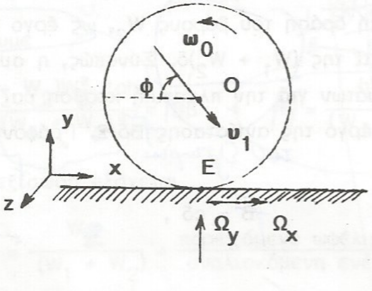
$$\delta = \frac{W_1}{c} + \sqrt{\left(\frac{W_1}{c}\right)^2 + \frac{2W_1^2 h}{c(W_1 + W_2)}}\ . \qquad (10.332)$$

$K^{συστ} + W^{βαρ} = W^{F_{ελ}}$

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) U^2 + \underbrace{W_1 \delta}_{\text{μόνο το } W_1\delta,\ \text{όχι με } (W_1+W_2)\delta} = \frac{1}{2} k \delta^2 \longrightarrow \delta = \dots$

Εφαρμογή 6.7: Σφαίρα μάζης m και ακτίνος R περιστρέφεται περί οριζόντιο διάμετρό της με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_0$, ενώ το κέντρο βάρους της έχει μεταφορική ταχύτητα της οποίας το διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}_1$ σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντιο. Η σφαίρα προσκρούει επί οριζοντίου επιπέδου που παρουσιάζει συντελεστή κρούσης κ (Σχ. 10.64). Υπό την προϋπόθεση ότι η κρούση γίνεται χωρίς ολίσθηση, ζητούνται:

1) Τα στοιχεία κίνησης της σφαίρας ευθύς μετά την κρούση.
2) Η τιμή του λόγου $(\lambda\omega_0/\upsilon_1)$, όπου λ είναι σταθερά, έτσι ώστε η σφαίρα να αναπηδήσει κατά την διεύθυνση πρόσπτωσης.
3) Η συνθήκη την οποία πρέπει να πληροί ο συντελεστής τριβής μ έτσι ώστε να μη λαμβάνει χώρα ολίσθησης.



Σχήμα 10.64: Πρόσπτωση σφαίρας επί οριζοντίου επιπέδου.

Λύση: Θεωρούμε το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxyz του σχήματος 10.64. Το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά το στάδιο της συμπίεσης και ανάπαλσης όσον αφορά την σφαίρα, με βάση το σχήμα 10.64 και τις σχέσεις (6.16) και (6.17), δίνει αντίστοιχα τις διανυσματικές εξισώσεις:

$$\Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} = m(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_1) \,, \tag{10.333}$$

$$\Omega_x \mathbf{i} + \kappa\Omega_y \mathbf{j} = m(\mathbf{w}_1 - \boldsymbol{\upsilon}) \,, \tag{10.334}$$

όπου $\mathbf{υ}$ παριστάνει την κοινή ταχύτητα σφαίρας και επιπέδου κατά το τέλος της συμπίεσης, $\mathbf{w}_1$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας μετά το πέρας της ανάπαλσης και κ είναι ο συντελεστής κρούσης. Λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι $\mathbf{υ} = 0$, οι (10.333) και (10.334) ισοδυναμούν με το παρακάτω σύστημα αναλυτικών εξισώσεων

$$\Omega_x = -m υ_1 \cos\phi\,, \quad \Omega_y = m υ_1 \sin\phi\,, \qquad (10.335)$$
$$\Omega_x = m w_x\,, \quad \kappa\Omega_y = m w_y\,.$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων αυτών παίρνουμε

$$w_x = -υ_1 \cos\phi\,, \quad w_y = \kappa υ_1 \sin\phi, \qquad (10.336)$$

ενώ από όλες τις παραπάνω εξισώσεις συνάγουμε ότι η συνολική παρόρμηση $\mathbf{\Omega}' = \Omega'_x \mathbf{i} + \Omega'_y \mathbf{j}$ καθ΄ όλο το φαινόμενο της κρούσης προκύπτει

$$\mathbf{\Omega}' = \Omega'_x \mathbf{i} + \Omega'_y \mathbf{j} = (\Omega_x + \Omega_x)\mathbf{i} + \Omega_y(1+\kappa)\mathbf{j} =$$
$$= m(w_x - υ_1 \cos\phi)\mathbf{i} + m(w_y + υ_1 \sin\phi)\mathbf{j}\,. \qquad (10.337)$$

Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μεταβολής της συστροφής ως προς το κέντρο Ο καθ΄ όλο το φαινόμενο της κρούσης γράφεται:

$$\mathbf{G}^{\tau} - \mathbf{G}^{\alpha} = \mathbf{OB} \times \mathbf{\Omega}'_x\,, \qquad (10.338)$$

όπου $\mathbf{G}^{\tau}$, $\mathbf{G}^{\alpha}$ παριστάνουν την τελική και αρχική συστροφή της σφαίρας, ενώ η διανυσματική συνιστώσα Ω'_y διερχόμενη από το Ο δίδει ροπή ως προς αυτό ίση προς μηδέν. Η (10.338) γράφεται

$$J_O\, \omega\, \mathbf{k} - J_O \omega_0\, \mathbf{k} = -R\Omega'_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) = R\Omega'_x\, \mathbf{k}\,.$$

εκ της οποίας

$$R\Omega'_x = J_O(\omega - \omega_0) = \frac{2mR^2}{5}(\omega - \omega_0), \qquad (10.339)$$

όπου ω παριστάνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητος της μάζας μετά την κρούση. Η συνθήκη της μη ολίσθησης είναι

$$υ_B = 0\,, \quad ή \quad \mathbf{w}_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OB}) = 0\,,$$

ή ακόμη

$$w_1 - \omega R(k \times j) = 0 \quad \rightarrow \quad w_1 + \omega R\, i = 0 .$$

από την οποία παίρνουμε

$$w_x = - R\omega . \tag{10.340}$$

Εκ των (10.335) και (10.340) υπολογίζουμε

$$\omega = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{\upsilon_1}{R}\cos\phi ,$$

(10.341) (10.341)

$$\omega_x = \frac{5}{7}\upsilon_1 \cos\phi - \frac{2}{7}\omega_0 R$$

και

$$\Omega'_x = - \frac{2}{7} m(\upsilon_1 \cos\phi + R\omega) . \tag{10.342}$$

Γιά να αναπηδά τώρα η σφαίρα κατά την γωνία πρόσπτωσης πρέπει

$$\frac{W_x}{W_y} = - \cot\phi$$

ή

$$\frac{5\upsilon_1 \cos\phi - 2R\omega_0}{7\kappa\upsilon_1 \sin\phi} = - \cot\phi$$

από την οποία

$$\frac{\lambda\omega_0}{\upsilon_1} = \frac{1}{2}(5 + 7\kappa)\cos\phi . \tag{10.343}$$

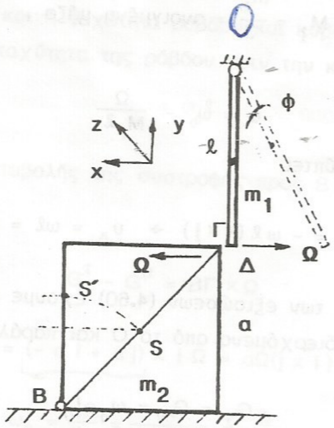
Τέλος, γιά να μη γίνεται ολίσθηση πρέπει

$$\mu > \frac{|T|}{|N|}$$

όπου |T| και |N| παριστάνει το μέτρο της τριβής και το μέτρο της κάθετης αντίδρασης. Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$\mu > \frac{\int |T| dt}{\int |N| dt} = \frac{|\Omega_x|}{|\Omega_y|} = \frac{2}{7(1+\kappa)}\left(\cot\phi + \frac{R\omega}{\upsilon_1 \sin\phi}\right) . \tag{10.344}$$

Εφαρμογή 6.8: Ομοιόμορφη πρισματική ράβδος μήκους ℓ και μάζης m_1 συναρτάται διά του ενός άκρου της από οριζόντιο άξονα, εφάπτεται δε κύβου σε κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο σχήμα 10.65. Ο κύβος μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο ακμή του. Ζητείται η μέγιστη απόκλιση της ράβδου από την κατακόρυφο ώστε αυτή προσκρούμενη επί του κύβου να τον ανατρέπει. Η μάζα του κύβου είναι m_2, ενώ ο συντελεστής κρούσης $\kappa = 0.5$.



Σχήμα 10.65: Σύστημα ράβδου και κύβου.

Λύση: Έστω Ω η παρόρμηση στο τέλος της συμπίεσης όπως φαίνεται στο σχήμα 10.65. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων Oxyz και εξετάζουμε τα δύο σώματα χωριστά.

Ράβδος ΟΔ: Αν φ είναι η ζητούμενη γωνία απόκλισης, το θεώρημα μεταβολής της συστροφής προς Ο δίδει

$$\Delta G = r \times \vec{\Omega} \Rightarrow \quad G^{\tau} - G^{\alpha} = O\Delta \times \Omega , \qquad (10.345)$$

όπου G^{τ}, G^{α} παριστάνουν την τελική και αρχική συστροφή του σώματος. Η (10.345) γράφεται

$$J_0 \omega \, \mathbf{k} - J_0 \omega_0 \, \mathbf{k} = (-\ell)\,(-\Omega)\; \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

ή

$$J_0(\omega - \omega_0)\mathbf{k} = \ell\Omega\mathbf{k}$$

$(\omega - \omega_0)J_0 = \ell\Omega$

από την οποία προκύπτει

$\omega - \omega_0 = \dfrac{\ell\Omega}{J_0}$

$$\omega = \omega_0 - \frac{\ell\Omega}{J_0} = \omega_0 - \frac{\Omega}{\frac{1}{3}m_1\ell}\,, \qquad (10.346)$$

$J_0 = \frac{1}{3}m_1\ell^2$

στην οποία ω παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση, ενώ ω_0 το αντίστοιχο μέγεθος πριν την κρούση. Αν θέσουμε

$$M_1 = \frac{m_1}{3} = \text{ανοιγμένη μάζα}\,,$$

τότε

$$\omega = \omega_0 - \frac{\Omega}{M_1\ell}$$

και η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_\Delta$ προκύπτει

$$\boldsymbol{\upsilon}_\Delta = -\upsilon_\Delta\mathbf{i} = -\omega\ell(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) \;\rightarrow\; \upsilon_\Delta = \omega\ell = \omega_0\ell - \frac{\Omega}{M_1}\,. \qquad (10.347)$$

Από την τρίτη τώρα των εξισώσεων (4.60) έχουμε ότι η συστροφή της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το Ο και παράλληλο προς τον z είναι

$$G_z = G_3 = \omega_0 J_0$$

και η κινητική ενέργεια, μέσου του τύπου (4.57), προκύπτει

$$L = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2\,.$$

Έτσι έχουμε την έκφραση

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = L = \frac{m_1 g\ell}{2}(1 - \cos\phi)\,,$$

η οποία, αν

$$J_0 = \frac{1}{3}m_1\ell\,,$$

παρέχει

$$\ell\omega_0 = \sqrt{3g\ell(1 - \cos\phi)}\,. \qquad (10.348)$$

Τέλος, το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά την ράβδο διατυπώνεται ως

$$\Omega = M_1(\mathbf{\upsilon} - \mathbf{\upsilon}_1)$$

ή

$$-\Omega \mathbf{i} = M_1(\upsilon - \upsilon_1 \mathbf{i}) = M_1(\upsilon - \upsilon_1)\mathbf{i} \ ,$$

δηλαδή

$$\Omega = M_1(\upsilon_1 - \upsilon) \ , \qquad (10.349)$$

όπου $\mathbf{\upsilon}$ παριστάνει την κοινή ταχύτητα ράβδου και κύβου κατά το τέλος της σύνθλιψης και $\mathbf{\upsilon}_1$ την ταχύτητα της ράβδου πριν την κρούση, δηλαδή

$$\upsilon_1 = \omega_0 \ell$$

Κύβος: Το θεώρημα μεταβολής της συστροφής προς Β παρέχει κατ' αναλογία του τύπου (10.345)

$$\mathbf{G}^{\tau} - \mathbf{G}^{\alpha} = \mathbf{B\Gamma} \times \mathbf{\Omega} \qquad (10.350)$$

ή

$$J_B \cdot \omega_2 \mathbf{k} = \underbrace{(-\alpha \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j})} \times \mathbf{i}\,\Omega = \alpha\Omega(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \alpha\Omega\,\mathbf{k}$$

ή

$$\omega_2 = \frac{\alpha\Omega}{J_B} = \frac{\alpha\Omega}{2\frac{\alpha^2}{3}m_2} = \frac{\Omega}{\alpha M_2} \ , \qquad (10.351)$$

όπου

$$M_2 = \frac{2}{3}m_2 = \text{ανοιγμένη μάζα} \ .$$

Στους παραπάνω τύπους $\boldsymbol{\omega}_2$ παριστάνει το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητος ως προς άξονα διερχόμενο από το Β μετά την κρούση και J_B την ροπή αδρανείας του κύβου ως προς τον άξονα αυτού, ο οποίος είναι παράλληλος προς τον z. Σημειώνουμε εδώ ότι η αρχική συστροφή $\mathbf{G}^{\alpha}$ του κύβου προς τον άξονα διά του Β είναι ίση προς μηδέν. Δεδομένου τώρα ότι το Β είναι κέντρο μηδενικής ταχύτητος, η ταχύτητα του σημείου Γ προκύπτει

$$\mathbf{\upsilon}_{\Gamma} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B\Gamma} = \boldsymbol{\omega}_2 \times (-\alpha \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j}) = \frac{\Omega}{\alpha M_2}\mathbf{k} \times (-\alpha \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j}) =$$

$$= \frac{\Omega}{M_2}\mathbf{i} + \frac{\Omega}{M_2}\mathbf{j} \ . \qquad (10.352)$$

Στο σημείο όμως Γ πρέπει

$$\upsilon_{\Gamma x} = \upsilon_{\Delta x}$$

ή με βάση τις (10.347) και (10.352)

$$\omega_0 \ell - \frac{\Omega}{M_1} = \frac{\Omega}{M_2} . \qquad (10.353)$$

Το θεώρημα διατήρησης της ορμής γιά τον κύβο παρέχει

$$M_2(\upsilon - \upsilon_2) = \Omega , \quad M_2(\mathbf{w}_2 - \upsilon) = \kappa\Omega , \qquad (10.354)$$

όπου $\mathbf{\upsilon}_2$ είναι το διάνυσμα ταχύτητος του κύβου πριν την κρούση ίση προς το μηδέν και $\mathbf{w}_2$ είναι το διάνυσμα ταχύτητος αυτού μετά το πέρας της ανάπαλσης. Ετσι, οι (10.354) γράφεται

$$M_2 \upsilon\, i = \Omega\, i \quad \rightarrow \quad M_2 \upsilon = \Omega , \qquad (10.355)$$

$$M_2(\mathbf{w}_2 - \upsilon i) = \kappa\Omega\, i \quad \rightarrow \quad M_2(w_{2x} - \upsilon) = \kappa\Omega . \qquad (10.356)$$

Συνεπώς, υπολογίζουμε

$$\upsilon = \frac{w_{2x}}{\kappa+1} , \quad \Omega = \frac{M_2 w_{2x}}{\kappa+1}$$

οπότε εκ της (10.353) παίρνουμε

$$\Omega \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} = \omega_0 \ell = \upsilon_1$$

ή

$$w_{2x} = (1 + \kappa) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \upsilon_1$$

ή, τέλος

$$w_{2x} = (1 + \kappa) \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \upsilon_1 . \qquad (10.357)$$

Η κινητική ενέργεια του κύβου μετά την κρούση είναι

$$L_K = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \frac{w_2^2}{(\Gamma B)^2} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \frac{w_2^2}{(\alpha\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha^2}{3} m_2 \frac{w_{2x}^2 + w_{2y}^2}{(\alpha\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\alpha^2}{3} m_2 \frac{2 w_{2x}^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{3} m_2 w_{2x}^2$$

που με βάση την (10.357) δίδει

$$L_K = \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \upsilon_1^2 . \qquad (10.358)$$

Από την άλλη μεριά, το απαιτούμενο έργο γιά την ανατροπή του κύβου υπολογίζεται ως

$$W = m_2 g \left(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = m_2 g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} . \qquad (10.359)$$

Πρέπει επομένως να ισχύει

$$W \leq L_K$$

ή

$$m_2 g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \upsilon^2 ,$$

η οποία βάσει της (10.359) και της

$$\upsilon_1 = \omega_0 \ell$$

παρέχει

$$g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \left[3g\ell \, (1 - \cos\phi) \right]$$

εκ της οποίας υπολογίζουμε

$$\cos\phi \leq 1 - \frac{2}{9} (\sqrt{2} - 1) \frac{\alpha}{\ell} \left(1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right)^2 . \qquad (10.360)$$