Εξισώσεις LAGRANGE

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

T= Κινητική Ενέργεια

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$\dot{q}_i$ = Γενικευμένες ταχύτητες

Q_j= Γενικευμένες Δυνάμεις

q_j= Γενικευμένες συντεταγμένες

όπου :
$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

και j=1,2,…., k

Εξισώσεις LAGRANGE

Στην περίπτωση κατά την οποία οι εξωτερικές δυνάμεις απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

όπου: $V=V(r_1, r_2, \ldots., r_N)$

και $r_i = r_i\,(q_1, q_2, \ldots., q_k)$

οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

γίνονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = -\frac{\partial (V-V)}{\partial q_j} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\mathrm{V})}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Εφόσον η V δεν εξαρτάται από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$

$$V=V(r_1, r_2, \ldots, r_N)$$

Επομένως εισάγοντας μια καινούργια συνάρτηση L που ορίζεται ως L :

$$L = T - V$$

θα έχουμε :

Εξισώσεις LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\boxed{L = T - V}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση Lagrange**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

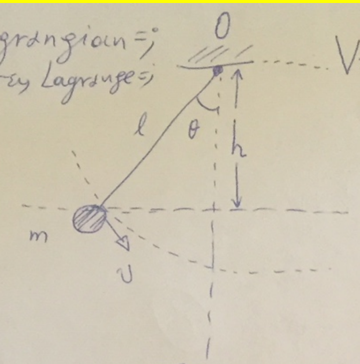
ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Θεωρήστε το απλό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία μάζα m αναρτημένη από ένα μη-εκτατό αβαρές νήμα μήκους l .

(i) Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

(ii) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

i) Lagrangian =;
ii) Εξισώσεις Lagrange =;



$\boxed{q_1 = \theta}$

$\boxed{L = T - V}$ (*)

$L = L(\theta, \dot\theta, t)$

i)

$\boxed{T = \frac{1}{2} m \upsilon^2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \omega l \\ \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \dot\theta l}$ (2) $\Rightarrow$

$\boxed{T = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2}$ (3)

$V = -mgh \Rightarrow \boxed{V = -mgl\cos\theta}$ (4)

Η σχέση (*) $\xrightarrow[(4)]{(3)}$ $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 - (-mgl\cos\theta)$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta}$ (5)

ΑΣΚΗΣΗ 1 (συνέχεια)

1. Θεωρήστε το απλό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία μάζα m αναρτημένη από ένα μη-εκτατό αβαρές νήμα μήκους l .

(i) Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

(ii) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta} \quad (5)$$

$\boxed{q=\theta}$

Η Εξίσωση Lagrange (είναι μόνο μία γιατί έχω μόνο μία γενικευμένη συντεταγμένη) θα είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}} m l^2 \cancel{2} \dot{\theta} = m l^2 \dot{\theta} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) = m l^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = m l^2 \ddot{\theta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (9)$$

Οπότε η (6) γίνεται, εξαιτίας των (7),(8),(9):

$$m l^2 \ddot{\theta} - (-mgl\sin\theta) = 0$$

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}\sin\theta = 0} \Rightarrow$$

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

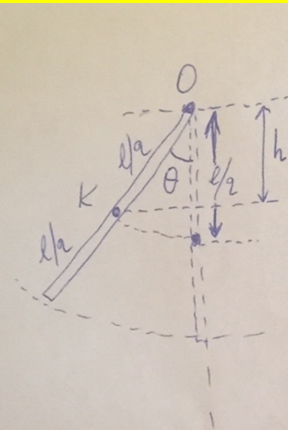
ΑΣΚΗΣΗ 2

2. Θεωρήστε το φυσικό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία ομογενή ράβδο μάζας *m* και μήκους *l* η οποία μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το ένα άκρο της O.

(i) Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

(ii) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

ΛΥΣΗ



Θεωρώντας την γωνία θ σαν την γενικευμένη συντεταγμένη του συστήματος έχουμε: $\boxed{q=\theta}$

$\boxed{L=T-V}$ (1)

$L=L(\theta,\dot{\theta},t)$

$T=\frac{1}{2} I_{(0)}\,\omega^2$ (2)

$I_{(0)} = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \dots = \boxed{\frac{1}{3} ml^2}$ (3)

$\omega=\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\omega=\dot{\theta}}$ (4)

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Επομένως:

η (2) $\xrightarrow[(4)]{(3)}$ $T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} ml^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow$

$\boxed{T=\frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2}$ (5)

ΑΣΚΗΣΗ 2 (συνέχεια)

2. Θεωρήστε το φυσικό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία ράβδο μάζας m και μήκους l η οποία μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το ένα άκρο της Ο.

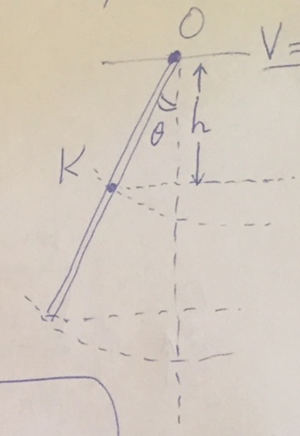
(i) Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

(ii) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$V = -mgh \Rightarrow$

$$\boxed{V = -mg \cdot \frac{l}{2}\cos\theta} \quad (6)$$



Επομένως η (1) $\xrightarrow[(6)]{(5)}$

$$\boxed{L = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta} \quad (7)$$

ii) Η εξίσωση Lagrange θα είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0} \quad (8)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (συνέχεια)

2. Θεωρήστε το φυσικό εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται από μία ράβδο μάζας m και μήκους l η οποία μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το ένα άκρο της Ο.

(i) Υπολογίστε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος

(ii) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange

$$\boxed{L = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g \frac{l}{2} \cos\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{6}} m l^2 \cancel{2} \dot{\theta} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}\right) = \frac{1}{3} m l^2 \frac{d}{dt} \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta}} \quad (9)$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta} = - m g \frac{l}{2} \sin\theta} \quad (10)$$

Επομένως η (8) $\xRightarrow[(10)]{(9)}$

$$\boxed{\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + m g \frac{l}{2} \sin\theta = 0} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\cancel{m} g \frac{\cancel{l}}{2}}{\frac{1}{3} \cancel{m} l^{\cancel{2}}} \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin\theta = 0}$$

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

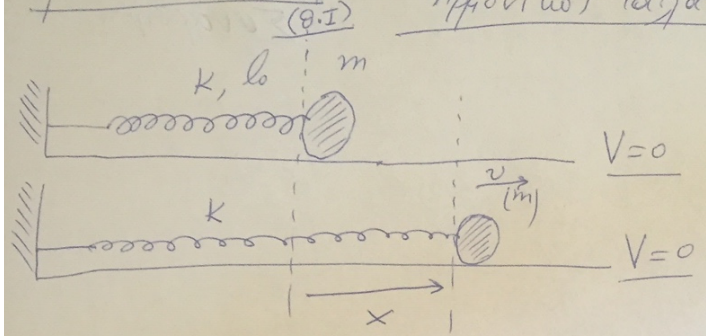
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αρμονικός ταλαντωτής (1-D)



Θεωρώντας σαν γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση της μάζας m από την Θ.Ι, έχω:

$\boxed{q = x}$, $\boxed{L = T - V}$ (1), $L = L(x, \dot{x}, t)$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 \\ v &= \dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2} \quad (2)$$

$$\boxed{V = \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}} \quad (3)$$

↳ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

(Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ (m) ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ (0), ΑΦΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ).

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

-8-

$$L = T - V$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2} \quad (4)$$

Συνάρτηση Lagrange

ii) Η εξίσωση Lagrange θα είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} \dot{x} = m \dot{x} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m \dot{x}\right) = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \ddot{x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{\cancel{2}} k \cancel{2} x = -kx \quad (8)$$

Επομένως η (5) $\xrightarrow[(8)]{(6)(7)}$

$$m\ddot{x} - (-kx) = 0 \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0} \quad (9) \qquad m \neq 0$$

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Εξισώσεις LAGRANGE)

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

Η εξίσωση (9) είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, γραμμική.

Για να την λύσουμε θέτουμε

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{K}{m} \Rightarrow$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή t_1 έως την χρονική στιγμή t_2 είναι τέτοια ώστε το συναρτησιοειδές :

$$\mathrm{F}=\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, \mathrm{q}, \mathrm{t})dt$$

όπου $L=T-V$, να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστο)

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα από όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο, επιλέγει εκείνη για την οποία η ποσότητα F γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα F ονομάζεται δράση του συστήματος

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η ποσότητα

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

είναι σταθερή και ονομάζεται Hamiltonian του συστήματος

Ορίζοντας ως γενικευμένη ορμή την ποσότητα που ορίζεται ως

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

τότε η Hamiltonian του συστήματος γράφεται:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

Εξισώσεις HAMILTON

Οι εξισώσεις :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Είναι γνωστές ως κανονικές εξισώσεις του Hamilton

Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων V(r). Δεν υπάρχει σύνδεσμος, επομένως:

$$\boxed{H = T + V}$$

$$\boxed{L = T - V}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες (r,θ) σαν γενικευμένες συντεταγμένες, τότε:

$$\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \end{matrix}\right\} \longrightarrow$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}$$

Εξισώσεις HAMILTON

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επομένως :

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r}^{\,2}\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 - \cancel{2r\, \dot{r}\, \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}} + \dot{r}^{\,2}\sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \cancel{2r\, \dot{r}\, \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta}})$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r}^{\,2}\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \dot{r}^{\,2}\sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, [\, \dot{r}^{\,2}\, \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + r^2\, \dot{\theta}^2\, \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}\,]$$

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\theta}^2)$$

Εξισώσεις HAMILTON

Επομένως :

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{L = T - V} \\ \\ T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ \\ V = 0\end{array}\right\} \longrightarrow L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Οπότε :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \longrightarrow p_r = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2} \dot{r} \longrightarrow p_r = m\dot{r}$$

Ομοίως :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \longrightarrow p_\theta = \cancel{\frac{1}{2}} mr^2 \cancel{2}\dot{\theta} \longrightarrow p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

Εξισώσεις HAMILTON

Συνεπώς :

$$H=\sum_j p_j\,\dot q_j - L$$

$$q_r = \mathrm{r}$$

$$q_\theta = \theta$$

$$\left.\begin{aligned}&H=\sum_j p_j\,\dot q_j - L\\&q_r=\mathrm{r}\\&q_\theta=\theta\end{aligned}\right\}\longrightarrow \left.\begin{aligned}&H=p_r\dot r+p_\theta\dot\theta-L\\&p_r=m\,\dot r\\&p_\theta=mr^2\dot\theta\\&L=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\,\dot\theta^2)-V(r)\end{aligned}\right\}\longrightarrow$$

Οπότε :

$$H=m\,\dot r\dot r+mr^2\dot\theta\dot\theta-\frac{1}{2}\,m(\dot r^2+r^2\,\dot\theta^2)+V(r)\longrightarrow$$

$$H=m\,\dot r^2+mr^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2-\frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot\theta^2+V(r)\longrightarrow$$

$$H=\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2-\frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot\theta^2+V(r)\longrightarrow$$

$$\boxed{H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+V(r)}$$

Εξισώσεις HAMILTON

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Συνεπώς οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton γράφονται :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{2p_r}{2m} = \dfrac{p_r}{m} \longrightarrow \boxed{\dot{r} = \dfrac{p_r}{m}} \\[2ex] \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{2p_\theta}{2mr^2} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}} \end{cases}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \longrightarrow \begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right] = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \\[2ex] \qquad = -\left[\dfrac{p_\theta^2}{2m}\left(\dfrac{-2r}{r^4}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r}\right] \longrightarrow \boxed{\dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r}} \\[2ex] \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \longrightarrow \boxed{\dot{p}_\theta = 0} \end{cases}$$

από την οποία, επειδή $\sin\theta \neq 0$, συνεπάγεται κατ΄ ανάγκη ότι

$$\phi = \text{σταθερά}\,.$$

Επομένως η κίνηση γίνεται με σταθερά φ, δηλαδή επί του μεσημβρινού της σφαίρας που είναι γεωδαισιακή γραμμή.

SOS

7.4 Αρχή της Ελάχιστης Δράσης

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε τις εξισώσεις Lagrange και τονίσαμε ότι η γνώση της L γιά το τυχόν ιδανικό μηχανικό πρόβλημα μας οδηγεί αυτομάτως στην λύση του προβλήματος της αναλυτικής δυναμικής μέσω των εξισώσεων (7.49). Η μέθοδος των εξισώσεων Lagrange είναι τόσο ισχυρή ώστε μπορεί να εφαρμοσθεί και σε περιοχές όπου δεν έχουμε καμιά απεικονιστική ιδέα του τί συμβαίνει, π.χ. πυρηνική φυσική. Τέτοιες περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των εξισώσεων Lagrange σε άλλες περιοχές της φυσικής βάζουν αυτομάτως ορισμένα ερωτήματα, όπως:

α) Είναι αυτοδύναμη η αναλυτική περιγραφή; δηλαδή μπορεί κανείς να ξεκινήσει πάντοτε από μιά γενική αρχή αναφερομένη στην ίδια την Lagrangian και όχι στους νόμους του Νεύτωνος;

β) Επειδή η L ορίζεται στην θεσεογραφικό χώρο, τι είδους γεωμετρική εικόνα μπορούμε να έχουμε στον χώρο αυτόν; Ποιό παραστατικά θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε: Είναι δυνατή η αναγωγή του αναλυτικού προβλήματος σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο θεσεογραφικό χώρο, και αν ναι, τί είδους νέα γεωμετρία θέτει το αναλυτικό πρόβλημα;

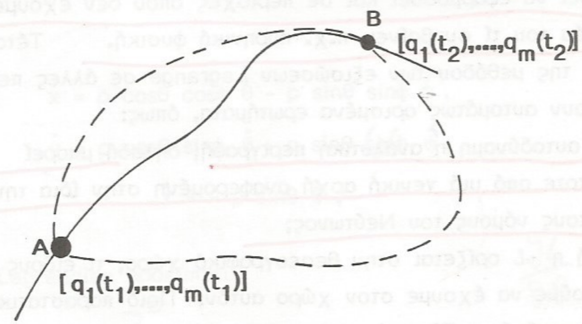
γ) Τι άλλα πράγματα η Lagrangian μπορεί να μας δόσει εκτός από τις εξισώσεις κίνησης; Μπορεί η Lagrangian να μας δόσει διατήρηση ενέργειας, ορμής, φορτίου και με ποιό τρόπο;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε λεπτομερώς στο ερώτημα (α). Θα δείξουμε δηλαδή ότι οι εξισώσεις Lagrange, που προήλθαν ουσιαστικά από τον νόμο του Νεύτωνος μέσω της αρχής των δυνατών έργων, προέρχονται επίσης από μιά αρχή η οποία αναφέρεται αυστηρά στην συνάρτηση Lagrange L. Η αρχή αυτή καλείται **αρχή της ελαχίστης δράσης** συναντάται δε και ως **αρχή Hamilton.** Η διατύπωση της είναι ως εξής: ***Η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο από την χρονική στιγμή t_1 στην χρονική στιγμή t_2 είναι τέτοια ώστε το συναρτησειοειδές***

$$F = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k,\ q_k,\ t)\ dt\ , \qquad (7.51)$$

όπου $L = T - V$***, να λαμβάνει ακρότατη τιμή (συνήθως ελάχιστη).***

Με άλλα λόγια το μηχανικό σύστημα διαλέγει απ΄ όλες τις δυνατές τροχιές $q_k(t)$ στον θεσεογραφικό χώρο εκείνη γιά την οποία η ποσότητα F γίνεται ακρότατο. Το ολοκλήρωμα F καλείται **δράση του συστήματος**. Ας εξηγήσουμε τώρα λεπτομερέστερα τι εννοούμε λέγοντας εξέλιξη του φυσικού συστήματος στον θεσεογραφικό χώρο. Την χρονική στιγμή t_1 το σύστημα χαρακτηρίζεται πλήρως από τις m τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων q_k $(k = 1, \ldots, m)$. ΄Εστω λοιπόν το αντίστοιχο σημείο του θεσεογραφικού χώρου (Σχ. 7.5).



Σχήμα 7.5: Σημεία στον θεσεογραφικό χώρο.

Ομοίως, την χρονική στιγμή t_2 θα έχουμε ένα νέο σημείο του θεσεογραφικού χώρου. Τα ενδιάμεσα σημεία όμως είναι άγνωστα, δηλαδή η τροχιά του φυσικού συστήματος μέσα στον θεσεογραφικό χώρο είναι άγνωστη και δίνεται από την αρχή της ελαχίστης δράσης όπως προαναφέραμε.

Φυσικά η τροχιά που θα προκύψει πρέπει να είναι η ίδια με εκείνη που προκύπτει από τις εξισώσεις Lagrange (7.49). Με άλλα λόγια πρέπει να δείξουμε ότι η αρχή της ελαχίστης δράσης οδηγεί στις εξισώσεις Lagrange. Ξεκινάμε από την τροχιά $q_k(t)$, η οποία κάνει το συναρτησειοειδές F ακρότατο. Αυτό σημαίνει πως γι΄ αυτήν την τροχιά και γιά πολύ μικρές μεταβολές της (μεταβολή από την $q_k(t)$ στην $q_k(t) + \delta q_k(t)$) η μεταβολή του F θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta F = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_k, q_k, t)\, dt = 0 . \tag{7.52}$$

Φυσικά όλες οι τροχιές που δοκιμάζουμε θα πρέπει κατά τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 να διέρχονται από τα σημεία Α και Β του θεσεογραφικού χώρου αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει

$$\delta q_k(t_1) = 0 , \quad \delta q_k(t_2) = 0 , \quad \delta q_k(t) \neq 0 , \tag{7.53}$$

με $k = 1, 2, \ldots , m$, $t \in (t_1, t_2)$.

Με αυτή την προϋπόθεση το σύμβολο της ολοκλήρωσης και της μεταβολής δ εναλλάσσονται και επομένως παίρνουμε

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = 0 \tag{7.54}$$

ή

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0 . \tag{7.55}$$

Ο όρος $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$ δεν εμφανίζεται δεδομένου ότι δεν μεταβάλλεται ο χρόνος, δηλαδή η παράμετρος της τροχιάς, αλλά μόνον το είδος της τροχιάς στον θεσεογραφικό χώρο. Γιά να μας δόσει τώρα αποτέλεσμα η εξίσωση (7.55) πρέπει να εκφράσουμε το $\delta \dot{q}_k$ συναρτήσει του δq_k. Γιά τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης συναρτήσεων, δηλαδή

$$f \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(fg) - \left(\frac{df}{dt}\right) g .$$

Στην περίπτωσή μας η εναλλαγή του δ με το σύμβολο της παραγώγισης $\frac{d}{dt}$ είναι επιτρεπτή, δεδομένου ότι η μεταβολή δ δεν αναφέρεται στον χρόνο t. Συνεπώς γράφουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt}(\delta q_k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k .$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (7.55) ευρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt\,. \quad (7.56)$$

Ο δεύτερος όρος της (7.56) παρέχει

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\right]dt=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \quad (7.56a)$$

λόγω των συνθηκών (7.53). Κατά συνέπεια η αρχή της ελάχιστης δράσης καταλήγει στην συνθήκη

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k\,dt=0\,. \quad (7.57)$$

Η L είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[t_1, t_2]$ και επομένως γιά να ισχύει η (7.57) γιά αυθαίρετες μεταβολές των q_k πρέπει να έχει κανείς εκ ταυτότητος

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0\,, \quad (7.58)$$

με $k = 1, \ldots, m$, που είναι ακριβώς οι εξισώσεις Lagrange (7.49).

Ισχύει επίσης και το αντίστροφο, δηλαδή οι εξισώσεις Lagrange κάνουν το ολοκλήρωμα της δράσης ακρότατο. Τούτο προκύπτει αμέσως γιατί όλα τα βήματα από τις (7.53) στις (7.58) είναι αντιστρεπτά. Υπολογίζονται κατά συνέπεια το δF και χρησιμοποιώντας τις (7.58) καταλήγουμε στην (7.56a) που είναι μηδέν, άρα και $\delta F = 0$.

7.5 Θεωρήματα Διατήρησης και Ιδιότητες των Εξισώσεων Lagrange

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μορφή των εξισώσεων Lagrange είναι αναλλοίωτη στην αλλαγή των γενικευμένων συντεταγμένων. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες

$$q_k \longrightarrow q'_k = q'_k(q_1, \ldots, q_m, t)\,, \quad (7.59)$$

με $k = 1, \ldots, m$. Τότε αν καλέσουμε με $L'(q'_k, \dot{q}'_k, t)$ την νέα Lagrangian αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right]\frac{\partial q_s}{\partial q'_k} . \tag{7.60}$$

Επειδή οι μετασχηματισμοί είναι παραδεκτοί, δηλαδή επειδή $\left|\frac{\partial q_s}{\partial q'_k}\right| \neq 0$, συνάγεται ότι αν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 ,$$

τότε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_s}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_s} = 0 .$$

Δεύτερη πολύ σπουδαία παρατήρηση είναι ότι η Lagrangian ενός μηχανικού προβλήματος, ακόμη και γιά δεδομένο γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων, δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πράγματι, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$L \longrightarrow L' = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\, g(q,t) \tag{7.61}$$

όπου γιά ευκολία έχουμε παραλείψει τους δείκτες. Οι εξισώσεις Lagrange γιά την L' είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)\right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\dot{q} - \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} . \tag{7.62}$$

Η (7.62) μας λέει ότι η καινούργια Lagrangian L' η οποία κατασκευάσθηκε μέσω του μετασχηματισμού (7.61), οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις του Lagrange στις οποίες οδηγεί και η L. Με άλλα λόγια οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς της μορφής (7.61). Οι μετασχηματισμοί (7.61) καλούνται **μετασχηματισμοί βαθμίδος** και επομένως συμπεραίνουμε ότι:

Οι εξισώσεις Lagrange είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδος. Δύο Lagrangian που συνδέονται με ένα μετασχηματισμό βαθμίδος θα καλούνται **ισοδύναμοι.**

Ύστερα από τις δύο παραπάνω θεμελιώδεις παρατηρήσεις διατυπώνουμε το εξής ερώτημα: ***Πώς εμφανίζονται τα θεωρήματα διατήρησης στην αναλυτική μηχανική των ολονόμων συστημάτων;***

Πρώτη περίπτωση: Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από την μεταβλητή q_i. Τότε η i - εξίσωση Lagrange (7.49) παρέχει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

ή

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{σταθ.} \qquad (7.63)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ διατηρείται και την ονομάζουμε **γενικευμένη ορμή.**

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η γενικευμένη συντεταγμένη που διατηρείται δεν είναι πάντοτε και κάποια φυσική ποσότητα, και αν ακόμη δεν μας είναι εύκολο να διακρίνουμε σε ποιά ποσότητα της απεικονιστικής (Νευτώνειας) μηχανικής αντστοιχεί.

Η μεταβλητή q_i, η οποία δεν εμφανίζεται στην Lagrangian, καλείται **κυκλική.** Η εξίσωση δε (7.63) σημαίνει ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή της Lagrangian ενός συστήματος αντιστοιχεί και ένα διατηρούμενο μέγεθος.

Δεύτερη περίπτωση: Η $L(\dot{q}_k, q_k, t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο t, δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 .$$

Τότε μέσω των εξισώσεων Lagrange (7.49) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j) = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\dot{q}_j)\right] .$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \,. \tag{7.64}$$

Συνεπώς, η ποσότητα

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - H \tag{7.65}$$

$\Rightarrow H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$

p_j

$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L$

είναι σταθερή και καλείται **Hamiltonian** του συστήματος.

Διατυπώνουμε τώρα τα εξής δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 7.1: Η Hamiltonian ενός συστήματος είναι μιά σταθερά των εξισώσεων κίνησης του συστήματος τότε και μόνον τότε όταν η Lagrangian L δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή τότε και μόνον τότε όταν

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \,.$$

Θεώρημα 7.2: Η Hamiltonian ενός μηχανικού συστήματος συμπίπτει με την σταθερά της ολικής ενέργειας τότε και μόνον τότε όταν

α) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$,

β) Οι σύνδεσμοι του συστήματος είναι ανεξάρτητοι του χρόνου (σκληρόνομοι σύνδεσμοι)

Απόδειξη:

α) Από τον ορισμό της $L = T - V$ έχουμε

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \,.$$

Συνεπώς

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L \,. \tag{7.66}$$

β) Με βάση την υπόθεση, οι σύνδεσμοι δεν εξαρτώνται από τον χρόνο. Επομένως γράφουμε

$$\upsilon_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

και

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \Big(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

στην οποία

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} .$$

΄Ετσι, έχουμε

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_k$$

και

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_k \dot{q}_k = 2T . \tag{7.67}$$

Από τις (7.66), (7.67) και τον ορισμό της L παίρνουμε

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V . \tag{7.68}$$

Επειδή ακόμη

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

λόγω του θεωρήματος 7.1 είναι

$$H = \text{σταθερά}$$

και συνεπώς

$$H = T + V = \text{σταθ.} = E_{\text{ολ.}} \tag{7.69}$$

Χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες ορμές

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

η Hamiltonian γράφεται

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j \; p_j - L} \qquad (7.70)$$

L = T-V

7.6 Κανονική Εξίσωση Hamilton

Έχουμε ήδη ορίσει την Hamiltonian ως

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Λόγω του ορισμού της γενικευμένης ορμής μπορεί κανείς να εκφράσει την H ως H(p, q, t). Είναι δυνατόν τώρα να θεμελιώσει κανείς την μηχανική μέσω της Hamiltonian H κατά τρόπο ανάλογο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε γιά τις εξισώσεις Lagrange. Αυτή η θεμελίωση είναι πρόσφορη γιά γενικεύσεις (κβαντική μηχανική, θεωρία πεδίων). Γιά να γίνει αντιληπτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο θεμελιώσεις παρατηρούμε ότι στην μηχανική του Lagrange ένα μηχανικό σύστημα περιγράφεται πλήρως όταν δοθούν οι αρχικές τιμές των γενικευμένων θέσεων $q_i(0)$ και γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i(0)$ · στην μηχανική του Hamilton ξεχνάμε τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ και δουλεύουμε με τις γενικευμένες ορμές p_i, οι οποίες τώρα νοούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Η διαφορά είναι ουσιώδης, γιατί ενώ στην μηχανική του Lagrange γιά k βαθμούς ελευθερίας έχουμε k διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, στην μηχανική του Hamilton έχουμε 2k διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Διαφορίζοντας την H νοουμένη ως συνάρτηση των p, q, t έχουμε

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \qquad (7.71)$$

Διαφορίζοντας την (7.70) έχουμε επίσης

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt\,. \qquad (7.72)$$

Επειδή από τον ορισμό της γενικευμένης ορμής και τις εξισώσεις Lagrange ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i\,,$$

η (7.72) παρέχει

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt\,. \qquad (7.73)$$

Συγκρίνοντας τις (7.71), (7.73) καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,.} \qquad (7.74)$$

Οι (7.74) είναι γνωστές ως **κανονικές εξισώσεις του Hamilton** και, εφ΄ όσον δοθεί η H, αποτελούν διαφορικό σύστημα 2k εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η φυσική σημασία της H έχει ήδη μελετηθεί. Μπορούμε όμως να ξαναδούμε μερικά από τα χαρακτηριστικά της με την βοήθεια των (7.74). Ισχύει

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (7.75)$$

Μέσω τώρα των (7.74) η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \qquad (7.76)$$

συνεπώς

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (7.77)$$

και επομένως αν η Lagrangian δεν εξαρτάται από τον χρόνο το ίδιο συμβαίνει με την Hamiltonian και επιπλέον

$$H = \text{σταθερά}\,. \qquad (7.78)$$

Ας θεωρήσουμε γιά παράδειγμα την επίπεδη κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων $V(r)$. Δεν υπάρχει σύνδεσμος και

$$H = T + V \,,$$

$$L = T - V \,,$$

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$\dot{x} = \cos\theta\, \dot{r} \rightarrow \dot{x}^2 = \cos^2\theta\, \dot{r}^2$

$\dot{y} = \sin\theta\, \dot{r} \rightarrow \dot{y}^2 = \sin^2\theta\, \dot{r}^2$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι πολικές συντεταγμένες

γεν. συν. (r, θ)

$$x = r\cos\theta \,,$$

$$y = r\sin\theta \,.$$

$\rightarrow \dot{x} = -r\sin\theta\, \dot{\theta} \rightarrow \dot{x}^2 = r^2\sin^2\theta\, \dot{\theta}^2$

$\rightarrow \dot{y} = r\cos\theta\, \dot{\theta} \rightarrow \dot{y}^2 = r^2\cos^2\theta\, \dot{\theta}^2$

$+$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\theta}^2$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \,, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \Rightarrow H = p_r \dot{q}_r + p_\theta \dot{q}_\theta - L \Rightarrow$

και συνεπώς

$\Rightarrow H = m\dot{r}\,\dot{r} + mr^2\dot{\theta}\,\dot{\theta} - L$

$\Rightarrow H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - L$ $(T-V)$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \,.$$

$\Rightarrow H = \frac{m^2\dot{r}^2}{m} + \frac{m^2 r^4\dot{\theta}^2}{mr^2} - L$

$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - T + V$

Οι τέσσερεις κανονικές εξισώσεις Hamilton είναι

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \,, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \,, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \,, \quad \dot{p}_\theta = 0 \,.$$

Οι δύο πρώτες είναι απλώς ταυτότητες και μας δίδουν την σχέση μεταξύ γενικευμένων ταχυτήτων και γενικευμένων ορμών. Οι δύο τελευταίες είναι οι εξισώσεις κίνησης και ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange.

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΡΟΥΣΗ

10/5/2007

27/3/2008

23/04/13

25/4/2012

6.1 Θεμελιώδης Εξίσωση της Κρούσης

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει την κίνηση σωμάτων υπό την ενέργεια συνήθων δυνάμεων, όπου οι ταχύτητες των υλικών σημείων μεταβάλλονται συνεχώς, δηλαδή σ΄ ένα απειροστό χρονικό διάστημα αντιστοιχεί μιά απειροστή μεταβολή της ταχύτητας. Με άλλα λόγια οι δυνάμεις που έχουν εισέλθει μέχρι τώρα είναι λείες συναρτήσεις του χρόνου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσδιορίσουμε τις μεταβολές που επέρχονται στις κινήσεις των σωμάτων, όταν αυτά προσκρούουν μεταξύ τους με ορμή. Η σύγκρουση αυτή λαμβάνει χώρα σε δύο στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο, το οποίο καλείται **σύνθλιψη**, τα τμήματα των σωμάτων που ευρίσκονται κοντά στην περιοχή της κρούσης πιέζονται μέχρις ότου τα συγκρουόμενα σώματα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. Οι δυνάμεις που αναπτύσσουν τα σώματα εκτελούν αρνητικό έργο και απορροφούν ανάλογο μέρος της αρχικής ενέργειας που διαθέτουν τα σώματα. Κατά το δεύτερο στάδιο, το οποίο καλείται **ανάπαλση**, οι ασκούμενες δυνάμεις εκτελούν θετικό έργο και η κινητική ενέργεια των συγκρουσθέντων σωμάτων επανέρχεται σε τιμή που πλησιάζει την αρχική τόσο περισσότερο, όσο ποιό ελαστικά είναι τα σώματα˙ αν τα σώματα είναι ανελαστικά παρουσιάζεται μόνιμη παραμόρφωση ενώ τμήμα της αρχικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Το χρονικό διάστημα που λαμβάνει χώρα η σύγκρουση θεωρείται πολύ μικρό, ενώ αντίθετα, η αναπτυσσόμενη δύναμη πολύ μεγάλη. Δεν είναι όμως εύκολο να προσδιορίσουμε ούτε τον τρόπο μεταβολής της δύναμης συναρτήσει του βάθους συμπίεσης, ούτε το πραγματικό βάθος συμπίεσης. Γιά την έρευνα του φαινομένου βοηθεί ιδιαίτερα η παρόρμηση Ω της δύναμης, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\Omega = \int_0^t F \cdot dt$$

$$\Omega = \int_0^t P\, dt \qquad (6.1)$$

Θεωρήσουμε υλικό σημείο υπό την ενέργεια συνήθων δυνάμεων P_1, P_2,... ..., P_n. Η παρόρμηση της δύναμης P_i, γιά ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt, μπορεί να καθορισθεί ως το γινόμενο $P_i^{\mu}\Delta t$, όπου P_i^{μ} είναι η μέση τιμή της δύναμης P_i στο διάστημα Δt. Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης θα έχουμε

η μέση τιμή της δύναμης

$$m\Delta\upsilon = \sum_i P_i^{\mu}\Delta t \Rightarrow \Delta\upsilon = \frac{\Delta t}{m}\sum_i F_i^{\mu} \qquad (6.2)$$

$\upsilon_1 - \upsilon_0$

όπου $\Delta\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_0$ παριστάνει την μεταβολή της ταχύτητας. Βλέπουμε λοιπόν ότι γιά ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt, τείνον στο μηδέν και γιά συνήθεις δυνάμεις, η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\upsilon$ είναι επίσης απειροστό μέγεθος. Αν όμως ενεργήσουν δυνάμεις πολύ μεγάλες, της τάξης π.χ. $1/\Delta t$, τότε η μεταβολή $\Delta\upsilon$ έχει πεπερασμένη τιμή. Εξ άλλου, αν γ παριστάνει την επιτάχυνση στην διεύθυνση της συνισταμένης $\sum_i P_i^{\mu}$ και υ_1, υ_0 είναι οι ταχύτητες στο τέλος και την αρχή του χρονικού διαστήματος αντίστοιχα κατά την διεύθυνση της παραπάνω συνισταμένης, τότε ισχύει

$\Delta s \to 0$ (αλλά)

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \frac{\Delta t}{m}\sum_i P_i^{\mu}, \quad s_1 = s_0 + \upsilon_0\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}\sum_i P_i^{\mu}. \qquad (6.3)$$

Επομένως γιά $\Delta t \to 0$ η μεταβολή $\Delta\upsilon$ τείνει στο μηδέν γιά συνήθεις δυνάμεις, ενώ η $\Delta\upsilon$ τείνει σε πεπερασμένες τιμές γιά πολύ μεγάλες δυνάμεις. Από την άλλη μεριά το διανυθέν διάστημα $\Delta s = s_1 - s_0$ τόσο γιά τις συνήθεις όσο και γιά τις μεγάλες δυνάμεις τείνει πάντοτε προς το μηδέν. Το φαινόμενο κατά το οποίο οι ταχύτητες των σημείων ενός σώματος υπόκεινται σε πεπερασμένη μεταβολή γιά ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt, ενώ τα σημεία δεν παρουσιάζουν μετατοπίσεις, καλείται **κρούση**. Εξ άλλου, οι αντίστοιχες δυνάμεις καλούνται **δυνάμεις κρούσης** και συμβολίζονται $P^{\kappa\rho.}$, ενώ το χρονικό διάστημα Δt **χρονικό διάστημα κρούσης**. Θα δούμε παρακάτω ότι στο στάδιο της σύνθλιψης η παρόρμηση Ω_I μπορεί να προσδιορισθεί από τις αρχικές, πριν την κρούση, ταχύτητες των σωμάτων (ταχύτητες προσέγγισης), ενώ κατά το στάδιο της ανάπαλσης η παρόρμηση Ω_{II} είναι τμήμα της Ω_I με βάση την σχέση

$$\boxed{\Omega_{II} = \kappa\Omega_I\,.} \qquad (6.4)$$

Ο συντελεστής κ καλείται **συντελεστής κρούσης** και ισούται προς την μονάδα γιά απολύτως ελαστικά σώματα (τέλεια ελαστική κρούση), ενώ ισούται προς μηδέν γιά απολύτως πλαστικά σώματα (ανελαστική κρούση). Στην πραγματικότητα ισχύει

$$\boxed{0 < \kappa < 1 ,}$$

και ο συντελεστής κ προσδιορίζεται πειραματικά με αποτέλεσμα να θεωρείται γνωστός. Στην περίπτωση αυτή οι παρορμήσεις Ω_{I} και Ω_{II}, που καθορίζουν την κρούση, προκύπτουν συναρτήσει των αρχικών ταχυτήτων.

Η παρόρμηση μιάς δύναμης κρούσης

$\Omega = \int_0^{\Delta t} F . dt$

$$\Omega^{\kappa\rho.} = \int_0^{\Delta t} P^{\kappa\rho.} dt = P^{\mu}_{\kappa\rho.} \Delta t \qquad (6.5)$$

$= \int_0^{\Delta t} m \cdot \gamma dt = \int m \frac{du}{dt} dt$

είναι ποσότητα πεπερασμένη. Παριστάνοντας την ταχύτητα ενός υλικού σημείου μαζάς m στην αρχή της κρούσης με **υ** (ταχύτητα προσέγγισης) και την ταχύτητα στο τέλος της κρούσης (ταχύτητα διαχωρισμού) με **w**, θα έχουμε

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΡΟΥΣΗΣ

$$\boxed{m(\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \sum_i \Omega_i ,} \qquad (6.6)$$

Ω = Παρόρμηση = ώθηση

όπου αντί γιά $\Omega_i^{\kappa\rho.}$ εθέσαμε γιά απλοποίηση Ω_i και τούτο διότι όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι παρορμήσεις των άλλων δυνάμεων κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι μηδενικές. Η διατύπωση (6.6) αποτελεί την θεμελιώδη εξίσωση της θεωρίας της κρούσης. Επίσης, η ίδια εξίσωση δομεί και το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης ενός υλικού σημείου κατά την διάρκεια της κρούσης, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: ***Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός υλικού σημείου κατά το διάστημα της κρούσης ισούται προς το άθροισμα των παρορμήσεων των δυνάμεων κρούσης που ενεργούν επί του σημείου.*** Τέλος σημειώνουμε ότι η μετακίνηση του σημείου κατά την κρούση είναι πολύ μικρή ποσότητα (απειροστή) και μπορεί να αμεληθεί.

Με βάσει τα προαναφερθέντα καταλήγουμε στα εξής τρία συμπεράσματα:

α) Η ενέργεια μη κρουστικών δυνάμεων (π.χ. βαρύτητα) κατά το χρονικό διάστημα της κρούσης μπορεί να αμεληθεί,

β) Η μετακίνηση των σημείων ενός σώματος κατά τον χρόνο της κρούσης μπορεί να αμεληθεί και συνεπώς το σώμα να θεωρηθεί ως ακίνητο, και

γ) Η μεταβολή των ταχυτήτων των σημείων ενός σώματος κατά τον χρόνο της κρούσης καθορίζεται με την θεμελιώδη εξίσωση της κρούσης (6.6).

6.2 Γενικά Θεωρήματα της Θεωρίας Κρούσης

Γιά την μελέτη της κρούσης συστήματος υλικών σημείων χρησιμοποιούνται τα παρακάτω θεωρήματα:

6.2.1 *Το θεώρημα της μεταβολής της ποσότητας κίνησης ενός συστήματος που υπόκειται σε κρουστικές δυνάμεις*

Η γνωστή εξίσωση του αντίστοιχου κεφαλαίου έχει την ίδια μορφή και στην περίπτωση της κρούσης, αλλά επειδή, όπως ήδη αναφέρθηκε, η παρόρμηση των συνήθων δυνάμεων παραλείπεται, παραμένουν μόνο οι παρορμήσεις των δυνάμεων κρούσης. Επομένως, ισχύει

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$J_1 - J_0 = \sum_i \Omega_i^{\varepsilon\xi.}, \tag{6.7}$$

η οποία ως γνωστόν προκύπτει από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής

$F = m\gamma \rightarrow F \cdot dt = m\gamma\, dt = m\frac{dv}{dt}dt \longrightarrow F \cdot dt = d(mv)$

$$Fdt = d(mv).$$

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε το συμπέρασμα: ***Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός συστήματος κατά το χρονικό διάστημα της κρούσης είναι ίση προς την ολική παρόρμηση όλων των εξωτερικών δυνάμεων κρούσης που ενεργούν επί του συστήματος.***

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$\sum_i \Omega_i^{\varepsilon\xi.} = 0,$$

η ποσότητα κίνησης παραμένει αμετάβλητη κατά την κρούση και επομένως οι παρορμήσεις των εσωτερικών δυνάμεων δεν μεταβάλλουν την ποσότητα κίνησης του συστήματος.

6.2.2 *Το θεώρημα της συστροφής ενός συστήματος που υπόκειται σε κρουστικές δυνάμεις*

στροφορμή

Θεωρήσουμε ένα σύστημα n υλικών σημείων και παραστήσουμε την συνισταμένη παρόρμηση όλων των εξωτερικών δυνάμεων κρούσης που ενεργούν σ΄ ένα σημείο Σ_i μάζας m_i με $\Omega_i^{\varepsilon\xi.}$, ενώ την συνισταμένη όλων των εσωτερικών δυνάμεων κρούσης με $\Omega_i^{\varepsilon\sigma.}$. Τότε, με βάση την εξίσωση (6.6) προκύπτει

$$m_i(w_i - \upsilon_i) = \Omega_i^{\varepsilon\xi.} + \Omega_i^{\varepsilon\sigma.} \quad (6.8)$$

Λαμβάνοντας τις ροπές των διανυσμάτων που εισέρχονται στην εξίσωση (6.8) προς τυχόν κέντρο Ο, ευρίσκουμε

$$r \times m_i w_i - r \times m_i \upsilon_i = r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.} + r \times \Omega_i^{\varepsilon\sigma.} \quad (6.9)$$

Γράφοντας την (6.9) γιά όλα τα σημεία του σώματος καταλήγουμε στην έκφραση

$$\sum_i r \times m_i w_i - \sum_i r \times m_i \upsilon_i = \sum_i r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.} + \sum_i r \times \Omega_i^{\varepsilon\sigma.}, \quad (6.10)$$

το αριστερό μέλος της οποίας παριστάνει την συνολική συστροφή του συστήματος ως προς το κέντρο Ο στο τέλος και την αρχή της κρούσης, που συμβολίζουμε με G_1 και G_0 αντίστοιχα. Έχει όμως ήδη λεχθεί ότι το άθροισμα $\sum_i \Omega_i^{\varepsilon\sigma.}$ είναι ίσο προς μηδέν, δεδομένου ότι αναφέρεται στην συνολική παρόρμηση των εσωτερικών δυνάμεων κρούσης. Επομένως η εξίσωση (6.10) παίρνει την διανυσματική έκφραση

$$\frac{dG}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow dG = \vec{r} \times \vec{F} dt \Rightarrow \int dG = \int (\vec{r} \times \vec{F}) dt \qquad \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{r} \times \Omega$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΣΤΡΟΦΗΣ

$$G_1 - G_0 = \sum_i r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.}, \quad (6.11)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$F = m \cdot \gamma \Rightarrow$

με ισοδύναμες αναλυτικές εξισώσεις ως προς τους άξονες του τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων τις

$F = m \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$

$\int F \cdot dt = \int m \, d\upsilon \Rightarrow$

$d\Omega = m \, d\upsilon \Rightarrow$

$\vec{r} \times d\vec{\Omega} = \vec{r} \times m \, d\vec{\upsilon} \Rightarrow$

$$G_{1x} - G_{0x} = \sum_i (r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.})_x,$$

$$G_{1y} - G_{0y} = \sum_i (r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.})_y, \quad (6.12)$$

$$G_{1z} - G_{0z} = \sum_i (r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.})_z.$$

$\Rightarrow \vec{r} \times d\vec{\Omega} = dG$ $\quad \boxed{dG = r \times d\vec{\Omega}}$

εξίσωση: $dG = \vec{r} \times \vec{F} \cdot dt$

$dG = \vec{r} \times d\vec{\Omega}$

$\boxed{dG = \vec{r} \times d\vec{\Omega}}$ η μεταβολή της στροφορμής ισούται με την ροπή της ώθησης

Η διανυσματική εξίσωση (6.11) εξήχθη με βάση το γεγονός ότι κατά την διάρκεια του φαινομένου της κρούσης οι μετακινήσεις είναι μηδενικές και συνεπώς η διανυσματική ακτίνα r θεωρείται αμετάβλητη. Εξ άλλου η εξίσωση αυτή είναι

Αλλοιώς:

$\frac{dG}{dt} = r \times F$

$\Rightarrow dG = r \times \underbrace{\vec{F} \cdot dt}_{\Omega} \Rightarrow \boxed{dG = \vec{r} \times d\vec{\Omega}}$

ίδια με εκείνη που προκύπτει από το θεώρημα της συστροφής γιά τις συνήθεις δυνάμεις, δηλαδή

$$\boxed{dG = r \times P dt = r \times d\Omega .} \qquad (6.13)$$

Συνεπώς, μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής συμπέρασμα: ***Κατά την διάρκεια της κρούσης η μεταβολή της συνολικής συστροφής ενός συστήματος ως προς τυχόν κέντρο είναι ίση προς το άθροισμα των ροπών των παρορμήσεων όλων των εξωτερικών δυνάμεων κρούσης που ενεργούν επί του συστήματος ως προς το ίδιο κέντρο.***

Από την άλλη μεριά, μέσω των (6.11) και (6.12) προκύπτει ότι αν το άθροισμα των ροπών των παρορμήσεων όλων των εξωτερικών δυνάμεων κρούσης ως προς κέντρο ή άξονα είναι ίσο προς μηδέν, η συνολική συστροφή του συστήματος παραμένει σταθερή κατά την διάρκειά της κρούσης. Έτσι συνάγουμε ότι παρορμήσεις εσωτερικών δυνάμεων κρούσης δεν μπορούν να μεταβάλλουν την συστροφή του σώματος.

6.3 Συντελεστής Κρούσης

Ο συντελεστής κρούσης κ, όπως και παραπάνω αναφέρθηκε, χαρακτηρίζει τις ελαστικές ή πλαστικές (ανελαστικές) ιδιότητες των συγκρουομένων δύο σωμάτων και είναι καθοριστικός του μέτρου της παρόρμησής τους, η οποία δεν εξαρτάται μόνο από τις μάζες και τις αρχικές ταχύτητες των σωμάτων (πριν την κρούση), αλλά και από τον ίδιο τον κ. Ως παράδειγμα αναφέρουμε εδώ την πτώση από ένα ορισμένο ύψος μιάς ελαστικής σφαίρας πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που παραμένει απαραμόρφωτο. Οι ταχύτητες των σημείων της σφαίρας που πίπτει με μεταβατική κίνηση, έστω ότι είναι, πριν την κρούση, υ και κατά την κρούση μηδενικές. Κατά το στάδιο της σύνθλιψης η σφαίρα παραμορφώνεται και η αρχική κινητική ενέργεια είναι ίση προς $m\upsilon^2/2$, η οποία μετατρέπεται σε εσωτερική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Κατά το στάδιο της ανάπαλσης οι εσωτερικές ελαστικές δυνάμεις αποκαθιστούν το σχήμα και η εσωτερική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική, ώστε στο τέλος και αυτού του σταδίου οι ταχύτητες των σημείων της σφαίρας γίνονται w ενώ η κινητική ενέργεια $mw^2/2$. Συνεπώς, υπάρχει μιά απώλεια ενέργειας ίση προς $m\upsilon^2/2 - mw^2/2$, η οποία αναλίσκεται σε ένα μέρος γιά την δημιουργία μικρής μόνιμης παραμόρφωσης και σε ένα υπόλοιπο γιά την ανάπτυξη θερμότητας. Επομένως πάντοτε ισχύει $w < \upsilon$. Στην περίπτωση αυτή της ευθείας κρούσης, ο συντελεστής κρούσης κ καθορίζεται με την σχέση

$$\kappa = w/\upsilon \ . \qquad (6.14)$$

υ = ταχ. προσέγγισης
W = ταχ. διαχωρισμού.

Γενικότερα τώρα όταν δύο σώματα συγκρούονται οι παρορμήσεις των δυνάμεων εξαρτώνται μόνο από την σχετική ταχύτητα των σωμάτων, δηλαδή την διαφορά $\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}$, όπου $\boldsymbol{\upsilon}_1$ και $\boldsymbol{\upsilon}_2$ παριστούν τις αντίστοιχες ταχύτητες πριν από την κρούση. Γιά τα δύο αυτά σώματα έχοντας υπ΄ όψη ότι πάντοτε ισχύει

$$\upsilon_{1x} > \upsilon_{2x} \ , \quad w_{1x} < w_{2x} \ ,$$

γράφουμε

$$\kappa = \left| \frac{w_{1x} - w_{2x}}{\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}} \right| = - \frac{w_{1x} - w_{2x}}{\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}} \rightarrow \ w_{1x} - w_{2x} = - \kappa\,(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}) \ . \qquad (6.15)$$

Ο συντελεστής κ γιά διάφορα σώματα καθορίζεται πειραματικά και κυμαίνεται μεταξύ του 1 (γιά τέλεια ελαστική κρούση) και του 0 (γιά τέλεια πλαστική, ά-νελαστική κρούση).

6.4 Είδη Κρούσεων

Κατά την κρούση δύο σωμάτων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Ο άξονας της αναπτυσσόμενης δύναμης κρούσης περνάει από το κέντρο μάζας και των δύο σωμάτων. Η κρούση στην περίπτωση αυτή καλείται **κεντρική** και ως προς τα δύο σώματα. Εφ΄ όσον ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας του ενός μόνον σώματος, τότε η κρούση καλείται **κεντρική** ως προς το ένα σώμα και **έκκεντρη** ως προς το άλλο. Τέλος, αν ο άξονας δεν διέρχεται από τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων ομιλούμε περί **έκκεντρης** κρούσης.

β) Οι ταχύτητες αμφοτέρων των σωμάτων κατά την στιγμή της έναρξης της κρούσης διευθύνονται κάθετα προς το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο των δύο σωμάτων. Η πρώτη στην περίπτωση αυτή καλείται **ευθεία**. Εφ΄ όσον η ταχύτητα μόνον του ενός σώματος διευθύνεται κάθετα προς το παραπάνω επίπεδο, η κρούση καλείται **ευθεία** ως προς το σώμα αυτό και **λοξή** ως προς το άλλο. Τέλος, αν ουδεμία ταχύτητα διευθύνεται κάθετα προς το εφαπτόμενο επίπεδο, η κρούση καλείται γενικά **λοξή.**

γ) Κατά την λοξή κρούση δεν αναπτύσσεται εφαπτομενική συνιστώσα επί του κοινού εφαπτόμενου επιπέδου, δηλαδή δεν αναπτύσσεται τριβή. Συνεπώς, η αναπτυσσόμενη δύναμη κρούσης διευθύνεται προς το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή η κρούση καλείται **λεία - λοξή,** ενώ στην αντίθετη ακριβώς περίπτωση **τραχεία - λοξή.**

6.5 Κεντρική Ευθεία Κρούση Δύο Σωμάτων

Υποθέτουμε ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 έχουν μεταφορική κίνηση και ότι συγκρούονται με κεντρική ευθεία κρούση έχοντας αρχικές και τελικές ταχύτητες υ_1, υ_2 και w_1, w_2 αντίστοιχα. Μετά το τέλος του σταδίου της συνθλίψης υπάρχει κοινή ταχύτητα που παριστάνεται με υ. Έτσι, ο μηχανισμός της κρούσης συντελείται ως εξής:

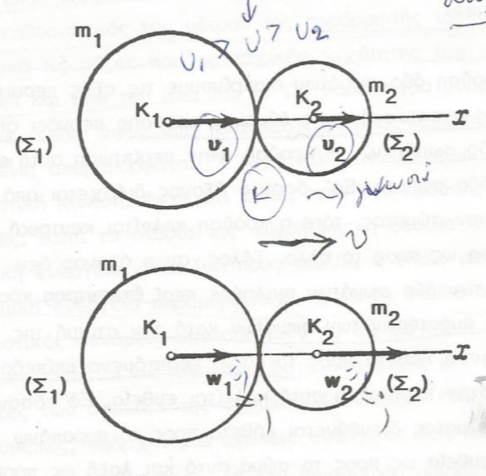
a) Γιά να γίνει η σύγκρουση πρέπει $\upsilon_1 > \upsilon_2$ και γιά να γίνει διαχωρισμός πρέπει $w_1 \leq w_2$. Υπάρχει όμως ένα διάστημα μεταξύ σύνθλιψης και ανάπαλσης που η ταχύτητα υ είναι κοινή και γιά τα δύο σώματα. Δεχόμεθα ότι είναι γνωστά τα υ_1, υ_2, κ και θέλουμε να προσδιορίσουμε τα w_1, w_2.

b) Θεωρήσουμε ως άξονα x την ευθεία των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων με θετική φορά αυτή των ταχυτήτων (Σχ. 6.1).

υ = η κοινή ταχύτητα μεταξύ σταδίου σύνθλιψης και ανάπαλσης

Για να γίνει κρούση: $\upsilon_1 > \upsilon_2$

Για να γίνει διαχωρισμός $w_1 \leq w_2$



Σχήμα 6.1: Ευθεία κεντρική κρούση δύο σφαιρικών μαζών.

Επειδή $\upsilon_1 > \upsilon > \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon - \upsilon_2 < 0$

Εφαρμόζοντας την αντίστοιχη αναλυτική εξίσωση της διανυσματικής εξίσωσης (6.8) και λαμβάνοντας υπ' όψη τα όσα ήδη έχουν εκτεθεί, καταλήγουμε στις σχέσεις

Επειδή $\upsilon_1 > \upsilon \Rightarrow \upsilon - \upsilon_1 < 0$

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon - \upsilon_1) &= \Omega, \\ m_2(\upsilon - \upsilon_2) &= -\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (6.16)$$

και

$$\left.\begin{aligned} m_1(w_1 - \upsilon) &= \Omega, \\ m_2(w_2 - \upsilon) &= -\kappa\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (6.17)$$

Οι (6.16) ισχύουν γιά τα δύο σώματα στο τέλος του σταδίου της σύνθλιψης και οι (6.17) στο τέλος του σταδίου της ανάπαλσης. Επειδή $\upsilon_1 > \upsilon > \upsilon_2$ στην πρώτη των εξισώσεων (6.16) η παρόρμηση επάνω στο σώμα m_1 είναι αρνητική, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι στο m_1 ενεργεί μόνο η αντίδραση του σώματος m_2 αντίθετα, στην δεύτερη των εξισώσεων (6.16) η παρόρμηση $-\Omega$ επάνω στο m_2 είναι θετική, αφού επί του m_2 ενεργεί η δράση του m_1. Με τον συλλογισμό αυτόν και δεδομένου ότι $w_1 > \upsilon > w_2$, ανάλογες συνθήκες ισχύουν γιά τις εξισώσεις (6.17).

Από τις (6.16) και (6.17), μετά την εκτέλεση απλών αλγεβρικών πράξεων, ευρίσκουμε

$$\Omega = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\upsilon_2 - \upsilon_1), \quad \upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \quad (6.18)$$

$$w_1 = \frac{(m_1 - \kappa m_2)\upsilon_1 + (1+\kappa)m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{(m_2 - \kappa m_1)\upsilon_2 + (1+\kappa)m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \quad (6.19)$$

Γιά τις ακραίες περιπτώσεις τέλειας ελαστικής κρούσης ($\kappa = 1$) και τέλειας πλαστικής κρούσης ($\kappa = 0$), οι εξισώσεις (6.19) παρέχουν αντίστοιχα:

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad (6.20)$$

$$w_1 = w_2 = \upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.21)$$

Τους τύπους (6.18) και (6.19) μπορούμε να εξάγουμε και με τον εξής διαφορετικό τρόπο.

Αν θεωρήσουμε τα δύο σώματα ως ένα μοναδικό σύστημα, οι δυνάμεις κρούσης θα είναι εσωτερικές και συνεπώς η εξίσωση (6.8) παρέχει

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 \; . \tag{6.22}$$

Από την άλλη μεριά, η (6.15) καταλήγει στην

$$K = \frac{|w_1 - w_2|}{|\upsilon_1 - \upsilon_2|} \quad \xrightarrow[\upsilon_1 > \upsilon_2]{w_1 < w_2} \quad K = \frac{-(w_1 - w_2)}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$$

$$w_1 - w_2 = -\kappa(\upsilon_1 - \upsilon_2) \; . \tag{6.23}$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων επανευρίσκουμε τις εκφράσεις των w_1, w_2. Εξ άλλου, μέσω της (6.8), παίρνουμε

$$\Omega_1 = m_1(w_1 - \upsilon_1) \; , \qquad \Omega_2 = -\,\Omega_1 \; , \tag{6.24}$$

στις οποίες Ω_1 και Ω_2 παριστάνουν τις συνολικές παρορμήσεις των δύο σωμάτων m_1 και m_2 αντίστοιχα. Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις (6.16) και (6.17) και κάνοντας χρήση της (6.23) υπολογίζουμε

$$\Omega_1 = \Omega(1+\kappa) = m_1(w_1 - \upsilon_1) \; , \quad \Omega_2 = -\,\Omega(1+\kappa) = m_2(w_2 - \upsilon_2) = -\,m_1(w_1 - \upsilon_1) . \tag{6.25}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει η Ω όπως ακριβώς στους τύπους (6.18). Γιά $\kappa = 0$, δηλαδή γιά τέλεια πλαστική κρούση, η συνολική παρόρμηση υπολογίζεται

$$\Omega_1 = -\,\Omega_2 = \frac{m_1 m_2(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{m_1 + m_2} \; , \tag{6.26}$$

ενώ γιά $\kappa = 1$, δηλαδή γιά τέλεια ελαστική κρούση, υπολογίζεται

$$\Omega_1 = -\,\Omega_2 = \frac{2 m_1 m_2(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{m_1 + m_2} \; . \tag{6.27}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι στην τέλεια ελαστική κρούση δύο σωμάτων η συνολική παρόρμηση είναι διπλάσια της αντίστοιχης στην τέλεια πλαστική κρούση.

9/5/11

Θ. Carnot

6.6 Απώλεια Κινητικής Ενέργειας στην Τέλεια Πλαστική (Ανελαστική) Κρούση

Στην τέλεια πλαστική κρούση δύο σωμάτων μαζών m_1, m_2 επέρχεται μείωση της κινητικής ενέργειας. Υποθέτουμε ότι η κρούση είναι ευθεία κεντρική και ότι τα δύο συγκρουόμενα σώματα έχουν μεταφορική κίνηση με ταχύτητες υ_1, υ_2 αντίστοιχα. Έστω τώρα υ η κοινή ταχύτητα στο τέλος του σταδίου σύνθλιψης. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι

$$K_0 = \frac{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2}{2}, \tag{6.28}$$

ενώ στο τέλος της σύνθλιψης είναι

$$K_1 = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 U^2 + m_2 U^2}{2} \tag{6.29}$$

Δι΄ αφαιρέσεως κατά μέλη των δύο τελευταίων εξισώσεων υπολογίζουμε την απώλεια ΔK, δηλαδή

$$U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta K = K_0 - K_1 = \frac{m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon^2) + m_2(\upsilon_2^2 - \upsilon^2)}{2}, \tag{6.30}$$

η οποία, μέσω των (6.18) παίρνει την μορφή

Θ. Garnot

$$\Delta K = K_0 - K_1 = \frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon)^2 + m_2(\upsilon_2 - \upsilon)^2}{2}. \tag{6.31}$$

Οι διαφορές $\upsilon_1 - \upsilon$ και $\upsilon_2 - \upsilon$ παρέχουν τις ταχύτητες καθενός σώματος ως αποτέλεσμα της κρούσης. Με βάση την εξίσωση (6.31) μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Garnot, δηλαδή: ***Η απώλεια της κινητικής ενέργειας συστήματος σωμάτων σε μιά τέλεια ανελαστική (πλαστική) κρούση ισούται με την κινητική ενέργεια του συστήματος που θα είχε αν τα σώματα εκινούντο με τις απωλεσθείσες ταχύτητες.***

Γιά $\kappa = 1$, δηλαδή στην τέλεια ελαστική κρούση, προκύπτει

$$\Delta K = K_0 - K_1 = \frac{m_1(\upsilon_1 - w_1)^2 + m_2(\upsilon_2 - w_2)^2}{2}. \tag{6.32}$$

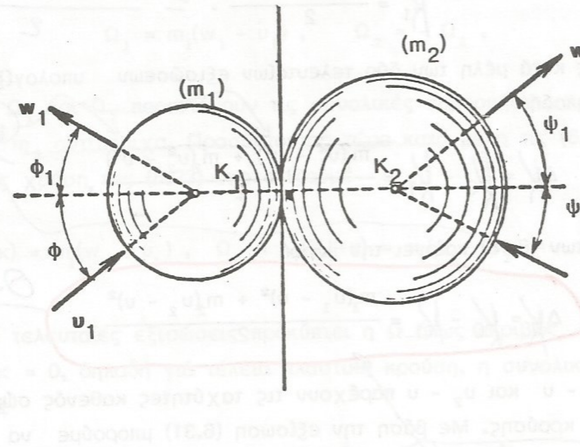
ενώ γιά $0 < \kappa < 1$, δηλαδή στην ημιελαστική κρούση, προκύπτει

$$\Delta L = L_0 - L_1 = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\,\frac{m_1(\upsilon_1 - w_1)^2 + m_2(\upsilon_2 - w_2)^2}{2}. \tag{6.33}$$

Συνεπώς, γιά $\kappa = 1$ η συνολική κινητική ενέργεια επανέρχεται τελικά στην αρχική τιμή, ενώ γιά $\kappa = 0$ η απωλεσθείσα κατά την σύνθλιψη κινητική ενέργεια δεν ανακτάται. Η ποσότητα κίνησης του συστήματος των δύο σωμάτων σε κάθε περίπτωση παραμένει αναλλοίωτη, γιατί οι αναπτυχθείσες κατά την κρούση δυνάμεις είναι εσωτερικές.

6.7 Κεντρική Λοξή Απόλυτα - Λεία Κρούση

Στην περίπτωση αυτή δεν αναπτύσσεται συνιστώσα της παρόρμησης επί του κοινού εφαπτομένου επιπέδου (Σχ. 6.2) και οι εφαπτομενικές συνιστώσες των ποσοτήτων κίνησης παραμένουν αμετάβλητες.



Σχήμα 6.2: Κεντρική λοξή απόλυτα - λεία κρούση δύο σφαιρικών σωμάτων.

Αναφερόμενοι στο σχήμα 6.2 ευρίσκουμε

$$m_1 w_1 \sin\phi_1 = m_1 \upsilon_1 \sin\phi \,, \quad m_2 w_2 \sin\psi_1 = m_2 \upsilon_2 \sin\psi \,, \qquad (6.34)$$

όπου ϕ, ψ και ϕ_1, ψ_1 παριστάνουν τις γωνίες πρόσπτωσης και ανάπαλσης αντίστοιχα.

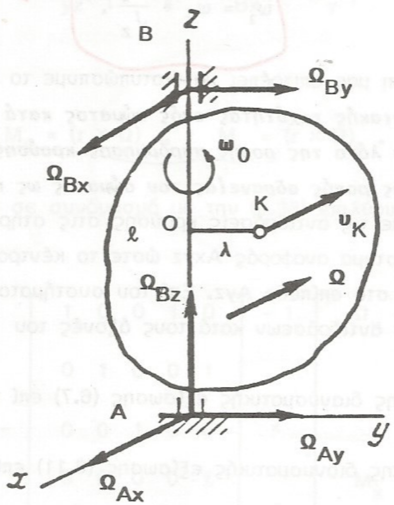
Αντίθετα, οι κάθετες συνιστώσες των ποσοτήτων κίνησης μεταβάλλονται όπως στην κεντρική ευθεία κρούση και επομένως, βάσει των (6.19), υπολογίζουμε

$$w_1\ \cos\phi_1 = \frac{(m_1 - \kappa m_2)\upsilon_1\ \cos\phi + (1+\kappa)m_2\upsilon_2\cos\psi}{m_1 + m_2},$$
$$w_2\ \cos\psi_1 = \frac{(m_2 - \kappa m_1)\upsilon_2\ \cos\psi + (1+\kappa)m_1\upsilon_1\ \cos\phi}{m_1 + m_2}. \qquad (6.35)$$

Ο συνδυασμός των τελευταίων εξισώσεων με τις (6.34) καταλήγει στον καθορισμό των μεγεθών ϕ_1, ψ_1 και w_1, w_2.

6.8 Κρούση με Περιστρεφόμενο Σώμα. - Κέντρο Κρούσης

Θεωρήσουμε περιστρεφόμενο στερεό με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί τον άξονα z (Σχ. 6.3) και έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή εφαρμόζεται επ΄ αυτού παρόρμηση κρούσης Ω με αποτέλεσμα την αλλαγή της γωνιακής ταχύτητάς του από ω_0 σε ω_1.



Σχήμα 6.3: Κρούση περιστρεφόμενου στερεού.

Με βάση τις εξισώσεις (6.11) και (6.12) προκύπτει

$$(G_1)_z - (G_0)_z = \sum_i (r \times \Omega_i^{\varepsilon\xi.})_z\ , \qquad (6.36)$$

όπου το δεύτερο μέλος παριστάνει την ροπή των εξωτερικών παρορμήσεων προς τον άξονα z. Εξωτερικές παρορμήσεις εδώ είναι η προαναφερθείσα Ω, καθώς επίσης και οι παρορμήσεις των αντιδράσεων Ω_B και Ω_A, των οποίων οι ροπές προς z είναι μηδενικές. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$(G_1)_z = J_z\omega_1 , \quad (G_0)_z = J_z\omega_0 , \tag{6.37}$$

στις οποίες J_z παριστάνει την ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα z. Επομένως, η εξίσωση (6.36) μετασχηματίζεται στην

$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = (\mathbf{r} \times \Omega)_z = M_z , \tag{6.38}$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{M_z}{J_z} . \tag{6.39}$$

Η τελευταία έκφραση μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το συμπέρασμα ότι: ***Η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας ενός σώματος κατά το διάστημα της κρούσης ισούται με τον λόγο της ροπής παρόρμησης κρούσης ως προς τον άξονα περιστροφής διά της ροπής αδρανείας του σώματος ως προς τον ίδιο άξονα.*** Γιά να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις κρούσης στις στηρίξεις Α και Β (Σχ. 6.3) φέρουμε το σύστημα αναφοράς Axyz ώστε το κέντρο βάρους Κ του σώματος να κείται πάνω στο επίπεδο Ayz. Επί του συστήματος αυτού αναφέρουμε τις συνιστώσες των αντιδράσεων κατά τους άξονές του και αναγράφουμε τις εξής εξισώσεις:

a) Τις προβολές της διανυσματικής εξίσωσης (6.7) επί των τριών αξόνων του συστήματος,
b) Τις προβολές της διανυσματικής εξίσωσης (6.11) επί των αξόνων Ax και Ay, και
c) Την εξίσωση (6.38).

Εξ άλλου, κατά το χρονικό διάστημα της κρούσης το σώμα δεν υφίσταται, όπως είναι γνωστό, μετακινήσεις και επομένως τα διανύσματα $\mathbf{v}_K$ και $\mathbf{w}_K$ του κέντρου μάζας είναι παράλληλα προς τον Ax, δηλαδή

$$J_{0_x} = - m\,v_K = -m\lambda\omega_0 , \quad J_{1_x} = - m\lambda\omega_1 , \quad J_y = J_z = 0 . \tag{6.40}$$

όπου λ είναι η απόσταση του K από τον Oz και m η συνολική μάζα του σώματος. Με βάση τις ήδη γνωστές σχέσεις

$$G_x = -J_x\omega, \quad G_y = -J_{yz}\omega, \tag{6.41}$$

και τις προβολές (a), (b) καταστρώνουμε τις εξής αναλυτικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} -m\lambda(\omega_1 - \omega_0) &= \Omega_{Ax} + \Omega_{Bx} + \Omega_x, \\ \Omega_{Ay} + \Omega_{By} + \Omega_y &= 0, \\ \Omega_{Az} + \Omega_z &= 0, \\ -J_{xz}(\omega_1 - \omega_0) &= -\Omega_{By}\ell + M_x, \\ -J_{yz}(\omega_1 - \omega_0) &= \Omega_{Bx}\ell + M_y, \end{aligned} \tag{6.42}$$

στις οποίες

$$M_x = (\mathbf{r}\times\Omega)_x, \quad M_y = (\mathbf{r}\times\Omega)_y. \tag{6.43}$$

Από τις (6.42), (6.43) σε συνδυασμό με την (6.38) επιλύουμε το σύστημα (6.42) και ευρίσκουμε

$$\begin{bmatrix}\Omega_{Ax}\\ \Omega_{Ay}\\ \Omega_{Az}\\ \Omega_{Bx}\\ \Omega_{By}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-\ell\\0&0&0&\ell&0\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}\Omega_x + m\lambda M_z/J_z\\ \Omega_y\\ \Omega_z\\ M_x + J_{xz}M_z/J_z\\ M_y + J_{yz}M_z/J_z\end{bmatrix}. \tag{6.44}$$

Δεδομένου ότι οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στο σώμα προκαλούν καταστροφές των στηριγμάτων, απαιτούμε πολλές φορές τον μηδενισμό τους. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην αναζήτηση συνθηκών κάτω από τις οποίες να ικανοποιούνται οι εξισώσεις (6.42) με την υπόθεση

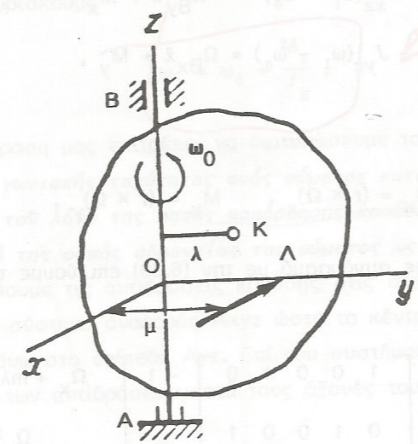
$$\Omega_A = \Omega_B = 0, \tag{6.45}$$

Εισάγοντας τις (6.45) στην εξίσωση πινάκων (6.44) εύκολα υπολογίζουμε ότι στην προκειμένη περίπτωση πρέπει

$$\Omega_y = \Omega_z = 0 \,, \tag{6.46}$$

δηλαδή ότι το διάνυσμα της παρόρμησης Ω είναι κάθετο στο επίπεδο Ayz. Από την άλλη μεριά, επειδή $\Omega_A = \Omega_B$ η μορφή του συστήματος (6.42) δεν εξαρτάται από την θέση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων επί του Oz και επομένως, μπορούμε γιά απλοποίηση να καθορίσουμε το επίπεδο Oxy έτσι ώστε πάνω σ΄ αυτό να κείται το διάνυσμα Ω, οπότε τότε θα είναι (Σχ. 6.4)

$$M_x = M_y = 0 \tag{6.47}$$



Σχήμα 6.4: Κρούση στερεού με διάνυσμα παρόρμησης κάθετο στο επίπεδο yOz.

Επί πλέον πρέπει το επίπεδο Oxy να διέρχεται από το σημείο O ως πρός το οποίο ο άξονας Oz να είναι κύριος άξονας αδρανείας ($J_{xz} = J_{yz} = 0$). Αν το Oxy είναι επίπεδο συμμετρίας τότε ισχύει η παραπάνω συνθήκη και τελικά προκύπτει

$$\Omega_x = -\Omega = -m\lambda\, M_z/J_z = -m\lambda\Omega\, \mu/J_z \rightarrow \mu = J_z/m\lambda \,, \tag{6.48}$$

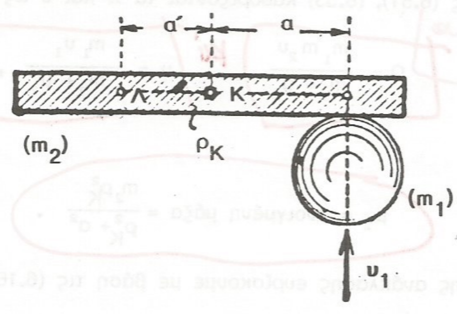
όπου μ είναι η απόσταση της Ω από τον άξονα Οx (Σχ. 6.4).
Τελικά συμπεραίνουμε ότι γιά να μηδενισθούν οι αντιδράσεις πρέπει η παρόρμηση κρούσης Ω να κείται στο επίπεδο Oxy, κάθετο στον άξονα z, διερχόμενο από το O ως προς το οποίο ο άξονας z να είναι κύριος άξονας αδρανείας. Επίσης πρέπει η κρούση να διευθύνεται κάθετα προς το επίπεδο του άξονα περιστροφής z και του κέντρου μάζας K του σώματος. Τέλος, η παρόρμηση κρούσης πρέπει να εφαρμοσθεί σε απόσταση $\mu = J_z/m\lambda$ από τον άξονα και προς την ίδια πλευρά του K ως προς τον άξονα.

Το σημείο Λ από το οποίο αν περάσει η παρόρμηση δεν θα αναπτυχθούν αντιδράσεις κρούσης στα στηρίγματα καλείται **κέντρο κρούσης.** Ας σημειωθεί εδώ ότι με βάση την σχέση (6.48) συμπεραίνουμε ότι το κέντρο κρούσης συμπίπτει με το κέντρο αιώρησης του απλού εκκρεμούς. Συνεπώς, όπως έχει ήδη δειχθεί, $\mu > \lambda$, δηλαδή η απόσταση του άξονα από το κέντρο κρούσης είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη απόσταση του κέντρου μάζας. Αν ο άξονας περιστροφής περάσει από το κέντρο μάζας K, τότε είναι $\lambda = 0$ και $\mu = \infty$. Στην περίπτωση αυτή το κέντρο κρούσης ευρίσκεται στο άπειρο και κάθε κρούση θα μεταφέρεται στον άξονα.

NAI

6.9 Έκκεντρη Κρούση

Η περίπτωση της έκκεντρης κρούσης εμφανίζεται όταν π.χ. υλικό σημείο μάζας m_1 και ταχύτητας υ_1 κρούει στερεό που ηρεμεί ($\upsilon_2 = 0$) και έχει μάζα m_2 και κέντρο μάζας K έτσι ώστε το επίπεδο $K\boldsymbol{\upsilon}_1$ να είναι επίπεδο συμμετρίας του κεντρικού ελλειψοειδούς αδρανείας του σώματος (Σχ. 6.5).



Σχήμα 6.5: Έκκεντρη κρούση δύο σωμάτων.

Τότε το σώμα θα κινηθεί στο επίπεδο $K\upsilon_1$. Αναλύουμε την παρόρμηση Ω σε μιά ομόρροπη και ίση που να διέρχεται από το κέντρο μάζας K και σε ένα ζεύγος με ροπή $\mathbf{a}\times\Omega = \mathbf{b}_0 a\Omega$, όπου $\mathbf{b}_0$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο $K\upsilon_1$. Το κέντρο μάζας του σώματος κατά το τέλος της σύνθλιψης αποκτά ταχύτητα υ_K, η οποία σύμφωνα με τις σχέσεις (6.16), (6.17) είναι

$$\boxed{\upsilon_K = \frac{\Omega}{m_2}.} \quad 1 \tag{6.49}$$

Λόγω τώρα της ροπής το κέντρο μάζας K αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega\mathbf{b}_0$, το μέτρο της οποίας, βάσει της σχέσης (6.11), είναι ίσο προς

$$\boxed{\omega = \frac{\Omega a}{J_K} = \frac{\Omega a}{m_2\rho_K^2}.} \quad 2 \tag{6.50}$$

Στο τέλος της σύνθλιψης η κοινή ταχύτητα υ στο σημείο κρούσης θα έχει τιμή

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_K + a\omega = \frac{\Omega(\rho_K^2 + a^2)}{m_2\rho_K^2},} \quad 3 \tag{6.51}$$

και

$$3, 2 \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{\omega} = \frac{\rho_K^2 + a^2}{a}. \quad 3' \tag{6.52}$$

Με βάση τις εξισώσεις (6.16), (6.17) γιά το σώμα m_1 είναι

$$\boxed{m_1(\upsilon - \upsilon_1) = -\Omega.} \quad 4 \tag{6.53}$$

Από τις σχέσεις (6.51), (6.53) καθορίζονται τα Ω και υ ως εξής:

$$3, 4 \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \frac{m_1 m_2 \upsilon}{m_1 + \mu_2}}, \ \text{και} \ \boxed{\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + \mu_2}}, \quad 5 \tag{6.54}$$

στις οποίες

$$\mu_2 = \text{ανοιγμένη μάζα} = \frac{m_2\rho_K^2}{\rho_K^2 + a^2}. \tag{6.55}$$

Γιά το στάδιο της ανάπλασης ευρίσκουμε με βάση τις (6.16), (6.17):

$$w_1 = \frac{m_1 - \kappa m_2}{m_1 + \mu_2}\upsilon_1, \quad w_2 = \frac{(1+\kappa)m_1}{m_1 + \mu_2}\upsilon_1 \tag{6.56}$$

$$\boxed{\kappa\,\Omega = \mu_2(w_2 - \upsilon) = m_1(\upsilon - w_1)\ ,} \quad 6$$

όπου κ είναι ο συντελεστής κρούσης. Γιά το κέντρο κρούσης Λ, δηλαδή το ίχνος του στιγμιαίου άξονα περιστροφής (Σχ. 6.5) θα είναι

$$7 \quad \boxed{\underbrace{(\alpha + \alpha')}_{r}\omega = \upsilon\ ,} \qquad \boxed{\alpha\alpha' = \rho_K^2\ .} \tag{6.57}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η απόσταση του κέντρου κρούσης από το κέντρο μάζας είναι η ίδια με την απόσταση του κέντρου αιώρησης στο φυσικό εκκρεμές. Σημειώνουμε εδώ ότι αν η κρούση είναι έκκεντρη και γιά το σώμα που κρούει, τότε θα εισαχθεί και η αντίστοιχη ανοιγμένη μάζα μ_1 οπότε το πρόβλημα θα αναχθεί σε πρόβλημα κεντρικής κρούσης με μάζες μ_1, μ_2.

μζί

$$3' \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = \frac{\rho_K^2 + \alpha^2}{\alpha}$$

$$7 \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = \alpha + \alpha'$$

$$\Rightarrow \alpha + \alpha' = \frac{\rho_K^2 + \alpha^2}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\alpha(\alpha + \alpha') = \rho_K^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\alpha^2} + \alpha\alpha' = \rho_K^2 + \cancel{\alpha^2} \Rightarrow$$

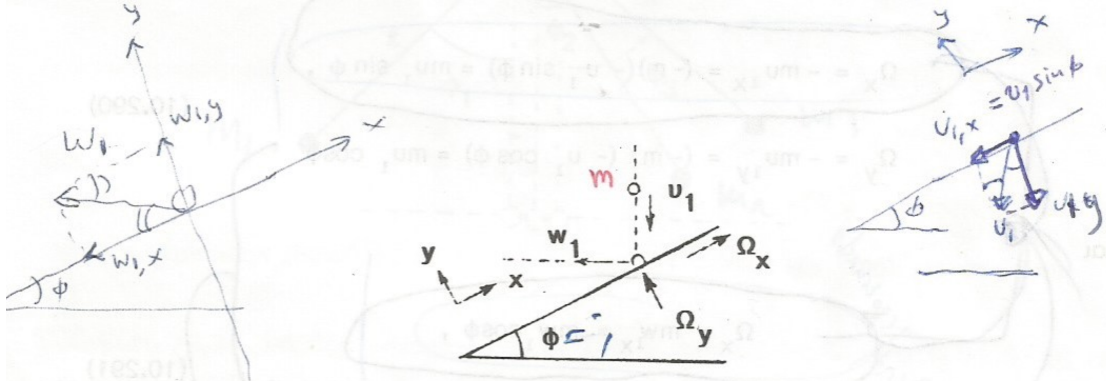
$$\boxed{\alpha\alpha' = \rho_K^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

18/5/07

6. ΚΡΟΥΣΗ

Εφαρμογή 6.1: Μικρή σφαίρα μάζης m πίπτει κατακορύφως και συναντά κεκλιμένο επίπεδο (Σχ. 10.58). Αν ο συντελεστής κρούσης είναι κ κάθετα προς το επίπεδο, ζητείται η γωνία κλίσης του επιπέδου ούτως ώστε η σφαίρα μετά την κρούση να κινηθεί οριζόντια.



Σχήμα 10.58: Κρούση σφαίρας επί κεκλιμένου επιπέδου

Λύση: Κατά την κρούση καλούμε $\mathbf{υ}_1 = (υ_{1x}, υ_{1y})$ και $\mathbf{w}_1 = (w_{1x}, w_{1y})$ την ταχύτητα της σφαίρας m προ και ολίγον μετά την κρούση αντίστοιχα, ενώ με $\mathbf{Ω} = (Ω_x, Ω_y)$ το διάνυσμα της παρόρμησης κατά το στάδιο της συμπίεσης (Σχ. 10.58). Από την άλλη μεριά, οι ταχύτητες του δευτέρου σώματος, δηλαδή του κεκλιμένου επιπέδου, πριν και ολίγον μετά την κρούση αντίστοιχα, είναι

$\mathbf{υ}_2 = (0, 0)$ και $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$. Ας είναι τέλος $\mathbf{υ} = (υ_x, υ_y)$ το κοινό διάνυσμα της ταχύτητος σφαίρας - επιπέδου κατά το τέλος της συμπίεσης. Η διανυσματική εξίσωση (6.6) γράφεται υπό αναλυτική μορφή ως εξής:

γιατί αφού το κεκλιμένο επίπεδο δεν κινείται θα πρέπει η $υ_{κοινή} = 0$

I. Στάδιο συμπίεσης:

$m_1(v - v_1) = Ω$

$m_2(v - v_2) = -Ω$

$$\text{Άξονας } x: \quad Ω_x = m(υ_x - υ_{1x}),$$

$$\text{Άξονας } y: \quad Ω_y = m(υ_y - υ_{1y}). \tag{10.288}$$

II. Στάδιο ανάπαλσης:

$m_1(w_1 - v) = Ω$

$m_2(w_2 - v) = -κΩ$

$$\text{Άξονας } x: \quad Ω_x = m(w_{1x} - υ_x),$$

$$\text{Άξονας } y: \quad κΩ_y = m(w_{1y} - υ_y). \tag{10.289}$$

$υ_x = 0, \; υ_y = 0$

Δεδομένου ότι $\mathbf{υ} = \mathbf{0}$ και λαμβανομένου υπ' όψη του σχήματος 10.58, οι εξισώσεις (10.288) και (10.289) γράφονται αντίστοιχα:

$$Ω_x = -mυ_{1x} = (-m)(-υ_1 \sin φ) = mυ_1 \sin φ,$$

$$Ω_y = -mυ_{1y} = (-m)(-υ_1 \cos φ) = mυ_1 \cos φ \tag{10.290}$$

και

$$Ω_x = mw_{1x} = mw_1 \cos φ,$$

$$κΩ_y = mw_{1y} = mw_1 \sin φ \tag{10.291}$$

Από τις δύο πρώτες των εξισώσεων (10.290) και (10.291) παίρνουμε

$$1 = \frac{υ_1}{w_1} \tan φ, \tag{10.292}$$

$\tan φ = \dfrac{w_1}{v_1}$

ενώ από τις δύο τελευταίες των (10.290) και (10.291)

$$κ = \frac{w_1}{υ_1} \tan φ. \tag{10.293}$$

$κ = \tan^2 φ$

$\tan φ = \sqrt{κ}$

$\tan φ$

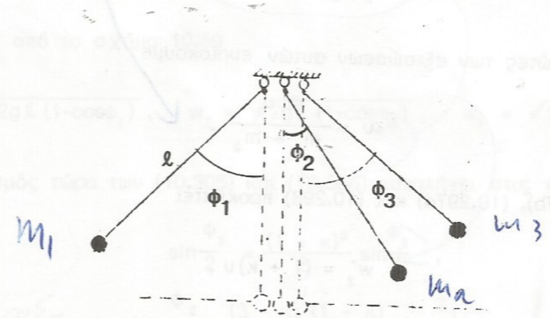
Συνεπώς υπολογίζουμε

$$\tan\phi = \sqrt{\kappa} \tag{10.294}$$

και

$$w_1 = \upsilon_1 \tan\phi = \sqrt{\kappa}\,\upsilon_1 \,. \tag{10.295}$$

Εφαρμογή 6.2: Τρεις σφαίρες μαζών m_1, m_2, m_3 είναι ανηρτημένες με αβαρή κατακόρυφα νήματα και ισορροπούν εν επαφή όπως φαίνεται στο σχήμα 10.59. Η σφαίρα m_1 εκτρέπεται κατά γωνία ϕ_1 και αφήνεται ελεύθερη. Ζητούνται οι γωνίες εκτροπής ϕ_2 και ϕ_3 των άλλων σφαιρών, όταν ο συντελεστής κρούσης είναι κ. Εφαρμογή γιά $m_1 = 2m_2 = 6m_3$.



Σχήμα 10.59: Σύστημα τριών σφαιρών εν επαφή.

Λύση: Πρόκειται περί κεντρικής ευθείας κρούσης επί του άξονος xx (Σχ. 10.59) τριών σωμάτων. Καλούμε με υ_1, υ_2, υ_3 τις τρεις ταχύτητες των μαζών προ της κρούσης και w_1, w_2, w_3 τα αντίστοιχα μεγέθη μετά την κρούση. Ας είναι επίσης Ω η παρόρμηση στο τέλος της συμπίεσης της κρούσης των δύο πρώτων σφαιρών και υ η κοινή τους ταχύτητα. Θεωρήσουμε τις δύο πρώτες μάζες m_1 και m_2. Αν καλέσουμε με w_1 και w_2' τις ταχύτητες αυτών μετά την κρούση, βάσει των εξισώσεων (6.16) και (6.17) μπορούμε να γράψουμε:

$$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = \Omega ,$$

$$m_2(\upsilon - \upsilon_2) = -\Omega , \tag{10.296}$$

$$m_1(w_1 - \upsilon) = \kappa\Omega ,$$

$$m_2(w_2' - \upsilon) = -\kappa\Omega,$$

όπου κ παριστάνει τον συντελεστή κρούσης. Σημειώνοντας ότι $\upsilon_2 = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$m_1(\upsilon - \upsilon_1) = \Omega , \qquad (10.297a)$$

$$m_2\upsilon = -\Omega, \qquad (10.297b)$$

$$m_1(w_1 - \upsilon) = \kappa\Omega , \qquad (10.297c)$$

$$m_2(w_2' - \upsilon) = -\kappa\Omega . \qquad (10.297d)$$

Από τις δύο πρώτες των εξισώσεων αυτών ευρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} . \qquad (10.298)$$

Από τις (10.297b), (10.297d) και (10.298) προκύπτει

$$w_2' = (1 + \kappa)\upsilon , \qquad (10.299)$$

ενώ από τις ίδιες εξισώσεις σε συνδυασμό με την (10.298) προκύπτει επίσης

$$w_2' = (1 + \kappa)\frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} . \qquad (10.300)$$

Θεωρούμε τώρα τις δύο επόμενες σφαίρες με μάζες m_2 και m_3, με ταχύτητες πριν την κρούση w_2', υ_3, ταχύτητες μετά την κρούση w_2, w_3 και κοινή ταχύτητα κατά το τέλος της σύνθλιψης ίση προς υ'. Λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι $\upsilon_3 = 0$, ότι η w_2' δίνεται συναρτήσει της υ ή υ_1 μέσω των τύπων (10.299) και (10.300) και ακολουθώντας τελείως ανάλογη προς την παραπάνω πορεία επίλυσης, ευρίσκουμε:

$$\upsilon' = \frac{m_2 w_2'}{m_2 + m_3} , \qquad (10.301)$$

$$w_3 = (1 + \kappa)\frac{m_2 w_2'}{m_2 + m_3} = (1 + \kappa)^2\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}\,\upsilon_1 . \qquad (10.302)$$

Από τις εξισώσεις (10.297a) και (10.297c) έχουμε

$$w_1 = (1+\kappa)\upsilon - \kappa\upsilon_1 , \tag{10.303}$$

ενώ γιά την δεύτερη κρούση αντίστοιχα

$$w_2 = (1+\kappa)\upsilon' - \kappa w' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{m_2-\kappa m_3}{m_2+m_3}(1+\kappa)\upsilon_1 . \tag{10.304}$$

Με βάση τώρα την συνθήκη $m_1 = 2m_2 = 6m_3$ οι εξισώσεις (10.302) και (10.304) παρέχουν

$$w_3 = (1+\kappa)^2 \frac{\upsilon_1}{2}, \quad w_2 = \frac{(3-\kappa)(1+\kappa)}{6}\upsilon_1 . \tag{10.305}$$

Είναι όμως από το σχήμα 10.59

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\phi_1)} , \quad w_2 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\phi_2)} , \quad w_3 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\phi_3)} . \tag{10.306}$$

Ο συνδυασμός τώρα των (10.305) και (10.306) καταλήγει στις εκφράσεις

$$\sin\frac{\phi_3}{2} = \frac{(1+\kappa)^2}{2}\sin\frac{\phi_1}{2} ,$$

$$\sin\frac{\phi_2}{2} = \frac{(3-\kappa)(1+\kappa)}{6}\sin\frac{\phi_1}{2} . \tag{10.307}$$

SOS

Εφαρμογή 6.3: Ράβδος μήκους ℓ και μάζης m κινείται παράλληλα προς εαυτή με σταθερή ταχύτητα υ_0, της οποίας το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονά της (Σχ. 10.60). Κατά την κίνηση η ράβδος συναντά μικρό εμπόδιο σε απόσταση (ℓ/4) από το κέντρο βάρους της. Ζητούνται τα μεγέθη κίνησης της ράβδου ευθύς μετά την κρούση και η παρόρμηση του εμποδίου. Η κρούση θεωρείται ανελαστική και ανευ ολισθήσεως.

του κέντρου βάρους

$w = ;$

$\Omega = ;$

Λύση: Πρόκειται περί έκκεντρης κρούσης. Θεωρούμε το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz του σχήματος 10.60 και έστω Ω η συνολική παρόρμηση του εμποδίου και **w** η ταχύτητα του κέντρου βάρους της ράβδου μετά την κρούση.

Το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά όλο το φαινόμενο της κρούσης, που δίνεται από τον τύπο (6.6), γράφεται

$m(w - v_0) = \Omega$

$\Delta G = \vec{r} \times \vec{\Omega} \Rightarrow J_S \cdot \omega = \frac{\ell}{4}\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{4 J_S \omega}{\ell}$

$\frac{dG}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow d\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}\,dt$

$J_S = \frac{m\ell^2}{12} \Rightarrow \Omega = \frac{m\omega\ell}{3}$

ΘΜΟ

$$m(\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) = \Omega, \qquad (10.308)$$

$\Rightarrow \vec{w} - \vec{v}_0 = \frac{\Omega}{m}$

ενώ το θεώρημα μεταβολής της συστροφής ως προς τον άξονα z, που δίνεται από την τρίτη των εξισώσεων (6.12) σε συνδυασμό με την τρίτη των εξισώσεων (4.60), γράφεται

ΘΜΣ

$\Delta G = \Sigma r \times \Omega_i$

$$J_S\,\omega\,\mathbf{k} = \mathbf{SH} \times \Omega = \frac{\ell}{4}\,\Omega\,\mathbf{k} \qquad (10.309)$$

$J_S \omega = \frac{\ell}{4}\Omega$

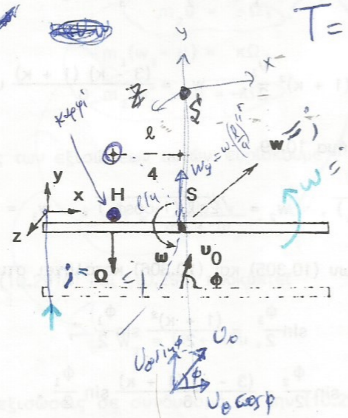
$\Omega = \frac{4 J \omega}{\ell}$

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

$T = \frac{1}{2} J \omega^2$

$G = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \frac{1}{2} J\, 2\omega$

$G = J \cdot \omega$



$w = 0$

$\Omega = 1$

Σχήμα 10.60: Κίνηση ράβδου παράλληλα προς εαυτή.

Από το είδος της κρούσης συνάγεται η έκφραση

$$\Omega = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} = -\Omega\,\mathbf{j} \qquad (10.310)$$

Από την εξίσωση (10.309) υπολογίζουμε

$$\boxed{\Omega = \frac{4 J_S \omega}{\ell}},$$

$J_S = \frac{m\ell^2}{12}$

η οποία με βάση την εφαρμογή 4.1 γράφεται

$$\boxed{\Omega = \frac{m\omega\ell}{3}} \qquad (10.311)$$

$W_x = \frac{\Omega_x}{m} + \upsilon_{0x}$ (1) $\Rightarrow W_x = \upsilon_0 \cos\phi$

$W_y = \frac{\Omega_y}{m} + \upsilon_{0y}$ (2) $\Rightarrow \boxed{W_y = -\frac{\Omega}{m} + \upsilon_0 \sin\phi}$ (3)

(3) $\boxed{W_y = -\frac{\Omega}{m} + \upsilon_0 \sin\phi}$

Από την (10.308) παίρνουμε

$$\vec{w} = -\frac{\Omega}{m} j + \upsilon_0 \qquad (10.312)$$

Είναι τώρα σαφές ότι η ταχύτητα του στηρίγματος Η είναι μηδενική, δηλαδή (4)

$$\upsilon_H = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\upsilon_H = 0 = w + \omega \times SH = w + \omega \frac{\ell}{4} k \times (-i) = w - \frac{\omega\ell}{4} j$$

$\upsilon_H = 0 \Rightarrow$

$W_y + \omega\left(\frac{\ell}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$W_y = \frac{\omega\ell}{4}$ (4)

ή

$$0 = j \cdot w - \frac{\omega\ell}{4} \rightarrow j \cdot w = \frac{\omega\ell}{4} . \qquad (10.313)$$

Εισάγοντας την (10.312) στην (10.313) ευρίσκουμε

(3),(4) $\Rightarrow \frac{\omega\ell}{4} = -\frac{\Omega}{m} + \upsilon_0 \sin\phi$

$$j \cdot (-\frac{\Omega}{m} j + \upsilon_0) = \frac{\omega\ell}{4}$$

ή

$$-\frac{\Omega}{m} + j \cdot (\upsilon_0 \cos\phi\, i + \upsilon_0 \sin\phi\, j) = \frac{\omega\ell}{4}$$

$\frac{\omega\ell}{4} = -\frac{m\omega\ell}{3m} + \upsilon_0 \sin\phi$

$\frac{\omega\ell}{4} + \frac{\omega\ell}{3} = \upsilon_0 \sin\phi$

ή ακόμη

$\Omega = \frac{m\omega\ell}{3}$

$$\upsilon_0 \sin\phi - \frac{\Omega}{m} = \frac{\omega\ell}{4} ,$$

$\frac{7\omega\ell}{12} = \upsilon_0 \sin\phi$

$\omega = \frac{12}{7} \frac{\upsilon_0 \sin\phi}{\ell}$

από την οποία, μέσω και της (10.311), υπολογίζουμε

$$\omega = \frac{12\upsilon_0 \sin\phi}{7\ell} . \qquad (10.314)$$

$\omega = ;$

$\ell = ;$

Τέλος, από την (10.312) ευρίσκουμε

$$w = -\frac{\Omega}{m} j + \upsilon_0 = -\frac{\omega\ell}{3} j + \upsilon_0 \cos\phi\, i + \upsilon_0 \sin\phi\, j =$$

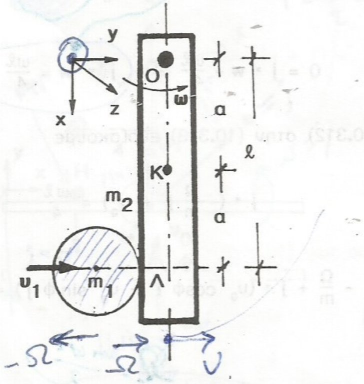
$$= (\upsilon_0 \sin\phi - \frac{\omega\ell}{3}) j + \upsilon_0 \cos\phi\, i = \upsilon_0 \cos\phi\, i + \left(\upsilon_0 \sin\phi - \frac{\omega\ell}{3}\right) j$$

$$= \upsilon_0 \cos\phi\, i + \frac{3}{7} \upsilon_0 \sin\phi\, j . \qquad (10.315)$$

Εφαρμογή 6.4: Υλικό σημείο μάζης m_1 και ταχύτητος $\mathbf{u_1}$ κρούει στερεό σώμα μάζης m_2 που μπορεί να περιστραφεί περί σταθερό άξονα O. Τα σώματα κατά την στιγμή της κρούσης ευρίσκονται σε ηρεμία. Η διεύθυνση της κρούσης συναντά τον άξονα συμμετρίας του σώματος με αποτέλεσμα η αντίδραση κρούσης στό O να είναι μία οριζόντια δύναμη (Σχ. 10.61). Ζητούνται:

α) Η κοινή ταχύτητα $\mathbf{u}$ στο τέλος της σύνθλιψης, και

β) Οι ταχύτητες $\mathbf{w_1}$ και $\mathbf{w_2}$ μετά την ανάπαλση, καθώς και η παρόρμηση αντίδρασης Ω_0 στην στήριξη κατά την διάρκεια της όλης κρούσης.



Σχήμα 10.61: Έκκεντρη ανελαστική κρούση σφαίρας και ράβδου.

Λύση: Το στερεό σώμα μάζης m_2, εκτός της παρόρμησης $\mathbf{\Omega}$ του κρούοντος υλικού σημείου μάζης m_1, υπόκειται και στην παρόρμηση της αντίδρασης $\mathbf{\Omega_0}$ στο O. Αν J_0 είναι η ροπή αδρανείας του σώματος m_2 ως προς O και i_0 η ακτίνα αδρανείας τότε, βάσει του θεωρήματος μεταβολής της συστροφής ως προς άξονα παράλληλο προς τον z και διερχόμενο από το O καθώς επίσης και της εξίσωσης (4.60), έχουμε

$$J_0 \omega \, \mathbf{k} = \mathbf{\Lambda O} \times \mathbf{\Omega} = \ell \Omega \, (-\mathbf{i}) \times (-\mathbf{j}) = \ell \Omega \, \mathbf{k}$$

ή

$$\omega = \frac{\ell \Omega}{J_0} = \frac{\ell \Omega}{m_2 \, i_0^2} \,, \qquad (10.316)$$

Αν για σώμα μάζας M η ροπή αδρανείας του ως προς άξονα δίνεται από την σχέση $I = Mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{M}}$, ράβδο $k = \frac{L}{2\sqrt{3}}$

$i_0 = \sqrt{\frac{J}{A = \text{επιφ}}}$

όπου i_0 είναι ακτίνα αδρανείας ως προς Ο.

Είναι τώρα σαφές ότι κατά το τέλος του σταδίου της σύνθλιψης η κοινή ταχύτητα $\mathbf{υ}$ των δύο σωμάτων προκύπτει από την σχέση

$$\mathbf{υ} = υ\,\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OΛ} = \omega\ell\,\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \omega\ell\,\mathbf{j}\,,$$

η οποία, με βάση την (10.316) δίδει το μέτρο υ

$$υ = \omega\ell = \frac{\Omega\ell^2}{m_2 i_0^2} \tag{10.317}$$

εκ της οποίας

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{j}\,,\quad \Omega = \frac{m_2 i_0^2}{\ell^2}\,υ = \mu_2 υ\,,\quad \mu_2 = \frac{m_2 i_0^2}{\ell^2}\,. \tag{10.318}$$

Από την άλλη μεριά, βάσει της αρχής διατηρήσεως της ορμής και λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι η ταχύτητα $\mathbf{υ}_2$ του σώματος μάζης m_2 είναι πριν την κρούση μηδενική, η διανυσματική έκφραση των εξισώσεων (6.16), 6.17) είναι:

$$m_1(υ\mathbf{j} - υ_1\mathbf{j}) = -\Omega\mathbf{j}\,,\quad m_1(\mathbf{w}_1 - υ\mathbf{j}) = -\kappa\Omega\mathbf{j}$$

(10.319)

$$m_2 υ\mathbf{j} = \Omega\mathbf{j}\,,\quad m_2(\mathbf{w}_2 - υ\mathbf{j}) = \kappa\Omega\mathbf{j}\,,$$

στις οποίες $\mathbf{w}_1$ και $\mathbf{w}_2$ παριστάνουν τις τελικές ταχύτητες των μαζών m_1 και m_2 και κ ο συντελεστής κρούσης. Σημειώνουμε εδώ ότι στο σχήμα 10.61 το διάνυσμα της παρόρμησης $\boldsymbol{\Omega}$ έχει παρασταθεί ως αντίδραση της μάζας m_2 στην μάζα m_1, επειδή με βάση το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγή το $\boldsymbol{\Omega}$ γράφεται

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{j}\,,$$

δικαιολογείται η αλλαγή προσήμου των δευτέρων μελών των (10.319) σε σύγκριση με τις (6.16) και (6.17). ΄Ετσι, οι (10.319) γράφονται και υπό αναλυτική μορφή ως εξής:

$$m_1(υ - υ_1) = -\Omega\,,\quad m_1(w_1 - υ) = -\kappa\Omega\,,$$

(10.320)

$$m_2 υ = \Omega\,,\quad m_2(w_2 - υ) = \kappa\Omega\,.$$

$m_2(υ - υ_2) = \Omega$

0

Λαμβανομένου δε υπ΄ όψη ότι με βάση τις (10.318) είναι

$$\Omega = \mu_2 \upsilon ,$$

οι (10.320) γράφονται τελικά

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon - \upsilon_1) = -\Omega , \quad m_1(w_1 - \upsilon) = -\kappa\Omega , \\ \mu_2 \upsilon = \Omega , \quad \mu_2(w_2 - \upsilon) = \kappa\Omega \end{aligned}\right\} \qquad (10.321)$$

δεδομένου ότι

$$\mu_2 = m_2 .$$

Από τις (10.321) υπολογίζουμε

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \qquad \Omega = \frac{\mu_2 m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \qquad (10.322)$$

$$w_1 = \frac{(m_1 - \kappa\mu_2)\upsilon_1}{\mu_2 + m_1} , \qquad w_2 = \frac{(1+\kappa) m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} = (1+\kappa)\upsilon .$$

Οι ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon}_K$, $\mathbf{w}_K$ του κέντρου μάζης του σώματος m_2 κατά το τέλος της σύνθλιψης και ανάπαλσης προκύπτουν από την παρατήρηση ότι το σημείο στήριξης O είναι κέντρο μηδενικής ταχύτητος, δηλαδή

$$\boldsymbol{\upsilon}_K = \upsilon_K \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OK} = \omega a\, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \omega a\, \mathbf{j} = \frac{\upsilon a}{\ell}\, \mathbf{j} = \frac{m_1 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}\, \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{w}_K = w_K \mathbf{j} = \frac{(1+\kappa)\upsilon a}{\ell}\, \mathbf{j} = \frac{(1+\kappa) m_1 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}\, \mathbf{j} , \qquad (10.323)$$

όπου κατά το στάδιο του τέλους της ανάπαλσης με βάση την πρώτη και τέταρτη των (10.322) τέθηκε αντί υ η (1 + κ)υ.

Αν Ω_0' είναι η παρόρμηση της αντίδρασης κατά την σύνθλιψη, ισχύει με βάση την τρίτη των (10.320)

$$\Omega + \Omega_0' = m_2 \boldsymbol{\upsilon}_K ,$$

οπότε, μέσω των (10.322) και (10.323), η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\frac{\mu_2 m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1} + \Omega_0' = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1 a}{(\mu_2 + m_1)\ell}$$

ή

$$\Omega_0' = \frac{m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1}\left[\frac{m_2 a}{\ell} - \mu_2\right]. \qquad (10.324)$$

Από την άλλη μεριά, η παρόρμηση Ω_0 κατά την διάρκεια της όλης κρούσης προκύπτει

$$\Omega_0 = (1+\kappa)\Omega_0' = \frac{(1+\kappa) m_1 \upsilon_1}{\mu_2 + m_1}\left[\frac{m_2 a}{\ell} - \mu_2\right]. \qquad (10.325)$$

Η ισότητα

$$\Omega_0 = \Omega_0'$$

ισχύει προφανώς εφ΄ όσον

$$\mu_2 = \frac{m_2 a}{\ell} = \frac{m_2 i_0^2}{\ell},$$

δηλαδή εφ΄ όσον

$$i_0^2 = a\ell$$

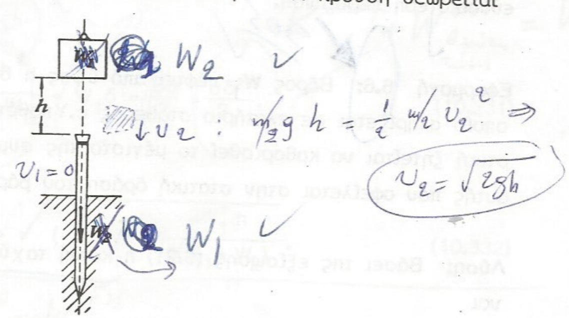
ή ακόμη

$$i_K^2 = i_0^2 - a^2 = a\,a',$$

που σημαίνει ότι ο άξονας Ο διέρχεται από το κέντρο κρούσης Λ.

Ιούνιος 2008

Εφαρμογή 6.5: Ξύλινος πάσσαλος βάρους $\mathbf{W_1}$ λόγω κτυπήματος από σφύρα βάρους $\mathbf{W_2}$, που πέφτει από ύψος h, διεισδύει κατά μήκος β εντός του εδάφους (Σχ. 10.62). Ζητείται η αντίδραση κατά την διείσδυση. Η κρούση θεωρείται τελείως πλαστική.



Σχήμα 10.62: Διείσδυση πασσάλου διά κρούσης.

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon = \frac{m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2gh}$$

Λύση: Με βάση την εξίσωση (6.21) η κοινή ταχύτητα υ μετά την σύνθλιψη είναι

$$\upsilon = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$

$$\upsilon = \frac{W_2 \upsilon_2}{W_1 + W_2} = \frac{W_2 \sqrt{2gh}}{W_1 + W_2} \qquad (10.326)$$

Γιά κρούση απόλυτα πλαστική η κινητική ενέργεια K σφύρας και πασσάλου καθώς και το έργο της βαρύτητος $(W_1 + W_2)\delta$ αναλίσκονται στο έργο αντίδρασης $B\beta$, δηλαδή

ΘΜΚΕ

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K - 0 = (W_1+W_2)\delta + N \cdot b \Rightarrow K \simeq N \cdot b \Rightarrow \frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon^2 \simeq N \cdot b$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 \simeq N \cdot b$$

$$K + (W_1 + W_2)\delta = B\beta \,. \qquad (10.327)$$

γιατί $W_1 + W_2 << N$

Επειδή ισχύει

$$W_1 + W_2 << B,$$

προκύπτει

$$K \simeq B\beta \Rightarrow \frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon^2 = N \cdot b$$

$$\frac{1}{2}\frac{(W_1+W_2)}{g}\frac{W_2^2}{(W_1+W_2)^2}2gh \simeq N \cdot b$$

και συνεπώς παίρνουμε

$$\frac{(W_1 + W_2)W_2^2\, 2gh}{2g\,(W_1 + W_2)^2} \simeq B\beta \rightarrow B = \frac{hW_2^2}{(W_1 + W_2)\beta} \,. \qquad (10.328)$$

Από την τελευταία εξίσωση εξάγεται

$$\frac{B\beta}{W_2 h} = \frac{W_2}{(W_1 + W_2)} = \frac{\text{παρεχόμενο ωφέλιμο έργο}}{\text{αναλισκόμενη ενέργεια}} \,.$$

Ο λόγος αυτός τείνει προς την μονάδα όταν $W_2 >> W_1$, οπότε έχουμε την ευνοϊκότερη περίπτωση.

ΣΟΣ

Εφαρμογή 6.6: Βάρος W_1 πέφτει από ύψος h σε ένα σώμα βάρους W_2, το οποίο στηρίζεται σε ελατήριο σταθεράς c. Υποθέτοντας ότι η κρούση είναι πλαστική ζητείται να καθορισθεί το μέγιστο της συμπίεσης δ του ελατηρίου πέραν αυτής που οφείλεται στην στατική δράση του βάρους W_2.

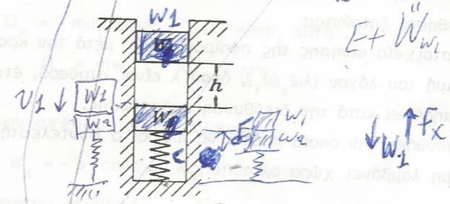
Λύση: Βάσει της εξίσωσης (6.21) η κοινή ταχύτητα υ μετά την σύνθλιψη είναι

$mgh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow$

$v_1 = \sqrt{2gh}$

$U = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_a} \Rightarrow$

$$u = \frac{W_1 \sqrt{2\,gh}}{W_1 + W_2} \tag{10.329}$$



$E + W_{W_1}^{W_1 \delta} = W_{Fx}^{\frac{1}{2} c \delta^2}$

Σχήμα 10.63: Πτώση βάρους επί σώματος στηριζομένου σε ελατήριο.

Δεδομένου ότι ζητείται το μέγιστο της συμπίεσης δ του ελατηρίου πέραν της οφειλομένης στην στατική δράση του βάρους W_2, ως έργο βαρύτητος λαμβάνεται η ποσότητα $W_1\delta$ αντί της $(W_1 + W_2)\delta$. Συνεπώς, η συνολική κινητική ενέργεια L_1 των δύο σωμάτων γιά την πλαστική κρούση μαζί με το έργο βαρύτητος αναλίσκονται στο έργο της αντίστασης του ελατηρίου $B\delta/2$. Γράφοντας την αντίσταση B ως

$$B = c\delta ,$$

παίρνουμε

$E = \frac{1}{2} m_{o1} U^2$

$$K = \frac{(W_1 + W_2)W_1^2\, 2\,gh}{2g\,(W_1 + W_2)^2} = \frac{W_1^2\, h}{W_1 + W_2} , \tag{10.330}$$

και

$K = \frac{1}{2} \frac{(W_1 + W_2)}{g} \left(\frac{W_1\sqrt{2gh}}{W_1 + W_2}\right)^2$

$K^{\text{συστ}} + W^{W_1}_{\text{βαρύτ. του } W_1} = W_{F_{ελ}}$

$$\frac{W_1^2\, h}{W_1 + W_2} + W_1\delta = \frac{B\delta}{2} = \frac{c\delta^2}{2} , \tag{10.331}$$

από την οποία υπολογίζουμε

F, x

$W = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} F X X = \frac{1}{2} k x^2$

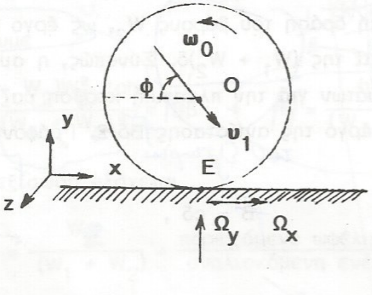
$$\delta = \frac{W_1}{c} + \sqrt{\left(\frac{W_1}{c}\right)^2 + \frac{2W_1^2\, h}{c(W_1 + W_2)}} . \tag{10.332}$$

$K^{\text{συστ}} + W^{\text{βαρ}} = W^{F_{ελ}}$

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) U^2 + \underbrace{W_1 \delta}_{\text{μόνο το } W_1 \delta \text{ αντί για } (W_1+W_2)\delta} = \frac{1}{2} k \delta^2 \longrightarrow \delta = \dots$

Εφαρμογή 6.7: Σφαίρα μάζης m και ακτίνος R περιστρέφεται περί οριζόντιο διάμετρό της με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_0$, ενώ το κέντρο βάρους της έχει μεταφορική ταχύτητα της οποίας το διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}_1$ σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντιο. Η σφαίρα προσκρούει επί οριζοντίου επιπέδου που παρουσιάζει συντελεστή κρούσης κ (Σχ. 10.64). Υπό την προϋπόθεση ότι η κρούση γίνεται χωρίς ολίσθηση, ζητούνται:

1) Τα στοιχεία κίνησης της σφαίρας ευθύς μετά την κρούση.
2) Η τιμή του λόγου $(\lambda\omega_0/\upsilon_1)$, όπου λ είναι σταθερά, έτσι ώστε η σφαίρα να αναπηδήσει κατά την διεύθυνση πρόσπτωσης.
3) Η συνθήκη την οποία πρέπει να πληροί ο συντελεστής τριβής μ έτσι ώστε να μη λαμβάνει χώρα ολίσθησης.



Σχήμα 10.64: Πρόσπτωση σφαίρας επί οριζοντίου επιπέδου.

Λύση: Θεωρούμε το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz του σχήματος 10.64. Το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά το στάδιο της συμπίεσης και ανάπαλσης όσον αφορά την σφαίρα, με βάση το σχήμα 10.64 και τις σχέσεις (6.16) και (6.17), δίνει αντίστοιχα τις διανυσματικές εξισώσεις:

$$\Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} = m(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_1)\ , \tag{10.333}$$

$$\Omega_x \mathbf{i} + \kappa\Omega_y \mathbf{j} = m(\mathbf{w}_1 - \boldsymbol{\upsilon})\ , \tag{10.334}$$

όπου υ παριστάνει την κοινή ταχύτητα σφαίρας και επιπέδου κατά το τέλος της συμπίεσης, w_1 είναι η ταχύτητα της σφαίρας μετά το πέρας της ανάπαλσης και κ είναι ο συντελεστής κρούσης. Λαμβανομένου υπ΄ όψη ότι $\upsilon = 0$, οι (10.333) και (10.334) ισοδυναμούν με το παρακάτω σύστημα αναλυτικών εξισώσεων

$$\Omega_x = -m\upsilon_1 \cos\phi , \quad \Omega_y = m\upsilon_1 \sin\phi ,$$
$$\Omega_x = mw_x , \quad \kappa\Omega_y = mw_y . \tag{10.335}$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων αυτών παίρνουμε

$$w_x = -\upsilon_1 \cos\phi , \quad w_y = \kappa\upsilon_1 \sin\phi, \tag{10.336}$$

ενώ από όλες τις παραπάνω εξισώσεις συνάγουμε ότι η συνολική παρόρμηση $\mathbf{\Omega}' = \Omega'_x \mathbf{i} + \Omega'_y \mathbf{j}$ καθ΄ όλο το φαινόμενο της κρούσης προκύπτει

$$\mathbf{\Omega}' = \Omega'_x \mathbf{i} + \Omega'_y \mathbf{j} = (\Omega_x + \Omega_x)\mathbf{i} + \Omega_y(1+\kappa)\mathbf{j} =$$
$$= m(w_x - \upsilon_1 \cos\phi)\mathbf{i} + m(w_y + \upsilon_1 \sin\phi)\mathbf{j} . \tag{10.337}$$

Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μεταβολής της συστροφής ως προς το κέντρο Ο καθ΄ όλο το φαινόμενο της κρούσης γράφεται:

$$\mathbf{G}^{\tau} - \mathbf{G}^{\alpha} = \mathbf{OB} \times \mathbf{\Omega}'_x , \tag{10.338}$$

όπου $\mathbf{G}^{\tau}$, $\mathbf{G}^{\alpha}$ παριστάνουν την τελική και αρχική συστροφή της σφαίρας, ενώ η διανυσματική συνιστώσα Ω'_y διερχόμενη από το Ο δίδει ροπή ως προς αυτό ίση προς μηδέν. Η (10.338) γράφεται

$$J_0\, \omega\, \mathbf{k} - J_0 \omega_0\, \mathbf{k} = -R\Omega'_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) = R\Omega'_x\, \mathbf{k}$$

εκ της οποίας

$$R\Omega'_x = J_0\,(\omega - \omega_0) = \frac{2\,mR^2}{5}(\omega - \omega_0), \tag{10.339}$$

όπου ω παριστάνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητος της μάζας μετά την κρούση. Η συνθήκη της μη ολίσθησης είναι

$$\upsilon_B = 0 , \quad \text{ή} \quad \mathbf{w}_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OB}) = 0 ,$$

ή ακόμη

$$w_1 - \omega R(k \times j) = 0 \quad \rightarrow \quad w_1 + \omega R\, i = 0 \, .$$

από την οποία παίρνουμε

$$w_x = - R\omega \, . \tag{10.340}$$

Εκ των (10.335) και (10.340) υπολογίζουμε

$$\omega = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{\upsilon_1}{R}\cos\phi \, ,$$

(10.341)

$$\omega_x = \frac{5}{7}\upsilon_1 \cos\phi - \frac{2}{7}\omega_0 R \tag{10.341}$$

και

$$\Omega'_x = - \frac{2}{7} m(\upsilon_1 \cos\phi + R\omega) \, . \tag{10.342}$$

Γιά να αναπηδά τώρα η σφαίρα κατά την γωνία πρόσπτωσης πρέπει

$$\frac{W_x}{W_y} = - \cot\phi$$

ή

$$\frac{5\upsilon_1 \cos\phi - 2R\omega_0}{7\kappa\upsilon_1 \sin\phi} = - \cot\phi$$

από την οποία

$$\frac{\lambda\omega_0}{\upsilon_1} = \frac{1}{2}(5 + 7\kappa)\cos\phi \, . \tag{10.343}$$

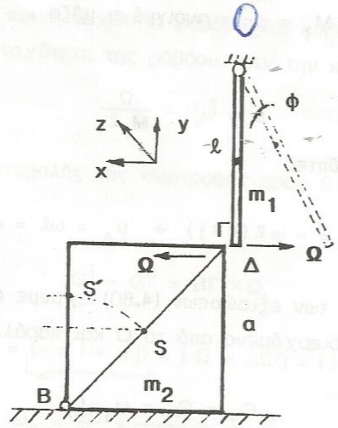
Τέλος, γιά να μη γίνεται ολίσθηση πρέπει

$$\mu > \frac{|T|}{|N|}$$

όπου $|T|$ και $|N|$ παριστάνει το μέτρο της τριβής και το μέτρο της κάθετης αντίδρασης. Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$\mu > \frac{\int |T| dt}{\int |N| dt} = \frac{|\Omega_x|}{|\Omega_y|} = \frac{2}{7(1+\kappa)}\left(\cot\phi + \frac{R\omega}{\upsilon_1 \sin\phi}\right) \, . \tag{10.344}$$

Εφαρμογή 6.8: Ομοιόμορφη πρισματική ράβδος μήκους ℓ και μάζης m_1 συναρτάται διά του ενός άκρου της από οριζόντιο άξονα, εφάπτεται δε κύβου σε κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο σχήμα 10.65. Ο κύβος μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο ακμή του. Ζητείται η μέγιστη απόκλιση της ράβδου από την κατακόρυφο ώστε αυτή προσκρουόμενη επί του κύβου να τον ανατρέπει. Η μάζα του κύβου είναι m_2, ενώ ο συντελεστής κρούσης $\kappa = 0.5$.



Σχήμα 10.65: Σύστημα ράβδου και κύβου.

Λύση: Έστω Ω η παρόρμηση στο τέλος της συμπίεσης όπως φαίνεται στο σχήμα 10.65. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων Oxyz και εξετάζουμε τα δύο σώματα χωριστά.

Ράβδος ΟΔ: Αν φ είναι η ζητούμενη γωνία απόκλισης, το θεώρημα μεταβολής της συστροφής προς Ο δίδει

$\Delta G = r \times \vec{\Omega} \Rightarrow$

$$G^{\tau} - G^{\alpha} = O\Delta \times \Omega\ , \qquad (10.345)$$

όπου G^{τ}, G^{α} παριστάνουν την τελική και αρχική συστροφή του σώματος. Η (10.345) γράφεται

$$J_0\,\omega\,\mathbf{k} - J_0\omega_0\,\mathbf{k} = (-\ell)\ (-\Omega)\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}$$

ή

$$J_0(\omega - \omega_0)\mathbf{k} = \ell\Omega\mathbf{k}$$

$(\omega-\omega_0)J_0 = \ell\Omega$

$\omega-\omega_0 = \frac{\ell\Omega}{J_0}$

από την οποία προκύπτει

$$\omega = \omega_0 - \frac{\ell\Omega}{J_0} = \omega_0 - \frac{\Omega}{\frac{1}{3}m_1\ell}\ , \qquad (10.346)$$

$J_0 = \frac{1}{3}m_1\ell^2$

στην οποία ω παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση, ενώ ω_0 το αντίστοιχο μέγεθος πριν την κρούση. Αν θέσουμε

$$M_1 = \frac{m_1}{3} = \text{ανοιγμένη μάζα}\ ,$$

τότε

$$\omega = \omega_0 - \frac{\Omega}{M_1\ell}$$

και η ταχύτητα $\mathbf{u}_\Delta$ προκύπτει

$$\mathbf{u}_\Delta = -u_\Delta\mathbf{i} = -\omega\ell(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) \rightarrow u_\Delta = \omega\ell = \omega_0\ell - \frac{\Omega}{M_1}\ . \qquad (10.347)$$

Από την τρίτη τώρα των εξισώσεων (4.60) έχουμε ότι η συστροφή της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το Ο και παράλληλο προς τον z είναι

$$G_z = G_3 = \omega_0 J_0$$

και η κινητική ενέργεια, μέσου του τύπου (4.57), προκύπτει

$$L = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2\ .$$

Έτσι έχουμε την έκφραση

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = L = \frac{m_1 g\ell}{2}(1-\cos\phi)\ ,$$

η οποία, αν

$$J_0 = \frac{1}{3}m_1\ell\ ,$$

παρέχει

$$\ell\omega_0 = \sqrt{3g\ell(1-\cos\phi)}\ . \qquad (10.348)$$

Τέλος, το θεώρημα μεταβολής της ορμής γιά την ράβδο διατυπώνεται ως

$$\mathbf{\Omega} = M_1(\mathbf{\upsilon} - \mathbf{\upsilon}_1)$$

ή

$$-\Omega\,\mathbf{i} = M_1(\upsilon - \upsilon_1\,\mathbf{i}) = M_1(\upsilon - \upsilon_1)\mathbf{i}\ ,$$

δηλαδή

$$\Omega = M_1(\upsilon_1 - \upsilon)\ , \qquad (10.349)$$

όπου $\boldsymbol{\upsilon}$ παριστάνει την κοινή ταχύτητα ράβδου και κύβου κατά το τέλος της σύνθλιψης και $\boldsymbol{\upsilon}_1$ την ταχύτητα της ράβδου πριν την κρούση, δηλαδή

$$\upsilon_1 = \omega_0 \ell$$

Κύβος: Το θεώρημα μεταβολής της συστροφής προς B παρέχει κατ' αναλογία του τύπου (10.345)

$$\mathbf{G}^{\tau} - \mathbf{G}^{\alpha} = \mathbf{B\Gamma} \times \mathbf{\Omega} \qquad (10.350)$$

ή

$$J_B \cdot \omega_2 \mathbf{k} = \underbrace{(-\alpha\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j})} \times \mathbf{i}\,\Omega = \alpha\Omega(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \alpha\Omega\,\mathbf{k}$$

ή

$$\omega_2 = \frac{\alpha\Omega}{J_B} = \frac{\alpha\Omega}{2\frac{\alpha^2}{3}m_2} = \frac{\Omega}{\alpha M_2}\ , \qquad (10.351)$$

όπου

$$M_2 = \frac{2}{3}m_2 = \text{ανοιγμένη μάζα}\ .$$

Στους παραπάνω τύπους $\boldsymbol{\omega}_2$ παριστάνει το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητος ως προς άξονα διερχόμενο από το B μετά την κρούση και J_B την ροπή αδρανείας του κύβου ως προς τον άξονα αυτού, ο οποίος είναι παράλληλος προς τον z. Σημειώνουμε εδώ ότι η αρχική συστροφή $\mathbf{G}^{\alpha}$ του κύβου προς τον άξονα διά του B είναι ίση προς μηδέν. Δεδομένου τώρα ότι το B είναι κέντρο μηδενικής ταχύτητος, η ταχύτητα του σημείου Γ προκύπτει

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\Gamma} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B\Gamma} = \boldsymbol{\omega}_2 \times (-\alpha\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}) = \frac{\Omega}{\alpha M_2}\mathbf{k} \times (-\alpha\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}) =$$

$$= \frac{\Omega}{M_2}\,\mathbf{i} + \frac{\Omega}{M_2}\,\mathbf{j}\ . \qquad (10.352)$$

Στο σημείο όμως Γ πρέπει

$$\upsilon_{\Gamma x} = \upsilon_{\Delta x}$$

ή με βάση τις (10.347) και (10.352)

$$\omega_0 \ell - \frac{\Omega}{M_1} = \frac{\Omega}{M_2} . \tag{10.353}$$

Το θεώρημα διατήρησης της ορμής γιά τον κύβο παρέχει

$$M_2(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_2) = \boldsymbol{\Omega} , \quad M_2(\mathbf{w}_2 - \boldsymbol{\upsilon}) = \kappa\boldsymbol{\Omega} , \tag{10.354}$$

όπου $\boldsymbol{\upsilon}_2$ είναι το διάνυσμα ταχύτητος του κύβου πριν την κρούση ίση προς το μηδέν και $\mathbf{w}_2$ είναι το διάνυσμα ταχύτητος αυτού μετά το πέρας της ανάπαλσης. Ετσι, οι (10.354) γράφεται

$$M_2 \upsilon\, \mathbf{i} = \Omega\, \mathbf{i} \quad \rightarrow \quad M_2 \upsilon = \Omega , \tag{10.355}$$

$$M_2(\mathbf{w}_2 - \upsilon \mathbf{i}) = \kappa\Omega\, \mathbf{i} \quad \rightarrow \quad M_2(w_{2x} - \upsilon) = \kappa\Omega . \tag{10.356}$$

Συνεπώς, υπολογίζουμε

$$\upsilon = \frac{w_{2x}}{\kappa+1} , \quad \Omega = \frac{M_2 w_{2x}}{\kappa+1}$$

οπότε εκ της (10.353) παίρνουμε

$$\Omega \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} = \omega_0 \ell = \upsilon_1$$

ή

$$w_{2x} = (1 + \kappa) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \upsilon_1$$

ή, τέλος

$$w_{2x} = (1 + \kappa) \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \upsilon_1 . \tag{10.357}$$

Η κινητική ενέργεια του κύβου μετά την κρούση είναι

$$L_K = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \frac{w_2^2}{(\Gamma B)^2} = \frac{1}{2} J_\Delta \frac{w_2^2}{(\alpha\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha^2}{3} m_2 \frac{w_{2x}^2 + w_{2y}^2}{(\alpha\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\alpha^2}{3} m_2 \frac{2 w_{2x}^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{3} m_2 w_{2x}^2$$

που με βάση την (10.357) δίδει

$$L_K = \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \upsilon_1^2 \,. \qquad (10.358)$$

Από την άλλη μεριά, το απαιτούμενο έργο γιά την ανατροπή του κύβου υπολογίζεται ως

$$W = m_2 g \left(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = m_2 g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \,. \qquad (10.359)$$

Πρέπει επομένως να ισχύει

$$W \leq L_K$$

ή

$$m_2 g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \upsilon^2 ,$$

η οποία βάσει της (10.359) και της

$$\upsilon_1 = \omega_0 \ell$$

παρέχει

$$g \alpha \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \right)^2 (1 + \kappa)^2 \left[3g\ell \, (1 - \cos\phi) \right]$$

εκ της οποίας υπολογίζουμε

$$\cos\phi \leq 1 - \frac{2}{9} (\sqrt{2} - 1) \frac{\alpha}{\ell} \left(1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \,. \qquad (10.360)$$