Ζητήματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων -Μέρος 2

24 Μαρτίου 2022

1 Συνάρτηση G

$G(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} x^a e^{-x}dx + \frac{1}{a}[\frac{x^a}{e^x}]_0^{\infty} = \frac{1}{a}G(a+1)$.

Επομένως

$$G(a+1) = aG(a),\, a > 0,$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$[\frac{x^a}{e^x}]_0^{\infty} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $x^a = e^{alogx}, x > 0$
Άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\cdot logx}}{e^x} = 0$, γιατί $\lim_{x\to 0^+} logx = -\infty$.
Έχουμε επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{a-[a]+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1+\delta}}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\delta-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}}\frac{1}{e^x} = 0.$$

$a = [a] + \delta, \delta \in (0, 1)$ όπου a είναι το ακέραιο μέρος του a.
Επίσης, $G(1) = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$.