Παρατηρήσεις

9 Απριλίου 2022

1 Παράδειγμα σύγκλισης σειράς συναρτήσεων

Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to R$ όπου $f_n = \frac{x^n}{x+1}$. Τότε

$$s_n(x) = x(x+1)\frac{1-x^n}{1-x} \to f(x) = x(x+1)\frac{1}{1-x},$$

κατά σημείο. Για να εξετάσουμε αν αυτή η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, βρίσκουμε το n -στό όρο της ακολουθίας

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |s_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} (x(x+1)\frac{1}{1-x}(1-x^n)).$$

και αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει. Στην περίπτωσή μας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ δε συγκλίνει- γιατί ;

2 Λεπτομερής αναφοαρά στο Κριτήριο του Riemann στην περίπτωση αιρόμενης ασυνέχειας

Έστω η συνάρτηση $f(x) : [0,1] \to R$ όπου $f(x) = 0, x \neq x_0$ και $f(x_0) = t > 0$, $x_0 \in (0,1)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Είτε κάποια διαμέριση P_1 του $[0,1]$ που πειρέχει το x_0 είτε μια διαμέριση P_2 που δεν περιέχει το x_0. Στην περίπτωση P_2 ισχύει ότι

$$U(f,P_2) - L(f,P_2) = 0 < \epsilon.$$

Στην περίπτωση P_1 ισχύει ότι

$$L(f,P_2) = 0$$

και

$$U(f,P_2) = \sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1}) = 1 - 0 = 1,$$

αν η διαμέριση P_2 είναι η

$$P_2 = \{t_0 = 1, ..., x_0, ...t_k = 1\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε διαμέριση P που περιέχει το x_0 σε κάποιο από τα διαστήματα $(t_i, t_{i+1}), i = 0, ..., k-1$ και το μήκος του διαστήματος είναι h. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) = 0, x \neq x_0, f(x_0) = t > 0$. Τότε λαμβάνουμε ότι

$$U(f, P) = t \cdot h = \epsilon/2,\ L(f, P) = 0.$$

Επομένως η f είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη.