ΔΥΝΑΜΙΚΗ – ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

17/02/2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΒΔΟΜΑΔΑ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ -- ΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ
1	➢ **Κινηματική του Υλικού Σημείου**. Μέθοδοι καθορισμού της κίνησης υλικού σημείου, καμπυλόγραμμη κίνηση, ταχύτητα, επιτάχυνση, επίπεδη κίνηση
2	➢ Αρμονική ταλάντωση. Απλό εκκρεμές. Επίπεδη κίνηση υλικού σημείου.
3	➢ **Κινηματική του στερεού σώματος**. Μεταφορική και περιστροφική κίνηση στερεού σώματος ως προς σταθερό άξονα περιστροφής, σύνθεση περιστροφών
4	➢ Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος ως προς σημείο. Δυναμικές εξισώσεις Euler. Επίπεδη κίνηση στερεού σώματος. Κινηματικοί περιορισμοί. Θεώρημα των προβολών των ταχυτήτων. Απόλυτη και σχετική κίνηση. Θεώρημα Coriolis
5	➢ **Δυναμική του υλικού σημείου**. θεώρημα της κινητικής ενέργειας, στροφορμή υλικού σημείου, το θεώρημα της συστροφής, κέντρο μάζας, έργο, στατική ροπή και γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση
6	➢ Συντηρητικά συστήματα, διατήρηση της ενέργειας. Αρχή D Alembert. Μεταβατική και σχετική κίνηση. Δυναμικές εξισώσεις Euler.
7	➢ **Δυναμική στερεού σώματος**. Ώθηση. Κέντρο μάζας, ροπές αδράνειας. Θεώρημα παραλλήλων αξόνων, ελλειψοειδές αδρανείας, κινητική ενέργεια.
8	➢ **Αρχή των δυνατών έργων**. Δυνατές μετατοπίσεις, βαθμοί ελευθερίας κίνησης. Αμφιμερείς και μονομερείς σύνδεσμοι. Γενική εξίσωση της δυναμικής.
9	➢ **Κρούση**. Γενικά θεωρήματα της θεωρίας κρούσης. Είδη κρούσης, συντελεστής κρούσης. Κεντρική κρούση. Ανελαστική κρούση. Λεία και έκκεντρη κρούση
10	➢ **Εισαγωγή στην Αναλυτική δυναμική**. Γενικευμένες συντεταγμένες. Εξισώσεις Lagrange.
11	➢ Αρχή της ελάχιστης δράσης. Θεωρία μεταβολών. Εξίσωση Hamilton.
12	➢ **Μικρές ταλαντώσεις**. Ελεύθερη και εξηναγκασμένη ταλάντωση. Συστήματα με δύο και η βαθμούς ελευθερίας. Εξισώσεις Lagrange.Ελεύθερες ταλαντώσεις συστημάτων με δύο και περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.
13	➢ **Ειδική Σχετικιστική Μηχανική**. Εισαγωγικές έννοιες. Το συναλλοίωτο των νόμων κίνησης. Εδική αρχή της σχετικότητας. Μετασχηματισμοί Lorentz. Χωρόχρονος Minkowski. Συστολή - Διαστολή χρόνου.

ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΗ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η διδασκαλία του μαθήματος θα βασιστεί στα βιβλία:

(1) "Θεωρητική Μηχανική", *Καραχάλιος Γεώργιος, Λουκόπουλος Βασίλειος (κωδικός βιβλίο στον Εύδοξο: 50659220)*

(2) "Τεχνική μηχανική ΙΙ - Δυναμική", *Παϊπέτης Στέφανος Α. (κωδικός βιβλίο στον Εύδοξο: 14746)*

ΠΡΟΣΘΕΤΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΣΥΓΓΡΑΜΑΤΑ

(1) "Θεωρητική Μηχανική (Κινηματική και Δυναμική του υλικού σημείου και του απολύτως στερεού σώματος)",
Δ. Ε. Παναγιωτουνάκος - Γ. Α. Παπαδόπουλος

(2) "Τεχνική Μηχανική (Τόμος Β', Κινηματική και Δυναμική του υλικού σημείου και του απολύτως στερεού σώματος)",
S. Timoshenko

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.1 Μέθοδοι Καθορισμού της Κίνησης Υλικού Σημείου

Η συνεχής καμπύλη που διαγράφει κατά την κίνησή του υλικό σημείο και η οποία αναφέρεται στο συγκεκριμένο σύστημα, καλείται τροχιά του σημείου. Αν η τροχιά είναι ευθεία γραμμή, η κίνηση καλείται **ευθύγραμμη**, και αν είναι καμπύλη, **καμπυλόγραμμη.** Ειδικότερα η τελευταία λέγεται **επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση** εφ΄ όσον η τροχιά είναι επίπεδη καμπύλη, και **καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο** εφ΄ όσον η τροχιά είναι καμπύλη στο χώρο.

Γιά το καθορισμό της κίνησης υλικού σημείου, δηλαδή γιά το καθορισμό της τροχιάς και των κινηματικών στοιχείων ταχύτητος και επιταχύνσεως,υπάρχουν οι εξής τρείς μέθοδοι

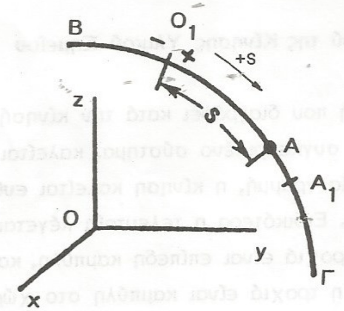
1.1.1 Φυσική μέθοδος

Η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη, όταν η τροχιά του σημείου είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου t. ΄Εστω ότι η καμπύλη ΒΓ στο χώρο είναι η τροχιά του κινητού σημείου Α ως προς το ακόλουθο σύστημα αναφοράς (σταθερό πλαίσιο αναφοράς) Oxyz (Σχ. 1.1). ΄Εστω ακόμη σημείο O_1 πάνω στην τροχιά που θεωρείται ως αρχή των διαστημάτων και του χρόνου. Η τροχιά θεωρείται ως άξονας συντεταγμένων των τόξων s με θετική φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.1. Η θέση του σημείου Α καθορίζεται με την συντεταγμένη s ως συνάρτηση του χρόνου t με βάση την εξίσωση

$$s = f(t). \tag{1.1}$$

Η εξίσωση (1.1) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του σημείου Α. ΄Ετσι, με τη μέθοδο αυτή, γιά το καθορισμό της κίνησης θεωρούνται γνωστά η τροχιά, με την αρχή O_1 και τη θετική φορά +s, και η εξίσωση κίνησης (1.1) πάνω στη τροχιά. Σημειώνουμε εδώ ότι, στη σχέση (1.1) s παριστάνει τη θέση του κινητού σημείου Α και μόνο, στη περίπτωση που το Α κινείται κατά την αυτή φορά παριστάνει δε συγχρόνως και το διάστημα O_1A_1 που διανύθηκε. Δηλαδή, αν στο σχήμα 1.1 το Α κινηθεί από το O_1 στο A_1 και στη συνέχεια από το A_1 στο Α, το συνολικό διανυθέν διάστημα είναι το

$$O_1A_1 + A_1A \neq s$$



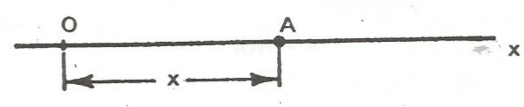
Σχήμα 1.1: Τροχιά υλικού σημείου στο χώρο.

Ειδικά γιά την ευθύγραμμη κίνηση, όταν ο άξονας x ληφθεί ως τροχιά (Σχ. 1.2), είναι

$$s = x,$$

και η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση

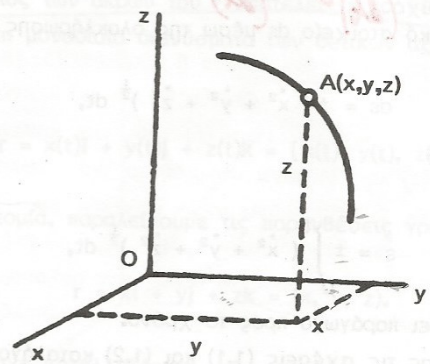
$$x = x(t). \tag{1.2}$$



Σχήμα 1.2: Ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου.

1.1.2 *Μέθοδος των συντεταγμένων*

Όταν η τροχιά του κινητού δεν είναι γνωστή, τότε χρησιμοποιείται συνήθως η μέθοδος των συντεταγμένων. Στο καρτεσιανό απόλυτο σύστημα συντεταγμένων Oxyz του σχήματος 1.3 η θέση του A καθορίζεται με τις συντεταγμένες του x,y,z, που είναι συναρτήσεις του χρόνου t, δηλαδή



Σχήμα 1.3: Παραμετρική παράσταση τροχιάς υλικού σημείου στο χώρο.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.3}$$

Εξ άλλου, στην επίπεδη κίνηση του σημείου, με σύστημα αναφοράς το Oxy πάνω στο επίπεδο, οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{1.4}$$

Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις (1.3) και (1.4) αποτελούν συγχρόνως τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του κινητού σημείου A στο χώρο και το επίπεδο αντίστοιχα. Με απαλειφή του t προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις της τροχιάς στη κίνηση στο χώρο και στην επίπεδο κίνηση υπό την μορφή

$$y = Y(x), \quad z = Z(x), \tag{1.5}$$

και

$$y = Y(x). \tag{1.6}$$

Από την άλλη μεριά, με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα που διατυπώνεται από τη σχέση

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

$(dt)^2$ $(dt)^2$

καθορίζεται το γραμμικό στοιχείο ds μέσω της ολοκλήρωσης της εξισώσεως

$$ds = \pm(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}\, dt,$$

δηλαδή

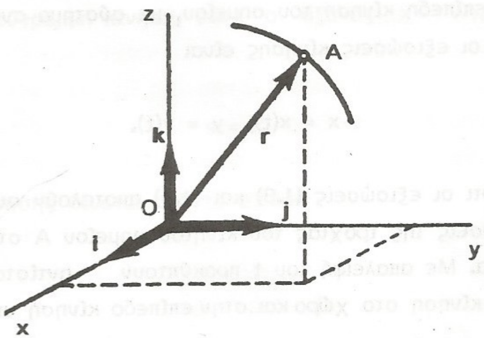
$$s = \pm\int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}\, dt, \qquad (1.7)$$

όπου τελεία παριστάνει παράγωγο προς το χρόνο.

Συνεπώς, συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.1) και (1.2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι γιά το καθορισμό της κίνησης υλικού σημείου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη φυσική μέθοδο, όταν η κίνηση καθορίζεται με τη μέθοδο των συντεταγμένων.

1.1.3 Διανυσματική μέθοδος

Η θέση του σημείου Α σε μιά χρονική στιγμή μπορεί να καθορισθεί με τη "διανυσματική ακτίνα" ή το "διάνυσμα θέσης" **r** = **OA** (Σχ. 1.4).



Σχήμα 1.4: Διανυσματική παράσταση τροχιάς υλικού σημείου στο χώρο.

Το διάνυσμα θέσης **r** μεταβάλλεται με το χρόνο, είναι δηλαδή διανυσματική συνάρτηση της παραμέτρου t της μορφής

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \qquad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.8) αποτελεί τη διανυσματική εξίσωση της κίνησης του σημείου Α, Ο γεωμετρικός τόπος των άκρων του **r** αποτελεί τη τροχιά του Α. Αν παραστήσουμε με **i**, **j**, **k** τα μοναδιαία διανύσματα των θετικών αξόνων x,y,z αντίστοιχα, θα έχουμε

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = [x(t),\ y(t),\ z(t)]. \qquad (1.9)$$

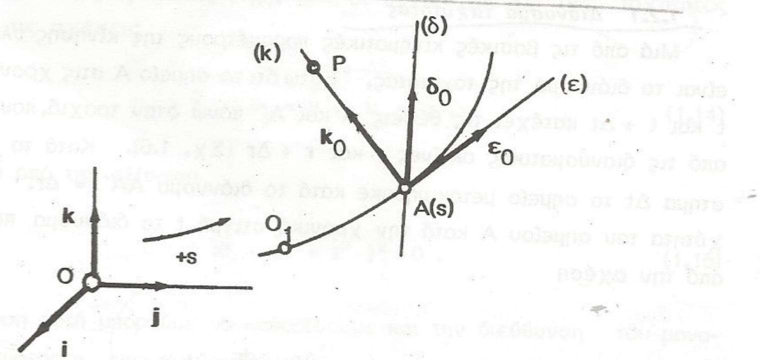
Συνήθως, γιά συντομία, παραλείπουμε τις παρενθέσεις γράφοντας

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x,\ y,\ z). \qquad (1.9a)$$

Η μέθοδος αυτή είναι καταλληλότερη γιά τη μελέτη της κίνησης του υλικού σημείου, γιατί στη περίπτωση αυτή η κίνηση καθορίζεται από μιά μόνο διανυσματική εξίσωση και όχι από τρείς αναλυτικές εξισώσεις όπως στη περίπτωση (1.1.2).

1.2 Καμπυλόγραμμη Κίνηση

Γιά τη μελέτη της καμπυλόγραμμης κίνησης γίνεται χρήση του γνωστού από τη διαφορική γεωμετρία τρίεδρου Frénet (τοπικού συστήματος συντεταγμένων), καθώς και των επίσης γνωστών διανυσματικών εξισώσεων Frénet.



Σχήμα 1.5: Τοπικό σύστημα συντεταγμένων ή τρίεδρο Frénet συνεχούς στο χώρο καμπύλης

Ας θεωρήσουμε μιά τυχούσα συνεχή στερεά καμπύλη αναφερόμενη σε απόλυτο καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ας είναι ακόμη επάνω στην καμπύλη O_1 η αρχή των τόξων και +s η θετική φορά σύμφωνα με την οποία τα τόξα θεωρούνται αυξανόμενα. Θεωρήσουμε τώρα το τυχόν σημείο A(s) της καμπύλης και τις τρείς αρχικές ευθείες σ΄ αυτό, δηλαδή την εφαπτομένη (ε), την πρώτη κάθετο (k) και την όρθια κάθετο ή δικάθετο (δ) (Σχ. 1.5). Όπως είναι γνωστό από την διαφορική γεωμετρία, οι ευθείες (ε) και (k) κείνται πάνω στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης, οι (k) και (δ) πάνω στο κάθετο επίπεδο της καμπύλης στο A, οι δε (ε) και (δ) πάνω στο κάθετο προς την πρώτη κάθετο επίπεδο. Οι θετικές φορές των παραπάνω τριών αρχικών ευθειών (ε), (k), (δ) και των αντίστοιχων μοναδιαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\mathbf{k}_0$, $\boldsymbol{\delta}_0$ καθορίζονται ως εξής:

α) Της εφαπτομένης ε και του ε_0 προς το μέρος των αυξανομένων τόξων,

β) Της πρώτης καθέτου k και του $\mathbf{k}_0$ προς το κέντρο καμπυλότητος P της καμπύλης, και

γ) Της δικαθέτου δ και του δ_0 έτσι ώστε το τρίεδρο $\varepsilon_0 k_0 \delta_0$ να είναι δεξιόστροφο (ΣΧ. 1.5). Το κινητό τούτο τρίεδρο καλείται τρίεδρο Frénet.

Οι διανυσματικές εξισώσεις Frénet, που συνδέουν τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\mathbf{k}_0$, $\boldsymbol{\delta}_0$ μεταξύ τους, είναι οι παρακάτω

$$d\varepsilon_0/ds = \kappa \mathbf{k}_0 \;, \quad d\mathbf{k}_0/ds = \tau\delta_0 - \kappa\,\varepsilon_0 \;, \quad d\delta_0/ds = -\tau\,\mathbf{k}_0 \tag{1.10}$$

όπου $\kappa = 1/R$ είναι η καμπυλότητα και τ η στρέψη της καμπύλης (R παριστάνει την ακτίνα καμπυλότητος της καμπύλης).

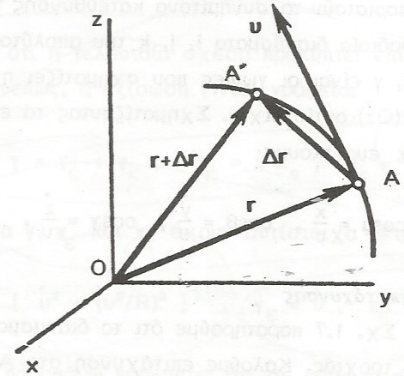
1.2.1 Διάνυσμα ταχύτητας

Μιά από τις βασικές κινηματικές παραμέτρους της κίνησης υλικού σημείου είναι το διάνυσμα της ταχύτητας. Έστω ότι το σημείο A στις χρονικές στιγμές t και t + Δt κατέχει τις θέσεις A και A΄ πάνω στην τροχιά, που καθορίζονται από τις διανυσματικές ακτίνες **r** και **r** + Δ**r** (Σχ. 1.6). Κατά το χρονικό διάστημα Δt το σημείο μετακινήθηκε κατά το διάνυσμα **AA΄** = Δ**r**. Καλούμε ταχύτητα του σημείου A κατά την χρονική στιγμή t το διάνυσμα που ορίζεται από την σχέση

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}\,. \tag{1.11}$$

Το διάνυσμα **υ** κείται επάνω στην εφαπτομένη της τροχιάς στο Α κατά την διεύθυνση της κίνησης και αν υ παριστάνει την αλγεβρική τιμή του, τότε

$$\mathbf{υ} = υ\boldsymbol{ε}_0 . \tag{1.12}$$



Σχήμα 1.6: Διάνυσμα ταχύτητας υλικού σημείου.

Όταν η κίνηση καθορίζεται με την φυσική μέθοδο, δηλαδή όταν η κίνηση δίνεται από την σχέση (1.1), τότε

$$υ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} . \tag{1.13}$$

Επίσης, όταν η κίνηση καθορίζεται με την μέθοδο των συντεταγμένων, δηλαδή ισχύουν οι αναλυτικές εξισώσεις (1.3), τότε οι συντεταγμένες της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$υ_x = \dot{x} , \quad υ_y = \dot{y} , \quad υ_z = \dot{z} , \tag{1.14}$$

ενώ το μέτρο από την εξίσωση

$$υ = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} > 0 . \tag{1.15}$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να καθορίσουμε και την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{υ_0}$ της ταχύτητας ($\mathbf{υ}_0 \equiv \boldsymbol{ε}_0$) από τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου αυτού διανύσματος με τους άξονες συντεταγμένων. Πράγματι, έχουμε τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\upsilon} = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\ ),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),\quad \boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

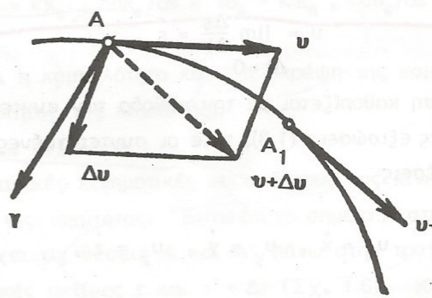
όπου $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ παριστούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ με τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j**, **k** του απολύτου συστήματος αναφοράς αντίστοιχα (α, β, γ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες (Οx), (Οy) και (Οz) αντίστοιχα). Σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{i}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{j}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{k}$ ευρίσκουμε

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\upsilon},\quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{\upsilon},\quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{\upsilon}\ . \tag{1.16}$$

1.2.2 Διάνυσμα επιτάχυνσης

Αναφερόμενοι στο Σχ. 1.7 παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ διευθύνεται προς το εσωτερικό της τροχιάς. Καλούμε επιτάχυνση στο Α κατά την χρονική στιγμή t το διάνυσμα που δίνεται από την σχέση

$$\boldsymbol{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\upsilon}} = \ddot{\mathbf{r}}\ . \tag{1.17}$$



Σχήμα 1.7: Διάνυσμα επιτάχυνσης υλικού σημείου.

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης διευθύνεται προς το εσωτερικό της τροχιάς. Με βάση τις σχέσεις (1.12) και (1.17) προκύπτει

$$\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{\upsilon}} = (\upsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{\cdot} = \dot{\upsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 . \tag{1.18}$$

Σύμφωνα τώρα με την πρώτη των διανυσματικών εξισώσεων Frenet (πρώτη των 1.10) και την (1.13) παίρνουμε

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\upsilon\mathbf{k}_0 = \frac{1}{R}\upsilon\,\mathbf{k}_0 . \tag{1.19}$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι η τελευταία σχέση προκύπτει επίσης με την βοήθεια του Σχήματος 1.7. Συνεπώς, η εξίσωση (1.18) γράφεται

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon + \boldsymbol{\gamma}_\kappa , \quad \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = \dot{\upsilon}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0 , \quad \boldsymbol{\gamma}_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}\mathbf{k}_0 \tag{1.20}$$

όπου τα διανύσματα $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ και $\boldsymbol{\gamma}_\kappa$ έχουν αντίστοιχα μέτρα

$$\gamma = [\ \dot{\upsilon}^2 + (\upsilon^2/R)^2\ ]^{\frac{1}{2}} , \quad \gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon} , \quad \gamma_\kappa = \upsilon^2/R . \tag{1.20α}$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε κάθε κίνηση σημείου η επιτάχυνση εκφράζεται ως διανυσματικό άθροισμα:

i) Της επιτρόχιας ή εφαπτομενικής συνιστώσας $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ με αλγεβρική τιμή $\dot{\upsilon}$, και

ii) Της κεντρομόλου ή κάθετης συνιστώσας $\boldsymbol{\gamma}_\kappa$ με αλγεβρική τιμή υ^2/R.

Η πρώτη διευθύνεται πάνω στην εφαπτομένη της καμπύλης τροχιάς, ενώ η δεύτερη πάνω στην πρώτη κάθετο της καμπύλης και προς το κέντρο καμπυλότητος. Αν η κίνηση καθορίζεται με βάση την φυσική μέθοδο, δηλαδή την εξίσωση (1.1), τότε από τις σχέσεις (1.13) και (1.20) θα είναι

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{R}\mathbf{k}_0 , \quad \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds} . \tag{1.21}$$

Τέλος, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\gamma}$ μπορεί να καθορισθεί βάσει της (1.17) και από την εξίσωση

$$\boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} , \tag{1.22}$$

όπου το μέτρο γ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = (\ \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2\ )^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{1.22α}$$

Αν $\boldsymbol{\gamma}_0 = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$ παριστάνει το μοναδιαίο διάνυσμα το αντίστοιχούν στο $\boldsymbol{\gamma}$, τότε με βάσει τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma \boldsymbol{\gamma}_0 , \quad \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \mathbf{i} = \cos\alpha_1 , \quad \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \mathbf{j} = \cos\beta_1 , \quad \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \mathbf{k} = \cos\gamma_1$$

και την εξίσωση (1.22α), υπολογίζουμε εύκολα τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος **γ** ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς από τους τύπους

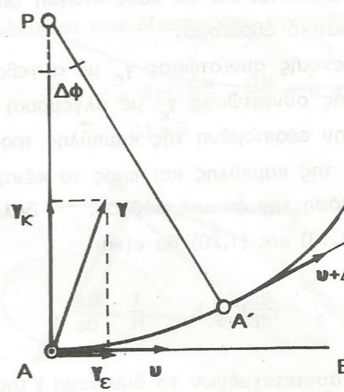
$$\cos\alpha_1 = \ddot{x}/\gamma , \quad \cos\beta_1 = \ddot{y}/\gamma , \quad \cos\gamma_1 = \ddot{z}/\gamma \tag{1.23}$$

όπου α_1, β_1, γ_1 είναι οι γωνίες του **γ** με τους άξονες Οx, Oy και Oz αντίστοιχα.

1.3 Ειδικές Περιπτώσεις της Κίνησης Υλικού Σημείου

1.3.1 Επίπεδη κίνηση

Η κίνηση λέγεται επίπεδη όταν η τροχιά είναι επίπεδη καμπύλη, οπότε το εγγύτατο επίπεδο της τροχιάς συμπίπτει με το επίπεδο αυτής. Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα **υ** και **γ** κείνται πάνω στο επίπεδο της τροχιάς (Σχ. 1.8).



Σχήμα 1.8: Επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση υλικού σημείου.

Η εφαπτομένη (ΑΕ) κατά την κίνηση του σημείου στρέφεται περί την κάθετο στο επίπεδο δικάθετο (ΑΔ) με ταχύτητα ω που καλείται γωνιακή ταχύτητα και δίνεται από τον τύπο

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{\upsilon}{R} . \tag{1.24}$$

υ

$\omega = \upsilon \cdot r$

Με βάση την τρίτη των (1.20α) και την (1.24) προκύπτει

$ds = R \cdot d\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$

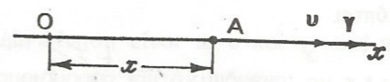
$$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega\upsilon\ , \tag{1.25}$$

δηλαδή η αλγεβρική τιμή της κεντρομόλου επιτάχυνσης ισούται προς το γινόμενο του μέτρου της ταχύτητας επί την γωνιακή ταχύτητα. Όπως και παραπάνω τονίσθηκε, η συνιστώσα γ_K διευθύνεται πάντα προς το κέντρο καμπυλότητας, δηλαδή είναι $\gamma_K > 0$ ενώ η γ_ε μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

1.3.2 Ευθύγραμμη κίνηση

Στην ευθύγραμμή κίνηση η τροχιά του κινητού είναι ευθεία γραμμή ($R \to \infty$ ή $\kappa \to 0$) και επομένως ισχύει

$$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} = 0\ .$$



Σχήμα 1.9: Ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου.

Η επιτάχυνση γ προκύπτει

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = \dot{\upsilon}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (\gamma = \gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon})\ .$$

Συνεπώς τα διανύσματα **γ** και **υ** είναι συγγραμμικά. Αν Οx παριστάνει την τροχιά του σημείου (Σχ. 1.9), η εξίσωση της κίνησης δίνεται ως

$$x = x(t)\ ,$$

$x = \gamma t + c_1 \Rightarrow x = \frac{\gamma t^2}{2} + c$

$\dot{x} = \gamma t + c_1$

και έτσι

$\gamma = \dot{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \gamma t + c$

$$\upsilon = \dot{x}\ ,\quad \gamma = \ddot{x}\ , \tag{1.26}$$

Η απλούστερη των ευθυγράμμων κινήσεων είναι η ομοιόμορφη, στην οποία

$$\upsilon = \text{σταθ.}\ ,\quad \gamma = 0 \quad \text{και} \quad x = \upsilon t + x_0\ . \tag{1.27}$$

Είναι προφανές ότι αν γιά $t = 0$ είναι $x_0 = 0$, τότε η τελευταία των (1.27) γίνεται

$$x = \upsilon t \,. \tag{1.27α}$$

Ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη) λέγεται η ευθύγραμμη κίνηση όταν η ταχύτητα μεταβάλλεται ανάλογα του χρόνου, δηλαδή όταν ισχύει

$$\upsilon = ct \quad (c = \text{σταθερά})\,, \tag{1.28}$$

και επομένως η επιτάχυνση είναι

$$\gamma = c \,.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\upsilon = \gamma t \,, \quad t = \frac{\upsilon}{\gamma} \tag{1.28α}$$

και η εξίσωση κίνησης αν γιά $t = 0$ είναι $x_0 = 0$ δίνεται

$$x = \frac{\gamma t^2}{2} = \frac{\upsilon t}{2} = \frac{\upsilon^2}{2\gamma} \,. \tag{1.28β}$$

1.3.3 Ομοιόμορφη καμπυλόγραμμη κίνηση

Στην κίνηση αυτή είναι

$$\upsilon = \text{σταθ.} \quad \text{και} \quad \gamma_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \,. \tag{1.29}$$

Επομένως η επιτάχυνση είναι η κεντρομόλος, που δίνεται από την σχέση

$$\gamma = \gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} \,. \tag{1.29α}$$

Η εξίσωση της κίνησης προκύπτει από την σχέση $ds/dt = \upsilon$, δηλαδή

$$s = s_0 + \upsilon t \,. \tag{1.30}$$

Αν γιά $t = 0$ είναι $s_0 = 0$, τότε η εξίσωση της κίνησης δίνεται από την σχέση

$$s = \upsilon t\ . \tag{1.30α}$$

1.3.4 *Ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη καμπυλόγραμμη κίνηση*

Έτσι λέγεται η κίνηση κατά την οποία η επιτρόχιος επιτάχυνση γ_ε είναι σταθερή κατά μέτρο. Ας υποθέσουμε ότι κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $s = s_0$ και $\upsilon = \upsilon_0$ (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα του σημείου). Από την δεύτερη των εξισώσεων (1.20α) έχουμε

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma_\varepsilon t\ , \tag{1.31}$$

ενώ από την (1.13)

$$\frac{ds}{dt} = \upsilon_0 + \gamma_\varepsilon t \ \rightarrow\ s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{\gamma_\varepsilon t^2}{2}\ . \tag{1.31α}$$

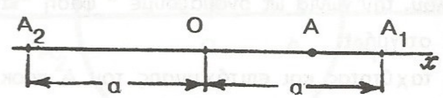
Αν στην καμπυλόγραμμη κίνηση είναι τα υ και γ_ε ομόσημα, δηλαδή αν $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\upsilon}>0$, τότε η κίνηση είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη· αν $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\upsilon}<0$, τότε η κίνηση είναι ομοιόμορφα επιβραδυνόμενη.

1.3.5 *Αρμονική ταλάντωση*

Θεωρήσουμε την ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου Α (Σχ. 1.10), που καθορίζεται με την εξίσωση

$$x = a\sin\omega t\ , \tag{1.32}$$

όπου a, ω είναι σταθερές.



Σχήμα 1.10: Αρμονική ταλάντωση υλικού σημείου.

Το σημείο Α λέμε ότι ταλαντούται μεταξύ των θέσεων A_1 και A_2, την δε κίνηση που εκτελεί καλούμε " απλή αρμονική ταλάντωση " ή " ημιτονοειδή κίνηση " . Παρατηρούμε ότι γιά $t = 0$ είναι $x = 0$, και ότι γιά $\sin\omega t = \pm 1$ το x παίρνει την μεγίστη ή ελαχίστη τιμή αντίστοιχα, δηλαδή

$$x = \pm\alpha .$$

Επομένως, στους χρόνους

$$t_1 = \pi/2\omega + 2k\pi/\omega \ , \quad t_2 = 3\pi/2\omega + 2k\pi/\omega \ , \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

το x παίρνει αντίστοιχα την μεγίστη τιμή +α και την ελαχίστη -α. Εξ άλλου, το σημείο Α περνάει από την αρχή Ο στους χρόνους $t_0 = k\pi/\omega$. Λέμε ότι το Α εκτελεί " απλή αιώρηση " όταν διαγράφει άπαξ διάστημα ίσο προς το μήκος μιάς διαμέτρου A_1A_2. Η χρονική διάρκεια που το Α διαγράφει την διάμετρο A_1A_2 είναι π/ω, ενώ ο χρόνος γιά νά διαγράψει δύο φορές την διάμετρο είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.33}$$

και αποτελεί τον χρόνο μιάς πλήρους αιώρησης. Επομένως, κατά τις στιγμές t + kT, (k = 0, 1, ...), το κινητό διέρχεται από τις ίδιες θέσεις και έχει την αυτή φορά κίνησης. Ο χρόνος Τ μιάς πλήρους αιώρησης του σημείου λέγεται " περίοδος ", το μέγεθος α λέγεται " εύρος " της ταλάντωσης, το ω " κυκλική συχνότητα " και, τέλος, ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

των πλήρων αιωρήσεων στην μονάδα του χρόνου, λέγεται " συχνότητα της ταλάντωσης ". Εξ άλλου, την γωνία ωt ονομάζουμε " φάση " της αρμονικής ταλάντωσης την χρονική στιγμή t.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας και επιτάχυνσης του Α προκύπτουν από την σχέση (1.32)

$$\upsilon_x = \alpha\omega\cos\omega t \ , \quad \gamma_x = -\alpha\omega^2\sin\omega t \ . \tag{1.34}$$

Τα σημεία των υ_x και γ_x δείχνουν ότι όταν το σημείο κινείται από το Ο προς τα άκρα A_1 και A_2, η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ προς το κέντρο Ο είναι επιταχυνόμενη. Σημειώνουμε εδώ ότι κίνηση του ίδιου τύπου καθορίζεται και με την εξίσωση

$$x = \alpha\cos\omega t\ ,$$

με την διαφορά ότι σ΄ αυτή την περίπτωση η κίνηση αρχίζει από το A_1. ΄Ενα σημείο που ταλαντούται σύμφωνα με τον νόμο

$$s = \alpha\cos\omega t \quad (\text{ή ισοδύναμα } s = \alpha\sin\omega t),$$

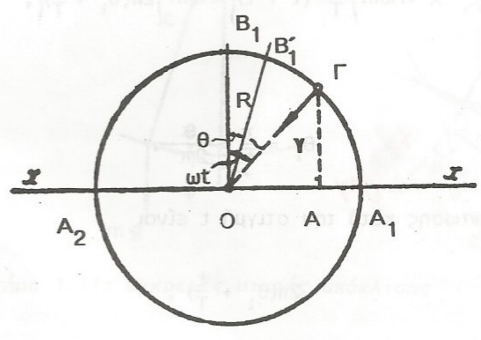
μπορεί να κινείται κατά μήκος τυχούσας επίπεδης καμπύλης. ΄Ολα τα παραπάνω αναφερθέντα ισχύουν και σ΄ αυτή την περίπτωση με την διαφορά ότι η σχέση

$$\gamma_\varepsilon = -\alpha\omega^2\cos\omega t \quad (\text{ή ισοδύναμα } \gamma_\varepsilon = -\alpha\omega^2\sin\omega t)$$

καθορίζει την εφαπτομενική (επιτρόχιο) επιτάχυνση, ενώ η κάθετη (κεντρομόλος) επιτάχυνση καθορίζεται από την σχέση

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}\ , \quad \upsilon = -\alpha\omega\sin\omega t \quad (\text{ή ισοδύναμα } \upsilon = \alpha\omega\cos\omega t)\ .$$

΄Οταν σημείο Γ κινείται ομαλά πάνω σε περιφέρεια ακτίνας R, η προβολή του Α πάνω στην διάμετρο A_1A_2 εκτελεί αρμονική ταλάντωση (Σχ. 1.10α).



Σχήμα 1.10α: Κίνηση υλικού σημείου πάνω σε περιφέρεια.

Πράγματι, η εξίσωση της κίνησης είναι

$$x = R\sin\omega t ,$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της ομαλής κυκλικής κίνησης του Γ. Μπορούμε εδώ να υποθέσουμε γενικώτερα, ότι η αρχή των χρόνων δεν συμπίπτει με την αρχή των διαστημάτων, δηλαδή ότι γιά $t = 0$ το Γ διέρχεται από το B_1', ενώ στην χρονική στιγμή t το σημείο κατέχει την θέση Γ. Στην προκειμένη περίπτωση η εξίσωση της κίνησης του Α θα είναι

$$x = R\sin(\theta + \omega t) ,$$

όπου η γωνία θ φαίνεται στο Σχ. 1.10α. Αν τ είναι ο χρόνος που το σημείο Γ διανύει το τόξο B_1B_1' θα ισχύει

$$\theta = \omega\tau \rightarrow \tau = \theta/\omega ,$$

και η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$x = R\sin\{\omega(\tau + t)\}$$

ή ισοδύναμα

$$x = R\sin\left\{\frac{2\pi}{T}(\tau + t)\right\} = R\sin\left\{2\pi(\theta_1 + \frac{t}{T})\right\}, \tag{1.35}$$

όπου

$$\theta_1 = \frac{\tau}{T} = \frac{\theta}{2\pi} . \tag{1.35α}$$

Η φάση της ταλάντωσης κατά την στιγμή t είναι

$$2\pi(\theta_1 + \frac{t}{T}) ,$$

και γιά $t = 0$ είναι

$$2\pi\theta_1 = \theta .$$

Σημειώνουμε εδώ ότι και η ευθύγραμμη κίνηση της μορφής

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (a,\ b = \text{σταθ.},\quad \omega>0) \tag{1.36}$$

μπορεί να μετασχηματισθεί στην εξίσωση (1.32). Πράγματι, η (1.36) γράφεται

$$x = \alpha\ \sin\theta\ \cos\omega t + \alpha\ \cos\theta\ \sin\omega t$$

όπου

$$\alpha = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \arctan\frac{a}{b} .$$

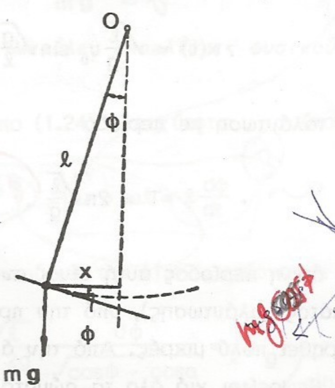
Έτσι, η εξίσωση (1.36) γράφεται

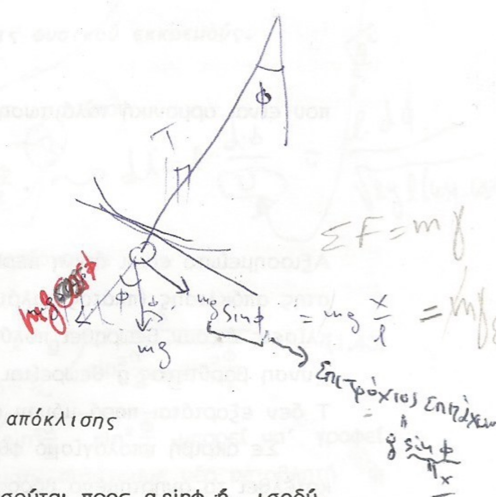
$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)}\ \sin(\theta + \omega t) = \alpha\ \sin(\theta + \omega t) . \tag{1.37}$$

δηλαδή η κίνηση που καθορίζεται από την (1.36) είναι αρμονική ταλάντωση.

1.3.6 Το απλούν (μαθηματικό) εκκρεμές

Σύμφωνα με το Σχ. 1.11 η κίνηση του ανηρτημένου βάρους προϋποθέτει επιτάχυνση ίση προς την επιτάχυνση της βαρύτητας g.





Σχήμα 1.11: Εκκρεμές μικρής απόκλισης

Συνεπώς, το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης ισούται προς $g\sin\phi$ ή, ισοδύναμα προς $g\frac{x}{\ell}$. Γιά πολύ μικρές αποκλίσεις, δηλαδή γιά πολύ μικρές γωνίες ϕ, αντί της επιτρόχιας επιτάχυνσης (d^2s/dt^2) του τύπου (1.21) μπορούμε να εισάγουμε κατά πρώτη προσέγγιση την οριζόντιο προβολή της ίση προς (d^2x/dt^2). Έτσι, η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$\Sigma F = m\gamma$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,g\sin\phi$

$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{x}{\ell}$

$\omega = \frac{g}{\ell}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x. \tag{1.38}$$

Δεδομένου ότι $(g/\ell) > 0$ η ολοκλήρωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές (1.38) καταλήγει στην

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t \tag{1.39}$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες

$$\text{γιά} \quad t = 0\,, \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0$$

ευρίσκουμε

$$c_1 = 0\,, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\upsilon_0$$

και επομένως

$$x(t) = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\upsilon_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t \tag{1.40}$$

που είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,. \tag{1.41}$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η περίοδος αυτή είναι ανεξάρτητη της γωνίας της μέγιστης απόκλισης (πλάτος ταλάντωσης), υπό την προϋπόθεση φυσικά ότι οι αποκλίσεις έχουν θεωρηθεί πολύ μικρές. Από την άλλη μεριά, επειδή η επιτάχυνση βαρύτητας g θεωρείται γιά όλα τα σώματα η ίδια, η ευρεθείσα περίοδος T δεν εξαρτάται παρά μόνον από το μήκος του εκκρεμούς.

Σε ακριβή υπολογισμό φθάνουμε όταν σκεφθούμε ότι το ύψος h, που έχει κατέλθει το ανηρτημένο βάρος από την ακραία θέση που αντιστοιχεί στην μέγιστη απόκλιση α, ισούται (Σχ. 1.12) πρός $\ell(\cos\phi - \cos\alpha)$. Εξ άλλου, στην θέση αυτή το σώμα έχει αποκτήσει, σύμφωνα με την σχέση (1.28β), ταχύτητα που προκύπτει από την ισότητα

$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v^2 = 2gh$

$h = \ell(\cos\phi - \cos\alpha)$ (2)

$$h = \frac{v^2}{2g}. \quad (1)$$

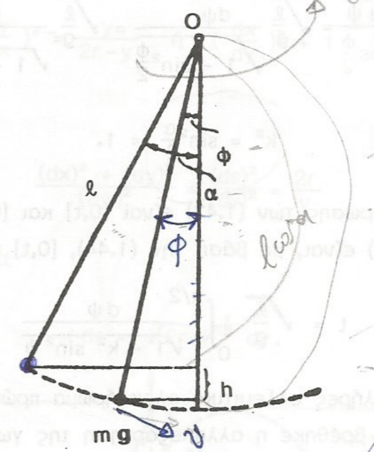
$v = \sqrt{2g\ell(\cos\phi - \cos\alpha)}$

Επομένως

(1), (2) $\Rightarrow$

$$\ell\,(\cos\phi - \cos\alpha\,) = \frac{v^2}{2g}. \tag{1.42}$$

$\ell\omega = \ell\frac{d\phi}{dt}$



$\ell\cos\alpha$

$h = \ell\cos\phi - \ell\cos\alpha$

$v^2 = 2gh$

Σχήμα 1.12: Μεγάλες αποκλίσεις φυσικού εκκρεμούς.

Αλλά σύμφωνα με τον τύπο (1.24) η ταχύτητα υ ισούται

$$v = \omega\ell = \ell\frac{d\phi}{dt}. \quad (3)$$

$dt = \ell\frac{d\phi}{v} = \frac{\ell\, d\phi}{\sqrt{2g\ell(\cos\phi - \cos\alpha)}}$

εκ της οποίας, σε συνδυασμό με την (1.42), παίρνουμε

$$dt = \ell\frac{d\phi}{v} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}}. \tag{1.43}$$

$\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο παρονομαστής $\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή $\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}$ $(k^2 < 1)$. Πράγματι, εισάγουμε νέα μεταβλητή ψ οριζόμενη από την σχέση

Θέτω $k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi \tag{1.44}$$

εκ της οποίας, μετά από διαφόριση ευρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\,d\phi = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi\,d\psi. \tag{1.45}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα αμφότερα τα μέλη της (1.43) με $\cos\frac{\phi}{2}$ και αντικαθιστώντας την φ με την ψ συνάγουμε

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\cos\frac{\phi}{2}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi}{2}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{1.46}$$

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} < 1.$$

Αν τα όρια ολοκλήρωσης των (1.43) είναι [0,t] και [0,α], τότε τα όρια της ολοκλήρωσης στην (1.46) είναι, με βάση την (1.44), [0,t] και $[0,\frac{\pi}{2}]$. Συνεπώς

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \tag{1.47}$$

που ουσιαστικά είναι πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους διδόμενο από πίνακες. Συνεπώς, βρέθηκε η αλληλεξάρτηση της γωνίας ψ και του χρόνου t, ή της γωνίας φ και του χρόνου t. Από την εξίσωση (1.47) είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την περίοδο T, δηλαδή τον χρόνο μιάς πλήρους ταλάντωσης, αν τετραπλασιάσουμε, δηλαδή

$$T = 4t. \tag{1.48}$$

Κατά προσέγγιση θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε κατά τον τύπο του διωνύμου την συνάρτηση $(1-k^2\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}$, οπότε αρκούμενοι στους δύο πρώτους όρους αυτής της σειράς, θα παίρναμε

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}(1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\psi)\,d\psi = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{1.49}$$

1.3.7 *Η κίνηση επί κυκλοειδούς*

Η απλή κυκλοειδής καμπύλη γράφεται από κάθε σημείο Α της περιφέρειας κύκλου, ο οποίος κυλίεται επάνω σε σταθερή ευθεία αα (Σχ. 1.13). Συνεπώς, η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό είναι κάθετη στην (PA), που συνδέει το σημείο επαφής P με το Α, και άρα διέρχεται από το διαμετρικό σημείο Κ. Επομένως κατ´ απόλυτη τιμή έχουμε

$$\frac{(KB)}{(BA)} = \frac{dy}{dx} = \frac{(BA)}{(BP)} = \frac{(BA)}{2r - y} \; ; \quad (BA)^2 = (BP)\,(KB) = (2r - y)y \; ,$$

r = ακτίνα κύκλου. ´Ετσι

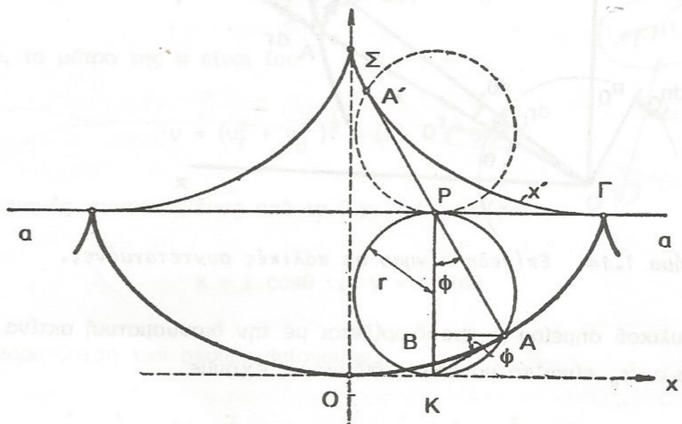
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{2r - y} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = \frac{2r}{y}$$

ή, ακόμη

$$\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dy)^2} = \frac{(ds)^2}{(dy)^2} = \frac{2r}{y}$$

από την οποία προκύπτει

$$ds = \sqrt{2r}\; y^{-\frac{1}{2}}\; dy . \tag{1.50}$$



Σχήμα 1.13: Απλή κυκλοειδής καμπύλη.

Με βάση τους άξονες του σχήματος 1.13 έχουμε

$$\text{γιά} \quad y = 0 \; , \quad s = 0$$

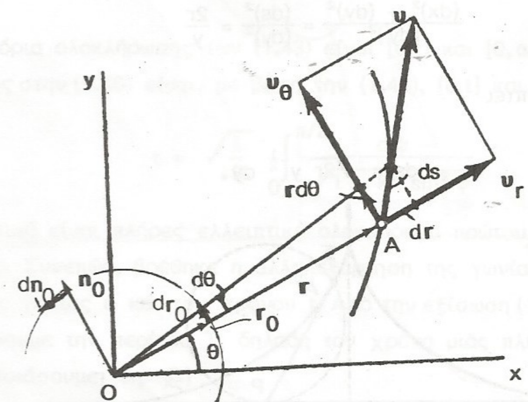
οπότε η ολοκλήρωση της (1.50) καταλήγει στην έκφραση

$$s = 2\sqrt{2ry} = 2\,(KA) = 4r\,\sin\phi . \qquad (1.50\alpha)$$

1.4 Επίπεδη Κίνηση σε Πολικές Συντεταγμένες

Στο επίπεδο και σε σύστημα πολικών συντεταγμένων οι παράμετροι της κίνησης είναι

$$r = r(t)\ , \quad \theta = \theta(t) \qquad (1.51)$$



Σχήμα 1.14: Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες.

Η θέση του υλικού σημείου A προσδιορίζεται με την διανυσματική ακτίνα **r**, γιά την οποία, αν $\mathbf{r}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, έχουμε

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0\ , \quad d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{r}_0 + r\,d\mathbf{r}_0\ ,$$
$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_0 + r\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} . \qquad (1.52)$$

Θεωρούμε τώρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}_0$ κάθετο επί του $\mathbf{r}_0$. Από την διαφόριση της εξίσωσης

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = 1$$

έπεται

$$2\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = 0 ,$$

δηλαδή ότι $\mathbf{r}_0 \perp d\mathbf{r}_0$.
Συνεπώς, γράφουμε με βάση το σχήμα 1.14

$$d\mathbf{r}_0 = d\theta\, \mathbf{n}_0$$

και επομένως η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ από τις εξισώσεις (1.52) προκύπτει:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\theta}\,\mathbf{n}_0$$

ή

$\dot{\theta}$ $\upsilon_\theta = \omega . r$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\upsilon}_r + \boldsymbol{\upsilon}_\theta, \quad \upsilon_r = \dot{r} , \quad \upsilon_\theta = r\dot{\theta} . \qquad (1.53)$$

THIS

OK

Εξ άλλου, το μέτρο της $\boldsymbol{\upsilon}$ είναι ίσο

$$\upsilon = (\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}} . \qquad (1.54)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες από το Σχ. 1.14 ευρίσκουμε

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \qquad (1.55)$$

από την παραγώγιση των οποίων παίρνουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \quad , \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \quad . \qquad (1.56)$$

Επομένως

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \ldots$

$$\upsilon = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

δηλαδή επανευρίσκουμε τον τύπο (1.54).

$v_r = \dot{r}$

Ομοίως

$v_\theta = r\dot{\theta}$

$$\gamma = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_r}{dt} + \frac{d\upsilon_\theta}{dt} = \ddot{r}\mathbf{r}_0 + \dot{r}\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + (r\dot{\theta})^{\cdot}\mathbf{n}_0 + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{n}_0}{dt}\,.$$

Αλλά, δεδομένου ότι

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 1 \rightarrow 2\mathbf{n}_0 \cdot d\mathbf{n}_0 = 0 \rightarrow \mathbf{n}_0 \perp d\mathbf{n}_0$$

και με βάση το σχήμα 1.14 , συνάγουμε

$$d\mathbf{n}_0 = -\,d\theta\,\mathbf{r}_0\,.$$

Συνεπώς, ο τύπος της γ μετασχηματίζεται στον

$$\gamma = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{r}_0 + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{n}_0 + (r\dot{\theta})^{\cdot}\mathbf{n}_0 - r\dot{\theta}^2\mathbf{r}_0\,,$$

δηλαδή

$$\gamma = \gamma_r + \gamma_\theta\,, \quad \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\,, \quad \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{(r^2\dot{\theta})^{\cdot}}{r}\,. \qquad (1.57)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε αν παραγωγίσουμε τις (1.56). Πράγματι

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\sin\theta\,,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\cos\theta\,,$$

από τις οποίες, μετά την εκτέλεση απλών πράξεων, παίρνουμε

$$\gamma = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2]^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (1.57\alpha)$$

Η διανυσματική συνιστώσα $\boldsymbol{\gamma}_r = \gamma_r\mathbf{r}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_0$ καλείται **ακτινική επιτάχυνση ή επιτάχυνση διαφυγής,** και η διανυσματική συνιστώσα $\boldsymbol{\gamma}_\theta = \gamma_\theta\mathbf{n}_0 = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{n}_0 = [(r^2\dot{\theta})^{\cdot}/r]\,\mathbf{n}_0$ καλείται **κάθετη επιτάχυνση ή επιτάχυνση περιφοράς.**

Με αναφορά πάλι το σχήμα 1.14 ορίζουμε:

i) ***Εμβαδική ταχύτητα*** U_E το διάνυσμα με μέτρο το εμβαδό που διαγράφεται στην μονάδα του χρόνου από την διανυσματική ακτίνα **r**(t) και με φορά αυτή της δικαθέτου. Σημειωτέον ότι η φορά της δικαθέτου είναι σταθερή δεδομένου ότι είναι κάθετη στο επίπεδο της κίνησης. Συνεπώς με βάση τις (1.53)

$$\mathbf{U}_E = U_E \boldsymbol{\delta}_0 , \; U_E = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r \upsilon_\theta . \tag{1.58}$$

ii) Εμβαδική επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_E$ το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\gamma}_E = \frac{d\mathbf{U}_E}{dt} = \frac{dU_E}{dt} \boldsymbol{\delta}_0 + U_E \frac{d\boldsymbol{\delta}_0}{dt} = \frac{dU_E}{dt} \boldsymbol{\delta}_0 , \tag{1.59}$$

δεδομένου ότι $\boldsymbol{\delta}_0$ είναι σταθερό. Είναι όμως

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{r}\upsilon_\theta + r\dot{\upsilon}_\theta) = \frac{1}{2}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) ,$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\gamma}_E = \frac{1}{2} r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{\delta}_0 = \frac{1}{2}(r^2\dot{\theta})^{\boldsymbol{\cdot}} \boldsymbol{\delta}_0 = \frac{1}{2} r \gamma_\theta \boldsymbol{\delta}_0 . \tag{1.60}$$

Σε σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων τα μέτρα U_E και γ_E παίρνουν την μορφή

$$U_E = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) , \quad \gamma_E = \frac{1}{2}(x\ddot{y} - \ddot{x}y) . \tag{1.61}$$

1.4.1 Κεντρική κίνηση

Ειδική περίπτωση της επίπεδης κίνησης αποτελεί η κεντρική κίνηση κατά την οποία η επιτάχυνση φέρεται διαρκώς προς ένα σταθερό σημείο (κέντρο) Ο. Στην περίπτωση αυτή είναι

$$\gamma_\theta = 0,$$

και με βάση την τρίτη των (1.57) έχουμε

$$r^2\dot{\theta} = \text{σταθ.} \tag{1.62}$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$E = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = U_E \tag{1.63}$$

είναι το εμβαδό της καλυπτόμενης από την ακτίνα ΟΑ επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου. Αν το εμβαδό Ε είναι δεδομένο, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης $\gamma = \gamma_r$ προκύπτει σύμφωνα με αυτά που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 1.4 και την σχέση (1.63) όπως παρακάτω:

$$\gamma = \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{4E^2}{r^3}. \tag{1.64}$$

Γιά r = σταθ. , δηλαδή την κυκλική κεντρική κίνηση, η σχέση (1.64) γίνεται

$$\gamma = \gamma_r = - r\dot{\theta}^2 = - \frac{\upsilon^2}{r}. \tag{1.65}$$

και το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ έχον μόνον ως διανυσματική συνιστώσα την ακτινική επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}_r$ προκύπτει

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_r = - \frac{\upsilon^2}{r}\mathbf{r}_0 . \tag{1.66}$$

Τώρα, βάσει των σχέσεων (1.54) και (1.63) γιά την κεντρική κίνηση έχουμε

$$\upsilon^2 = \upsilon_\theta^2 + \upsilon_r^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 , \quad \frac{r^2}{2E}\, d\theta = dt \quad \text{και} \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

και επομένως καταλήγουμε στην έκφραση του μέτρου υ^2 συναρτήσει της εμβαδικής ταχύτητας, δηλαδή

$$\upsilon^2 = 4E^2 \left\{ \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\}. \tag{1.67}$$

Από την άλλη μεριά γράφουμε

$$d\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\gamma} dt , \quad \mathbf{r}_0 \perp d\mathbf{r}_0$$

και

$$\boldsymbol{\upsilon} \cdot d\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\upsilon}\, dt = \boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{r} = \gamma \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} = \gamma \mathbf{r}_0 \cdot (r d\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0 dr) = \gamma dr = \upsilon d\upsilon = \frac{1}{2} d\upsilon^2 .$$

Έτσι, μέσω της (1.67) και της

$$\gamma\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{du^2}{d\theta}$$

που προκύπτει από την τελευταία εξίσωση, ευρίσκουμε

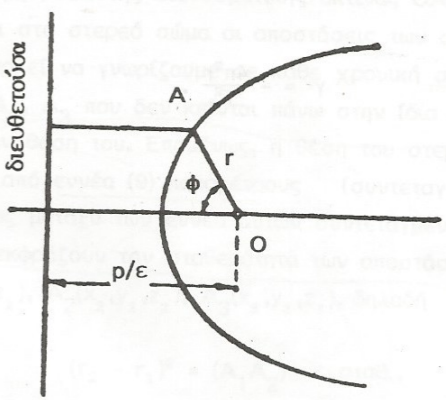
$$\gamma = -\frac{4E^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]. \quad (1.68)$$

Με τους τύπους (1.67) και (1.68) καθορίζονται η ταχύτητα και επιτάχυνση της κεντρικής κίνησης. Οι τύποι αυτοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου t και είναι γνωστοί ως τύποι Binet.

Τον τύπο (1.68) θα εφαρμόσουμε τώρα σε κεντρική κίνηση με τροχιά καμπύλη δευτέρου βαθμού, οριζόμενη σε πολικές συντεταγμένες με αρχή Ο μιά των εστιών (Σχ. 1.15) μέσω της εξίσωσης

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\phi} \quad (1.69)$$

(p =παράμετρος, ε = εκκεντρότης) .



Σχήμα 1.15: Κεντρική κίνηση με τροχιά καμπύλη δευτέρου βαθμού.

Από την (1.68) ευρίσκουμε

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\phi}{p}, \quad \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varepsilon\cos\phi}{p}, \quad \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}. \quad (1.70)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.68) παίρνουμε

$$\gamma = -\frac{4E^2}{r^2}\frac{1}{p}\,. \tag{1.71}$$

Εάν η τροχιά είναι έλλειψη με α και β μέγιστο και ελάχιστο ημιάξονα $\left(\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{\beta^2}\right)$, η επιτάχυνση, κατευθυνόμενη προς μιά των εστιών της έλλειψης, δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = -\frac{4E^2}{r^2}\frac{\alpha}{\beta^2}\,. \tag{1.72}$$

Έστω T ο χρόνος μιάς πλήρους περιφοράς. Επειδή η κατά τον χρόνον αυτόν καλυπτόμενη επιφάνεια έχει εμβαδόν παβ, συνάγεται ότι

$$E = \frac{\pi\alpha\beta}{T}\,, \qquad \gamma = -\frac{4\pi^2\alpha^3}{T^2}\frac{1}{r^2} = -K\frac{1}{r^2}\,, \tag{1.73}$$

$$K = \frac{4\pi^2\alpha^3}{T^2}\,.$$

Προκειμένου περί κυκλικής τροχιάς είναι α = r και ο τελευταίος τύπος παίρνει την γνωστή μορφή

$$\gamma = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\,. \tag{1.74}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εφαρμογή 1.1: Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση $R = \upsilon^3 / |\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\gamma}|$, όπου $\boldsymbol{\upsilon}$ παριστάνει την ταχύτητα υλικού σημείου, $\boldsymbol{\gamma}$ την επιτάχυνση του και R την ακτίνα καμπυλότητος της τροχιάς την οποία διαγράφει.

Λύση: Από τους τύπους (1.20) έχουμε

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}_{k} = \dot{\upsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{\upsilon^2}{R}\mathbf{k}_0 , \qquad (10.1)$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα και $\mathbf{k}_0$ το πρώτο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της τροχιάς που διαγράφει το υλικό σημείο.
Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά εξ αριστερών την (10.1) με $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\gamma} = \dot{\upsilon}(\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \frac{\upsilon^2}{R}(\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{k}_0)$$

ή

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\gamma} = \dot{\upsilon}(\upsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \frac{\upsilon^2}{R}(\upsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \mathbf{k}_0) . \qquad (10.2)$$

Είναι όμως

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \mathbf{k}_0 = \boldsymbol{\delta}_0 ,$$

όπου $\boldsymbol{\delta}_0$ παριστάνει το μοναδιαίο δικάθετο διάνυσμα της τροχιάς.
Συνεπώς, η (10.2) γράφεται

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\gamma} = \frac{\upsilon^2}{R}\upsilon\boldsymbol{\delta}_0 = \frac{\upsilon^3}{R}\boldsymbol{\delta}_0$$

και επομένως

$$|\upsilon \times \gamma| = \frac{\upsilon^3}{R}\,|\delta_0| = \frac{\upsilon^3}{R}\ ,$$

εκ της οποίας έπεται το ζητούμενο, δηλαδή

$$R = \upsilon^3/|\upsilon \times \gamma|\ .$$

7 Σεπ 08 με αλλαγή

Εφαρμογή 1.2: Υλικό σημείο διαγράφει την κυκλική έλικα με αναλυτικές εξισώσεις

$$x = \alpha \cos\omega t\ , \qquad y = \alpha \sin\omega t\ , \qquad z = \lambda\omega t\ ,$$

x=3cos t, y=2+5sin t, z=5

όπου α, ω, λ είναι σταθερές και t ο χρόνος.

Ζητούμε:

α) Το μήκος του τόξου s(t) με αρχή το σημείο της έλικας που αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t = 0.

β) Τις προβολές υ_x, υ_y, υ_z του διανύσματος της ταχύτητας και τις προβολές γ_x, γ_y, γ_z του διανύσματος της επιτάχυνσης στους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, καθώς επίσης και τα μέτρα των παραπάνω διανυσμάτων.

γ) Την επιτρόχιο και κεντρομόλο επιτάχυνση των υλικών σημείων, καθώς επίσης την ακτίνα καμπυλότητος της έλικας, και

δ) Το εφαπτομενικό διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon_0} = d\mathbf{r}/ds$ και το διάνυσμα $\varepsilon_0' = d\varepsilon/ds$.

Λύση: α) Η αρχή της έλικας που διαγράφει το υλικό σημείο προκύπτει από τις δοθείσες αναλυτικές εξισώσεις γιά t = 0, δηλαδή είναι το σημείο

$$(x_0,\ y_0,\ z_0) = (\alpha,\ 0,\ 0)\ .$$

Με εφαρμογή του τύπου (1.7) ευρίσκουμε

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ dt = \int_0^t \sqrt{\alpha^2\omega^2\sin^2\omega t+\alpha^2\omega^2\cos^2\omega t+\lambda^2\omega^2}\ dt =$$

$$= \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\int_0^t dt = \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\ t \qquad (10.3)$$

β) Οι σχέσεις (1.14) παρέχουν

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t\ ,\quad \upsilon_y = \dot{y} = \alpha\omega\cos\omega t\ ,\quad \upsilon_z = \dot{z} = \lambda\omega\ ,$$

ενώ μέσω της εξίσωσης (1.15) υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή

$$\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} = \text{σταθερά}\ . \tag{10.4}$$

Εξ άλλου, από τον τύπο (1.22) ευρίσκουμε

$$\gamma_x = \ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t\ ,\quad \gamma_y = \ddot{y} = \alpha\omega^2\sin\omega t\ ,\quad \gamma_z = \ddot{z} = 0\ ,$$

ενώ η εξίσωση (1.22α) παρέχει το μέτρο της επιτάχυνσης

$$\gamma = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = \sqrt{\alpha^2\omega^4} = \alpha\omega^2 = \text{σταθερά}\ . \tag{10.5}$$

γ) Εφαρμόζουμε τους τύπους (1.20), (1.20α), (10.4) και ευρίσκουμε

$$\gamma_\varepsilon = \dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\,\right] = 0\ , \tag{10.6}$$

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2(\alpha^2+\lambda^2)}{R}\ .$$

Από την άλλη μεριά, από τις (10.6) υπολογίζουμε

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\varepsilon^2+\gamma_\kappa^2} = \frac{\omega^2(\alpha^2+\lambda^2)}{R}\ . \tag{10.7}$$

Εξισώνοντας τώρα τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (10.5) και (10.7) προσδιορίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας της έλικας

$$R = \frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha} = \text{σταθερά}\ .$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα κ προκύπτει

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} = \text{σταθερά}\ . \tag{10.8}$$

δ) Γιά το τελευταίο ερώτημα εφαρμόζουμε κατ΄ αρχήν τον τύπο (1.9), δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\sin\omega t\,\mathbf{j} + \lambda\omega t\,\mathbf{k},$$

ο οποίος, βάσει της (10.3) μετασχηματίζεται στον

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = a\cos\frac{s(t)}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{i} + a\sin\frac{s(t)}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{j} + \lambda\frac{s(t)}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{k} \qquad (10.9)$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{j} + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{k}$$

και επομένως

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = -\frac{a}{a^2+\lambda^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{i} - \frac{a}{a^2+\lambda^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \quad (10.10)$$

με μέτρο:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{ds}\right| = \frac{a}{a^2+\lambda^2}. \qquad (10.11)$$

Εφαρμογή 1.3: Υλικό σημείο διαγράφει την εκθετική (λογαριθμική) έλικα $r = ae^{\theta}$ κατά τον νόμο $\theta = \omega t$, όπου a και ω είναι σταθερές (Σχ. 10.1). Ζητούνται:

α) Το μέτρο της ταχύτητος και ο φορέας της σε σχέση με την πολική ακτίνα ΟΜ·

β) Το μέτρο της επιτάχυνσης και ο φορέας της σε σχέση με την πολική ακτίνα ΟΜ·

γ) Το μέτρο της ακτίνας καμπυλότητας γιά την τυχούσα θέση Μ του κινητού, και

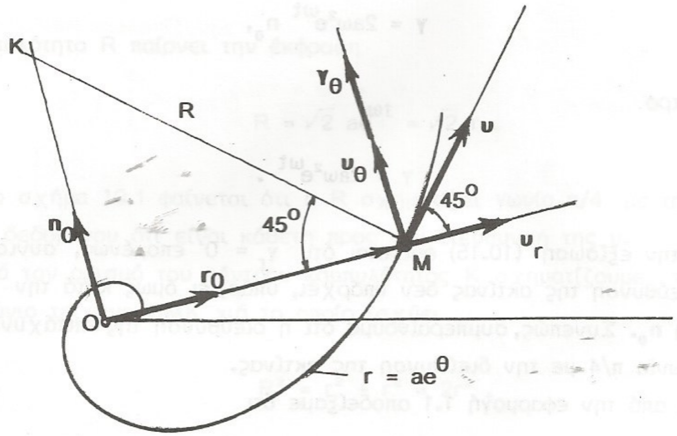
δ) Το αντίστοιχο κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς.

Λύση: α) Σύμφωνα με την παράγραφο 1.4, τον τύπο (1.53) και το σχήμα 10.1 έχουμε

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_r\mathbf{r}_0 + \upsilon_\theta\mathbf{n}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\theta}\mathbf{n}_0 \qquad (10.12)$$

όπου

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = a\omega e^{\omega t}\,, \quad r\dot{\theta} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\,\omega = a\omega e^{\omega t}\,. \tag{10.13}$$



Σχήμα 10.1: Κίνηση υλικού σημείου σε λογαριθμική έλικα.

Συνεπώς, η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ προκύπτει

$$\boldsymbol{\upsilon} = a\omega e^{\omega t}\,\mathbf{r_0} + a\omega e^{\omega t}\,\mathbf{n_0}$$

με μέτρο

$$\upsilon = \sqrt{2(a\omega e^{\omega t})^2} = \sqrt{2}\,a\omega e^{\omega t}\,. \tag{10.14}$$

Αφού τώρα $\upsilon_r = \upsilon_\theta$ ο φορέας της $\boldsymbol{\upsilon}$ με βάση το σχήμα 10.1 φαίνεται ότι σχηματίζει γωνία π/4 με την διεύθυνση της κίνησης.

β) Με βάση πάλι τον τύπο (1.57) εξάγουμε

$$\boldsymbol{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r_0} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{n_0}$$

όπου

$$\ddot{r} = a\omega^2 e^{\omega t}\,, \quad \dot{\theta} = \omega\,, \quad \ddot{\theta} = 0\,.$$

Συνεπώς είναι

$$\gamma_r = a\omega^2 e^{\omega t} - a\omega^2 e^{\omega t} = 0 , \quad \gamma_\theta = 2a\omega^2 e^{\omega t} + 0ae^{\omega t} = 2a\omega^2 e^{\omega t} ,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 2a\omega^2 e^{\omega t}\, \mathbf{n_0}, \tag{10.15}$$

και το μέτρο

$$\gamma = 2a\omega^2 e^{\omega t} . \tag{10.16}$$

Από την εξίσωση (10.15) φαίνεται ότι $\gamma_r = 0$· επομένως, συνιστώσα κατά την διεύθυνση της ακτίνας δεν υπάρχει, υπάρχει όμως κατά την κάθετη διεύθυνση $\mathbf{n_0}$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η διεύθυνση της επιτάχυνσης σχηματίζει γωνία π/4 με την διεύθυνση της ακτίνας.

γ) Ήδη από την εφαρμογή 1.1 αποδείξαμε ότι

$$R = \upsilon^3/|\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\gamma}| .$$

Είναι

$$\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\gamma} = (a\omega e^{\omega t}\mathbf{r_0} + a\omega e^{\omega t}\mathbf{n_0})\times(0\mathbf{r_0} + 2a\omega^2 e^{\omega t}\mathbf{n_0}) = 2a^2\omega^3 e^{2\omega t}(\mathbf{r_0}\times\mathbf{n_0})$$

και

$$\mathbf{r_0}\times\mathbf{n_0} = -\mathbf{z_0} ,$$

όπου $\mathbf{z_0}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο ($\mathbf{r_0}$, $\mathbf{n_0}$). Άρα υπολογίζουμε

$$\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\gamma} = -2a^2\omega^3 e^{2\omega t}\mathbf{z_0}$$

και

$$|\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\gamma}| = -2a^2\omega^3 e^{2\omega t} .$$

Έτσι εξάγουμε

$$R = \frac{\upsilon^3}{2a^2\omega^3}\, e^{-2\omega t}$$

και επειδή

$$\upsilon = \sqrt{2}\, a\omega e^{\omega t}$$

η καμπυλότητα R παίρνει την έκφραση

$$R = \sqrt{2}\, ae^{\omega t} = \sqrt{2}\, r \, . \qquad (10.17)$$

Από το σχήμα 10.1 φαίνεται ότι η R σχηματίζει γωνία π/4 με την διεύθυνση της **r**, δεδομένου ότι είναι κάθετη προς την διεύθυνση της **υ**.

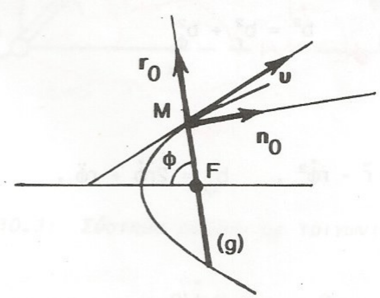
δ) Γιά τον ορισμό του κέντρου καμπυλότητος Κ σχηματίζουμε το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΚ γιά το οποίο ισχύει

$$R^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \, .$$

Συνεπώς, το Κ ευρίσκεται ως τομή των καθέτων επί της πολικής ακτίνας στο Ο και της πρώτης καθέτου της καμπύλης, δηλαδή της καθέτου επί του διανύσματος της ταχύτητας.

Εφαρμογή 1.4: Ράβδος (g) περιστρέφεται περί την εστία F παραβολής με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω όπως φαίνεται στο σχήμα 10.2. Ζητούνται η ταχύτητα και επιτάχυνση της κίνησης του σημείου τομής ράβδου-παραβολής επί της παραβολής. Δίνεται η εξίσωση παραβολής $r = p/(1+\cos\phi)$.

Λύση: Ορίζουμε κατ' αρχήν το πολικό σύστημα $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{n_0}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 10.2. Σύμφωνα με τον τύπο (1.53) έχουμε



Σχήμα 10.2: Κίνηση του σημείου τομής της ευθείας (g) και της παραβολής με εστία F.

$$\upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\phi^2$$

όπου

$$\upsilon_r = \dot{r}\ , \qquad \upsilon_\phi = r\dot{\phi} = r\omega\ .$$

Συνεπώς

$$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2\ . \tag{10.18}$$

Αλλά εξ υποθέσεως

$$r = \frac{p}{1+\cos\phi}$$

και επομένως, επειδή η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερά, με βάση την (10.19) έπεται

$$\dot{r} = \frac{p\dot{\phi}\sin\phi}{(1+\cos\phi)^2} = \frac{p\,\omega\sin\phi}{(1+\cos\phi)^2} = \frac{p\omega\sin(\phi/2)}{2\cos^3(\phi/2)} = \frac{(1+\cos\phi)r\omega\sin(\phi/2)}{2\cos^3(\phi/2)} = r\omega\tan\frac{\phi}{2}\ .$$

Έτσι, το μέτρο υ της ταχύτητος υπολογίζεται από τον τύπο

$$\upsilon^2 = \omega^2 r^2\left(1+\tan^2\frac{\phi}{2}\right) \rightarrow \upsilon = \frac{r\omega}{\cos(\phi/2)} = \frac{p\omega}{2\cos^3(\phi/2)}\ . \tag{10.19}$$

Από την άλλη μεριά, με βάση την σχέση (1.57) έχουμε

$$b^2 = b_r^2 + b_\phi^2$$

όπου

$$b_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2\ , \qquad b_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\ .$$

Είναι

$$\ddot{\phi} = 0\ , \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(r\omega\tan\frac{\phi}{2}\right) = \omega\dot{r}\tan\frac{\phi}{2} + \omega r\frac{\dot{\phi}/2}{\cos^2(\phi/2)} = \omega\dot{r}\tan\frac{\phi}{2} + \frac{\omega^2 r}{2\cos^2(\phi/2)} =$$

$$= \omega^2 r \tan^2\frac{\phi}{2} + \omega^2 r \frac{1}{2\cos^2(\phi/2)}$$

και επομένως υπολογίζουμε

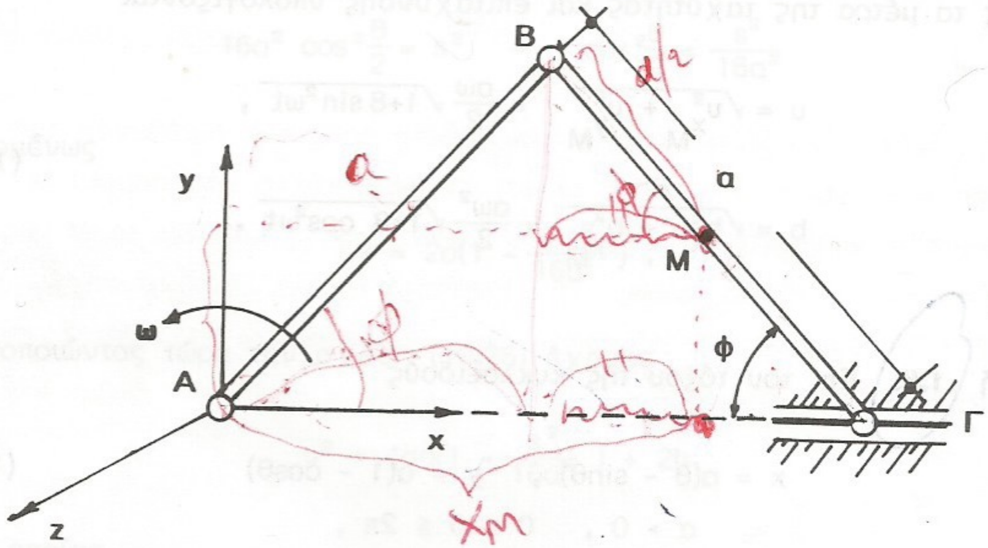
$$b^2 = \left[\omega^2 r(\tan^2\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2\cos^2(\phi/2)}) - \omega^2 r\right]^2 + (2\omega^2 r\tan\frac{\phi}{2})^2 =$$

$$= \left[\frac{\omega^2 r}{2}(3\tan^2\frac{\phi}{2} - 1)\right]^2 + 4\omega^4 r^2 \tan^2\frac{\phi}{2} = \frac{p\,\omega^2}{(1+\cos\phi)^2}\sqrt{5 - 4\cos\phi} \,. \quad (10.20)$$

2007

Εφαρμογή 1.5: Δύο ράβδοι ΑΒ και ΒΓ ίσων μηκών συνδέονται δι΄ αρθρώσεως στο Β. Η ΑΒ περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα διά του άκρου της Α με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ενώ το άκρο Γ της ΒΓ κινείται ευθύγραμμα (Σχ. 10.3). Ζητούνται η τροχιά, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του μέσου Μ της ΒΓ.

Λύση: Ορίζουμε το σύστημα συντεταγμένων Αxyz όπως φαίνεται στο σχήμα 10.3. Η γωνιακή ταχύτητα ω με μέτρο ω σταθερό έχει κατεύθυνση τον άξονα z. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ είναι



Σχήμα 10.3: Σύστημα ράβδων σε τριγωνικό σχηματισμό.

$$x_M = \alpha\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\cos\phi = \frac{3}{2}\alpha\cos\phi\,, \qquad (10.21)$$

$$y_M = \frac{\alpha}{2}\sin\phi\,.$$

Απαλείφοντας την γωνία ϕ από τις (10.21) καταλήγουμε στην

$$\frac{x_M^2}{\frac{3\alpha^2}{4}} + \frac{y_M^2}{\frac{\alpha^2}{4}} = 1 \,, \tag{10.22}$$

που παριστάνει έλλειψη. Συνεπώς η τροχιά του μέσου της ράβδου ΒΓ είναι ελλειπτική.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας και επιτάχυνσης του Μ, δεδομένου ότι

$$\phi = \omega t \,,$$

προκύπτουν

$$\upsilon_{x_M} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2}\alpha\omega \sin\omega t \,, \qquad \upsilon_{y_M} = \dot{y}_M = \frac{\alpha\omega}{2}\cos\omega t \,,$$

$$b_{x_M} = \ddot{x}_M = -\frac{3}{2}\alpha\omega^2 \cos\omega t \,, \qquad b_{y_M} = \ddot{y}_M = -\frac{\alpha\omega^2}{2}\sin\omega t \,.$$

Επομένως τα μέτρα της ταχύτητας και επιτάχυνσης υπολογίζονται

$$\begin{aligned} \upsilon &= \sqrt{\upsilon_{x_M}^2 + \upsilon_{y_M}^2} = \frac{\alpha\omega}{2}\sqrt{1+8\sin^2\omega t} \,, \\ b &= \sqrt{b_{x_M}^2 + b_{y_M}^2} = \frac{\alpha\omega^2}{2}\sqrt{1+8\cos^2\omega t} \,. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Εφαρμογή 1.6: Επί του τόξου της κυκλοειδούς

$$x = \alpha(\theta - \sin\theta) \,, \quad y = \alpha(1 - \cos\theta) \tag{10.24}$$

$$\alpha > 0 \,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \,,$$

κινείται υλικό σημείο ούτως ώστε

$$\upsilon^2 = 2(gy + h) \,, \quad g, h = \text{σταθερές} \,. \tag{10.25}$$

Ζητούνται το είδος της κίνησης του σημείου και το διανυόμενο διάστημα από το σημείο συναρτήσει του χρόνου. Δίνεται ότι γιά $t = 0$ είναι $\upsilon = \upsilon_0 = 0$.

Λύση: Από τις εξισώσεις (10.24) παίρνουμε

$$dx = \alpha(1 - \cos\theta)d\theta \ , \qquad dy = \alpha \sin\theta \ d\theta \ . \tag{10.26}$$

Συνεπώς

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [\ \alpha^2(1-\cos\theta)^2 + \alpha^2\sin^2\theta]\ d\theta^2 = 4\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta^2$$

$(\alpha^2 + \alpha^2\cos^2\theta - 2\alpha^2\cos\theta + \alpha^2\sin^2\theta)$ $= \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2\cos\theta$ $= 2\alpha^2 - 2\alpha^2\cos\theta = 2\alpha^2(1-\cos\theta)$ $1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

και

$$s = 2\alpha\int_0^\theta \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = -\ 4\alpha\ \cos\frac{\theta}{2}\,. \tag{10.27}$$

Με βάση τον ισχύοντα τύπο (10.25) πρέπει να εκφράσουμε την y συναρτήσει του s. Από την δεύτερη των εξισώσεων (10.24) παίρνουμε

$$y = \alpha(1-\cos\theta) = \alpha(1-2\cos^2\frac{\theta}{2}+1) = 2\alpha(1-\cos^2\frac{\theta}{2})\ .$$

Αλλά, μέσω της (10.27), υπολογίζουμε

$$16\alpha^2\ \cos^2\frac{\theta}{2} = s^2 \quad \rightarrow \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{s^2}{16\alpha^2}$$

και επομένως

$$y = 2\alpha(1 - \frac{s^2}{16\alpha^2})\ . \tag{10.28}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση (10.25) έχουμε

$$\upsilon^2 = 4\alpha g(1 - \frac{s^2}{16\alpha^2}) + 2h$$

εκ της οποίας

$$\upsilon\dot{\upsilon} = -\alpha g\,\frac{s\dot{s}}{4\alpha^2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $\upsilon = \dot{s}$, $\dot{\upsilon} = \ddot{s}$ και αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση ευρίσκουμε

$$\dot{s}\ddot{s} = -g\frac{s\dot{s}}{4a} ,$$

η οποία γιά $\dot{s} \neq 0$ παίρνει την μορφή

$$\ddot{s} + \frac{g}{4a}s = 0 , \qquad (10.29)$$

που είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Ως γνωστόν, η γενική λύση της (10.29) είναι

$$s = C_1\cos\overset{\omega}{k}t + C_2\sin kt , \quad \overset{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{4a}} \qquad (10.30)$$

με παράγωγο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} = 2\pi\cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = \boxed{T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

$$\dot{s} = \upsilon = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt . \qquad (10.31)$$

Παίρνοντας τις αρχικές συνθήκες γιά $t = 0$, $\dot{s}_0 = \upsilon_0 = 0$, $s = s_0$, υπολογίζουμε το διάστημα s από τον τύπο

$$s = s_0 \cos kt . \qquad (10.32)$$

Εφαρμογή 1.7: Μία ράβδος (α) κινείται κάθετα προς την διεύθυνση της με ομοιόμορφη ταχύτητα c. Η ράβδος τέμνει σταθερό κύκλο στο σημείο Μ (Σχ. 10.4). Με ποία ταχύτητα υ και με ποία επιτάχυνση γ κινείται το Μ ως σημείο του κύκλου; Επίσης, βρείτε την ταχύτητα υ_1 και επιτάχυνση γ_1 του Μ ως σημείου της ευθείας (α). Εννοείται ότι των παραπάνω ταχυτήτων και επιταχύνσεων ζητούνται τα μέτρα.

Λυση: Το Μ ως σημείο του κύκλου έχει ταχύτητα $\upsilon = \omega \cdot r \Rightarrow \frac{c}{\sin\phi} = \frac{d\phi}{dt}$

$$\upsilon = \frac{c}{\sin\phi} = \frac{r\,d\phi}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\upsilon}{r} = \frac{c}{(r\sin\phi)} = \omega ,$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{c}{r\sin\phi}$, $\omega =$

όπου ω παριστάνει την γωνιακή ταχύτητα του Μ προς το κέντρο του κύκλου Ο. Συνεπώς, το Μ πάνω στον κύκλο έχει εφαπτομενική επιτάχυνση

$$\gamma_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sin\phi}\right) = -\frac{c^2\cos\phi}{(r\sin^3\phi)}$$

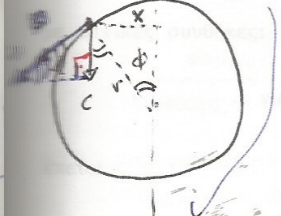
$\gamma = \sqrt{\gamma_\varepsilon^2 + \gamma_\kappa^2}$

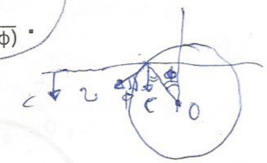
$= - \boxed{\frac{c\,\cos\phi}{\sin^2\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt}}$, $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r\sin\phi}$, $= - \frac{c^2\cos\phi}{r\sin^3\phi}$

και κεντρομόλο επιτάχυνση

$$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{c^2}{(r\sin^2\phi)} .$$

Αυτό

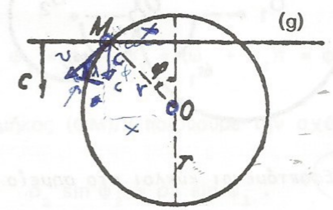




$\sin\phi = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow$

$\boxed{\upsilon = \frac{c}{\sin\phi}} \Rightarrow \upsilon = \dots$

$\frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r\sin\phi} \Rightarrow \phi(t) = \dots$



$\sin\phi = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{c}{\sin\phi}}$

$\upsilon = \omega \cdot r \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{d\phi}{dt} \cdot r}$

$\frac{c}{\sin\phi} = \frac{d\phi}{dt} \cdot r \Rightarrow$

$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r\sin\phi}}$

Σχήμα 10.4: Κίνησης ευθείας σχετικά με κύκλο.

Το μέτρο λοιπόν της συνολικής επιτάχυνσης του Μ, θεωρούμενου ως σημείου του κύκλου, είναι:

$$\gamma = (\gamma_\varepsilon^2 + \gamma_K^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^2}{(r\sin^3\phi)} , \quad \gamma_\varepsilon/\gamma_K = -\cot\phi .$$

$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{\frac{c^2}{\sin^2\phi}}{\frac{r}{1}} \Rightarrow \boxed{\gamma_K = \frac{c^2}{r\sin^2\phi}}$

Το Μ τώρα, κινούμενο πάνω στην ευθεία (α), έχει προβολές διαστήματος, ταχύτητας και επιτάχυνσης τις εξής:

$\sin\phi = \frac{x}{r} \Rightarrow$

$$x = r\sin\phi , \quad \upsilon_1 = \boxed{\dot{x} = r\cos\phi\,\dot{\phi}} = c\cot\phi , \quad \gamma_1 = \boxed{\ddot{x} = r\cos\phi\,\ddot{\phi} - r\sin\phi\,\dot{\phi}^2 =}$$

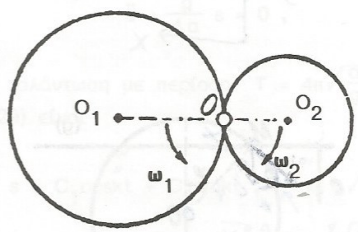
$\dot{\phi} = \frac{c}{r\sin\phi}$

$$= -\frac{c^2}{(r\sin^3\phi)} = -\gamma .$$

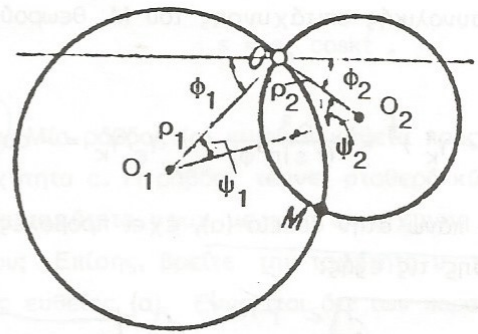
Εφαρμογή 1.8: Δύο κύκλοι ακτίνων ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα εφάπτονται στο σημείο Ο και περιστρέφονται περί αυτό με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2, που είναι ομοιόμορφες. Με ποιές ταχύτητες υ_1 και υ_2 κινείται το Ο την μιά φορά ως σημείο του πρώτου κύκλου και την άλλη ως σημείο του δεύτερου κύκλου (Σχ. 10.5).

Λύση: Στην τυχούσα θέση (Σχ. 10.6) οι ταχύτητες του Ο είναι:

$$\upsilon_1 = \rho_1\dot{\psi}_1 , \quad \upsilon_2 = \rho_2\dot{\psi}_2 . \tag{10.33}$$



Σχήμα 10.5: Εφαπτόμενοι κύκλοι στο σημείο Ο σε κίνηση.



Σχήμα 10.6: Τυχούσα θέση του σημείου Ο σε δεδομένη χρονική στιγμή.

Είναι όμως

$$\psi_1 + \psi_2 = 180° - \alpha = 180° - [180° - (\phi_1 + \phi_2)] = \phi_1 + \phi_2 . \tag{10.34}$$

Επειδή ω_1, ω_2 είναι σταθερές, από τις σχέσεις

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 , \qquad \dot{\phi}_2 = \omega_2 \tag{10.35}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\text{γιά } t = 0 \qquad \phi_1 = 0 , \quad \phi_2 = 0 ,$$

έπεται

$$\psi_1 + \psi_2 = \phi_1 + \phi_2 = (\omega_1 + \omega_2)t = \phi . \tag{10.36}$$

Εξ άλλου, από το κοινό μήκος (ΟΜ)/2 παίρνουμε την σχέση:

$$\rho_2 \sin\psi_2 = \rho_1 \sin\psi_1 . \tag{10.37}$$

$\Rightarrow \overbrace{\rho_2 \cos\psi_2 \dot{\psi}_2}^{\upsilon_2} = \overbrace{\rho_1 \cos\psi_1 \dot{\psi}_1}^{\upsilon_1}$

Γιά τον προσδιορισμό των υ_1 και υ_2 έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:
Από τις (10.33) σε συνδυασμό με τις (10.36)

$$(\upsilon_1/\rho_1) + (\upsilon_2/\rho_2) = (\omega_1 + \omega_2) . \tag{10.38}$$

ενώ από την παραγώγιση προς t της σχέσης (10.37) και λαμβάνοντας υπόψη τις (10.33)

$$(\upsilon_2/\upsilon_1) = (\cos\psi_1/\cos\psi_2) . \tag{10.39}$$

Η λύση του συστήματος (10.38) και (10.39) καταλήγει:

$$\upsilon_1 = \frac{\rho_1\rho_2(\omega_1 + \omega_2)\cos\psi_2}{\rho_1\cos\psi_1 + \rho_2\cos\psi_2} , \quad \upsilon_2 = \frac{\rho_1\rho_2(\omega_1 + \omega_2)\cos\psi_1}{\rho_1\cos\psi_1 + \rho_2\cos\psi_2} . \tag{10.40}$$

Πρέπει βέβαια τώρα να βρούμε τις εκφράσεις των $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$ συναρτήσει των $\phi_1 + \phi_2$, ρ_1, ρ_2. Τούτο επιτυγχάνεται μέσω των εξισώσεων:

$$\begin{gathered} \rho_2 \sin\psi_2 = \rho_1 \sin\psi_1 \\ \cos(\psi_1 + \psi_2) = \cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos\phi . \end{gathered} \tag{10.41}$$

Πράγματι, αναπτύσσοντας τα συνημίτονα από την δεύτερη των (10.41) και αντικαθιστώντας τα $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$ συναρτήσει των ημιτόνων καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$\sin\psi_1 = \frac{\rho_1 \sin\phi}{(\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\phi)^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad \sin\psi_2 = \frac{\rho_1 \sin\phi}{(\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\phi)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

τις οποίες, μαζί με τις αντίστοιχες των $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$, εισάγοντας στις (10.40) και μετά την εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων ευρίσκουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{\rho_1\rho_2(\omega_1+\omega_2)(\rho_1+\rho_2\cos\phi)}{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\phi}\,,$$

$$\upsilon_2 = \frac{\rho_1\rho_2(\omega_1+\omega_2)(\rho_1+\rho_2\cos\phi)}{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos\phi}\,. \tag{10.42}$$