Ζητήματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων -Μέρος 2

25 Μαρτίου 2022

1 Συνάρτηση G

$G(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} x^a e^{-x}dx + \frac{1}{a}[\frac{x^a}{e^x}]_0^{\infty} = \frac{1}{a}G(a+1)$.

Επομένως
$$G(a+1) = aG(a),\ a > 0,$$
αρκεί να δείξουμε ότι
$$[\frac{x^a}{e^x}]_0^{\infty} = 0.$$
Παρατηρούμε ότι $x^a = e^{alogx}, x > 0$
Άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\cdot logx}}{e^x} = 0$, γιατί $\lim_{x\to 0^+} logx = -\infty$.
Έχουμε επίσης
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{a-[a]+1}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1+\delta}}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\delta}}{e^x} = 0,$$
η σωστή μορφή του ορίου. $a = [a] + \delta, \delta \in (0,1)$ όπου a είναι το ακέραιο μέρος του a.
Επίσης, $G(1) = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$.

2 Συνάρτηση που σχετίζεται με την κανονική κατανομή

Μια 'σωστή' μορφή υπολογισμού του ολοκληρώματος....
$$\int_0^{+\infty} e^{-r2}dr = [re^{-r^2}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} re^{-r^2}(-2r)dr =$$
$$0 + 2\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2}dr.$$

Θέτοντας $t = r^2$, έχουμε ότι $dt = 2rdr$, άρα

$$2\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} te^{-t} dt = G(2) = 2G(1) = 2.$$