

Κεφάλαιο 3: Μετοχές και Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου

3.1 Η Αξία (Τιμή) της μετοχής

Η αξία της μετοχής μπορεί να αποτιμηθεί και να εκφρασθεί με διαφορετικούς τρόπους. Είναι φανερό, ότι αποτιμώντας τη μετοχή μιας επιχείρησης, αποτιμάται ταυτόχρονα και ολόκληρη η επιχείρηση.

3.1.1 Ονομαστική αξία

Ορισμός: Η ονομαστική αξία είναι η αξία της μετοχής που καθορίζεται κατά την αρχική της εμφάνιση, δηλαδή είτε κατά την ίδρυση της επιχείρησης είτε κατά την αύξηση του μετοχικού κεφαλαίου και διάθεση των μετοχών με ιδιωτική τοποθέτηση ή με δημόσια εγγραφή.

Η ονομαστική αξία:

- είναι σταθερή και μπορεί να μεταβληθεί μόνο με απόφαση της γενικής συνέλευσης της επιχείρησης
- διαμορφώνεται από τη διάιρεση του μετοχικού κεφαλαίου με τον αριθμό των μετοχών
- δεν δίνει την πραγματική εικόνα της επιχείρησης, αφού στον υπολογισμό της δεν λαμβάνεται υπόψη το σύνολο των ιδίων κεφαλαίων, η δυναμική της ή η πορεία της στην αγορά.

3.1.2 Λογιστική αξία

Ορισμός: Η λογιστική αξία είναι η αξία (τιμή) που προκύπτει από τη διαίρεση των ιδίων κεφαλαίων της επιχείρησης με τον αριθμό των μετοχών.

Πολλοί υποστηρίζουν ότι η τιμή της μετοχής δεν μπορεί να είναι χαμηλότερη από τη λογιστική τιμή.

3.1.3 Αξία ρευστοποίησης ή Εσωτερική αξία

Ορισμός: Η αξία ρευστοποίησης είναι η τιμή της μετοχής που προκύπτει εάν η επιχείρηση πουληθεί και αφού αποπληρώσει τις υποχρεώσεις της το υπόλοιπο (εσωτερική αξία) διαιρείται με τον αριθμό των μετοχών της επιχείρησης.

Γενικά, η εσωτερική αξία προκύπτει εάν από το σύνολο του ενεργητικού της αφαιρεθούν τα ξένα κεφάλαια (υποχρεώσεις), αφού προηγουμένως όλα τα μεγέθη (ενεργητικό, υποχρεώσεις, καθαρή θέση) αποτιμηθούν και τιμολογηθούν αξιόπιστα στην πραγματική τους τιμή.

3.1.4 Χρηματιστηριακή αξία

Ορισμός: Η χρηματιστηριακή αξία της μετοχής είναι η αξία της μετοχής που διαμορφώνεται κατά τη διαπραγμάτευσή της σε χρηματιστηριακή αγορά. Προκύπτει από την καθημερινή αποτίμηση της μετοχής στην αγορά με βάση την προσφορά και τη ζήτηση, μετά από εκτίμηση και προεξόφληση πολλών στοιχείων υφιστάμενων ή προσδοκώμενων σε κάθε συγκεκριμένη συγκυρία και χρονική στιγμή.

3.2 Υπολογισμός της Τιμής της μετοχής

3.2.1 Μερισματική πολιτική και αξία μετοχής

Η μερισματική πολιτική σχετίζεται με τις αποφάσεις που λαμβάνονται στην επιχείρηση για το ύψος ή την αναλογία των κερδών που θα διανεμηθούν στους μετόχους καθώς και με τις διαδικασίες που ακολουθούνται για τη διανομή των κερδών με τη μορφή μερίσματος.

Η επιχείρηση που εμφανίζει στο τέλος της χρήσης κέρδη έχει τη δυνατότητα, αφού αυτά φορολογηθούν και παρακρατηθούν τα υποχρεωτικά αποθεματικά, να διανείμει κάποια από αυτά τα κέρδη στους μετόχους ή να μεταφέρει το σύνολο των κερδών με τη μορφή πρόσθετων αποθεματικών στα ίδια κεφάλαια αυξάνοντας ισόποσα. Τα αποθεματικά στη συνέχεια μετατρέπονται σε μετοχικό κεφάλαιο, αυξάνοντας ανάλογα το υφιστάμενο μετοχικό κεφάλαιο της επιχείρησης.

Η επιχείρηση αποφασίζει να παρακρατήσει υψηλό ποσοστό από τα κέρδη της, εφόσον προγραμματίζει να τα επανεπενδύσει στοχεύοντας στην επέκταση των εργασιών της και στην ανάπτυξή της. Με δεδομένα τα κέρδη, η παρακράτηση υψηλού ποσοστού οδηγεί σε διανομή χαμηλότερου μερίσματος, δηλαδή ουσιαστικά οδηγεί σε χαμηλότερη απόδοση των επενδεδυμένων κεφαλαίων.

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η **χαμηλότερη απόδοση επηρεάζει αρνητικά την τιμή της μετοχής της επιχείρησης. Όμως, η επανεπένδυση των παρακρατηθέντων κερδών αναμένεται να οδηγήσει σε**

ανάπτυξη της επιχείρησης, διαμορφώνοντας έτσι θετικές προσδοκίες για διανομή υψηλότερων κερδών στο μέλλον. Οι προσδοκίες αυτές έχουν θετικές επιπτώσεις στην τιμή της μετοχής της επιχείρησης.

3.2.2 Διανομή μερίσματος και αποτίμηση μετοχής

3.2.2.1 Αποτίμηση της μετοχής με σταθερό μέρισμα

Η γενική μορφή προσδιορισμού της τρέχουσας αξίας ή τιμής μιας τοποθέτησης ή μιας επένδυσης που διαρκεί η περιόδους και τα έσοδα (ροές) σε κάθε περίοδο διατηρούνται σταθερά είναι:

$$P_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n} \quad (1)$$

όπου:

P_0 = τρέχουσα τιμή της τοποθέτησης (π.χ. μετοχής)

k = απόδοση (required return)

D_t = μέρισμα (σταθερό)

n = περίοδοι τοποθέτησης (καταβολής των ροών)

P_n = τρέχουσα τιμή πώλησης

Εάν η τοποθέτηση αφορά μετοχές, δεδομένου ότι η μετοχή είναι αόριστης διάρκειας, η απόδοσή της (ροές) προκύπτει από το καταβαλλόμενο μέρισμα. Υποθέτοντας ότι δεν αναμένεται αύξηση του μερίσματος, αλλά καταβάλλεται επ'αόριστον ένα σταθερό μέρισμα, ο τύπος της τιμής είναι:

$$P_0 = \frac{D_0}{(1+k)} + \frac{D_0}{(1+k)^2} + \dots + \frac{D_0}{(1+k)^\infty} \quad (2)$$

ή

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_0}{(1+k)^t} \quad (3)$$

Η λογική της προσέγγισης αυτής βασίζεται στο γεγονός ότι η επιχείρηση καταβάλλει διαρκώς μέρισμα, ασχέτως της μεταπώλησης της μετοχής από τον έναν επενδυτή στον άλλο σε υψηλότερη ή χαμηλότερη τιμή, και επομένως τα μερίσματα μπορεί να αποτελέσουν τη βάση για τον υπολογισμό της τιμής της μετοχής και της ίδιας της επιχείρησης:

$$P_0 = \frac{D}{k} \quad (4)$$

Η τιμολόγηση αυτή είναι κατάλληλη για αποτίμηση κυρίως των προνομιούχων μετοχών, οι οποίες σε κάθε περίπτωση λαμβάνουν μέρισμα.

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι όταν η τιμή της μετοχής υπολογίζεται όχι με βάση την προεξοφλημένη αξία των μερισμάτων, αλλά με βάση την προεξοφλημένη αξία του συνόλου των λογιστικών κερδών. Δηλαδή:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+k)^t} \quad (5)$$

και

$$P_0 = \frac{E}{k} \quad (6)$$

όπου E τα λογιστικά κέρδη ανά μετοχή.

3.2.2.2 Αποτίμηση της μετοχής με αυξανόμενο μέρισμα

Εάν υποθέσουμε ότι τα μερίσματα (απόδοση) αυξάνονται με ένα σταθερό ρυθμό G σε σχέση με το αρχικό μέρισμα ή με το μέρισμα αναφοράς, ο σχετικός τύπος είναι:

$$P_0 = \frac{D_0(1+G)}{(1+k)} + \frac{D_0(1+G)^2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{D_0(1+G)^{\infty}}{(1+k)^{\infty}} \quad (7)$$

Λύνοντας, και εφόσον το k είναι μεγαλύτερο του G, έχουμε:

$$P_0 = \frac{D_1}{k-G} \quad (8)$$

ή

$$k = \frac{D_1}{P_0} + G \quad (9)$$

Παράδειγμα: Υποθέτοντας ότι το μέρισμα ανά μετοχή στη χρήση 1 ήταν €0,5, ότι έχει εκτιμηθεί σταθερή άνοδος για τις επόμενες χρήσεις, η οποία αναμένεται να ανέλθει σε 9% ανά χρήση και ότι η απαιτούμενη απόδοση ανέρχεται σε 14%, η τιμή της μετοχής θα είναι:

$$P_0 = \frac{0,5}{0,14 - 0,09} = €10.$$

3.2.3 Δείκτες αξιολόγησης της τιμής της μετοχής

Τιμή μετοχής βάσει:

1. Δείκτης τιμής προς κέρδη (P/E Ratio): Ο δείκτης αυτός απεικονίζει την τρέχουσα τιμή της μετοχής προς τα διανεμηθέντα κέρδη. Δηλαδή, ο δείκτης αυτός εκφράζει το ποσό που καταβάλλεται στην αγορά για την απόκτηση της μετοχής για κάθε μονάδα νομίσματος κέρδους της επιχείρησης.

Ο δείκτης αυτός μπορεί να συγκριθεί με τον αντίστοιχο μέσο δείκτη του κλάδου στον οποίο δραστηριοποιείται η επιχείρηση:

$$\text{Σχετικό P/E} = (P/E \text{ Επιχείρησης}) / (P/E \text{ Κλάδου})$$

Ο δείκτης P/E μπορεί να σχετίζεται και με τη διαφορά της αναμενόμενης απόδοσης από τη σταθερή αύξηση του μερίσματος και παράλληλα από το ποσοστό των κερδών που διανέμονται.

Άρα, οι επιχειρήσεις που εμφανίζουν κέρδη αλλά διανέμουν μικρό ποσοστό αυτών, για παράδειγμα, βρίσκονται στο στάδιο της ανάπτυξης ή θέτουν υψηλούς στόχους ανάπτυξης και επομένως χρειάζονται όλα τα διαθέσιμα κεφάλαια, θα έχουν χαμηλό δείκτη P/E. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι εφόσον επιτευχθούν οι στόχοι ανάπτυξης, οι αποδόσεις στο μέλλον θα είναι αυξημένες.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ο δείκτης P/E δεν προσφέρεται πάντα ή από μόνος του για ασφαλή συμπεράσματα.

2. Δείκτης τιμής προς πωλήσεις (P/S): Επειδή υπάρχει αβεβαιότητα και πολλές φορές εμφανίζονται μεγάλες διακυμάνσεις τόσο στα κέρδη της επιχείρησης όσο και στο διανεμόμενο μέρισμα, για την αξιολόγηση της μετοχής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο δείκτης P/S:

$$P/S = \text{Τιμή μετοχής} / \text{Πωλήσεις ανά μετοχή}$$

3. Δείκτης λογιστικής αξίας (ΔΛΑ):

$$\Delta\Lambda A = \text{Τρέχουσα τιμή μετοχής} / \text{Λογιστική τιμή μετοχής}$$

4. Μερισματική απόδοση (ΜΑ):

$$MA = (\text{Τελευταίο μέρισμα μετοχής} / \text{Τρέχουσα τιμή μετοχής}) * 100$$

Παράδειγμα: Εάν το τελευταίο μέρισμα ανέρχεται σε €0,5 και η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €20, η μερισματική απόδοση διαμορφώνεται σε:

$$MA = \frac{0,5}{20} * 100 = 2,5\%.$$

5. Συνολική απόδοση (ΣΑ):

$$\Sigma A = \left(\frac{\text{Μέρισμα} + \text{Τιμή1}}{\text{Τιμή2}} - 1 \right) * 100$$

όπου:

Τιμή1 = Τιμή πώλησης ή τέλους περιόδου

Τιμή2 = Τιμή αγοράς ή έναρξης περιόδου

Ή διαφορετικά:

$$\Sigma A = \left(\frac{\text{Μέρισμα} + (\text{Τιμή πώλησης} - \text{Τιμή αγοράς})}{\text{Τιμή αγοράς}} \right) * 100$$

Παράδειγμα: Η τιμή αγοράς ή έναρξης περιόδου είναι €20, η τιμή πώλησης ή τιμή τέλους περιόδου είναι €22 και το μέρισμα είναι €0,4.

Βάσει την πρώτη προσέγγιση:

$$\Sigma A = \left(\frac{\text{Μέρισμα} + \text{Τιμή1}}{\text{Τιμή2}} - 1 \right) * 100 = \left(\frac{0,4 + 22}{20} - 1 \right) * 100 = 12\%$$

Βάσει τη δεύτερη προσέγγιση:

$$\begin{aligned} \Sigma A &= \left(\frac{\text{Μέρισμα} + (\text{Τιμή πώλησης} - \text{Τιμή αγοράς})}{\text{Τιμή αγοράς}} \right) * 100 \\ &= \left(\frac{0,4 + (22 - 20)}{20} \right) * 100 = 12\%. \end{aligned}$$

3.2.4 Μετοχές και θεωρία Χαρτοφυλακίου

3.2.4.1 Ο κίνδυνος Χαρτοφυλακίου

Ο κίνδυνος της επένδυσης (τοποθέτησης) εκφράζεται με τη μεταβλητότητα των μελλοντικών εισροών, αποδόσεων ή τιμών μιας επένδυσης. Όσο πιο μεγάλος ο αριθμός των αναμενόμενων αποδόσεων (εισροών) ή τιμών, τόσο πιο υψηλός είναι ο κίνδυνος. Η μέτρηση του κινδύνου βασίζεται στη διασπορά των πιθανών τιμών γύρω από την αναμενόμενη τιμή (expected value), της επένδυσης, της τοποθέτησης, του τίτλου ή της εισροής. Προσδιορίζεται έτσι το μέτρο αβεβαιότητας ή μεταβλητότητας (volatility) της αναμενόμενης τιμής ή αξίας μιας επένδυσης.

Βασική μέθοδος της μέτρησης της διασποράς ή μεταβλητότητας είναι η **τυπική απόκλιση (standard deviation)**, η οποία προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα της **διακύμανσης (variance)** και η οποία στην περίπτωση της απόδοσης υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Διακύμανση (Variance)} = \sigma_R^2 = \sum_{R=1}^n p_i [R_i - E(R)]^2$$

όπου:

σ^2 = διακύμανση

R_i = πραγματοποιηθείσα απόδοση

$E(R)$ = αναμενόμενη απόδοση

p_i = πιθανότητα εμφάνισης της τιμής (απόδοσης) i

$$\text{Τυπική απόκλιση (Standard deviation)} = \sigma_R = \sqrt{(\sigma_R^2)}$$

$$\text{Αναμενόμενη απόδοση (Expected Return)} = \mu = \sum_{R=1}^n p_i * R_i$$

Αν θεωρήσουμε ότι η επένδυση αφορά χαρτοφυλάκιο μετοχών, ο επενδυτής που διατηρεί περισσότερες από μια μετοχές δεν ενδιαφέρεται τόσο για τον κίνδυνο της κάθε μίας μετοχής, όσο για τον κίνδυνο του συνόλου των μετοχών που διατηρεί, δηλαδή για τον **κίνδυνο του χαρτοφυλακίου** του. Ο κίνδυνος και η απόδοση κάθε μετοχής συμβάλλει σ'ένα βαθμό στο συνολικό κίνδυνο και στη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου ή στη **μεταβλητότητα (volatility)** του χαρτοφυλακίου.

Με την αγορά και διατήρηση περισσότερων από μιας μετοχής, δηλαδή με τη διαμόρφωση ενός χαρτοφυλακίου, διασφαλίζεται η μείωση της μεταβλητότητας της συνολικής απόδοσης. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή μιας μετοχής δεν μεταβάλλεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και κατά τον ίδιο χρόνο με την τιμή μιας δεύτερης μετοχής, η οποία μπορεί να κινείται στην ίδια κατεύθυνση με διαφορετική ένταση, να κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση ή να μείνει αμετάβλητη.

Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι:

- Σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, οι διακυμάνσεις κάποιων μετοχών αντισταθμίζονται από τις αντίθετες διακυμάνσεις άλλων μετοχών.
- Άρα, η μεταβλητότητα της συνολικής απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου είναι χαμηλότερη από τη μεταβλητότητα της απόδοσης μιας συγκεκριμένης μετοχής του χαρτοφυλακίου.
- Κατά συνέπεια, ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου εξαρτάται όχι μόνο από τον κίνδυνο κάθε μετοχής αλλά και από τη σχέση της απόδοσης της κάθε μετοχής με την απόδοση των υπολοίπων.

3.2.4.2 Αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνος μεμονωμένου τίτλου

Με τον όρο αναμενόμενη απόδοση αναφερόμαστε στις χρηματικές εισροές ή εκροές κεφαλαίου που θα δημιουργήσει μια επένδυση (τοποθέτηση). Ο υπολογισμός ή η εκτίμηση των αναμενόμενων εισροών δεν είναι κάτι εύκολο, αφού η αβεβαιότητα είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε επένδυσης. Κατά συνέπεια, *όσο πιο υψηλός είναι ο βαθμός αβεβαιότητας που εμπερικλείει μια επένδυση, τόσο υψηλότερη θα πρέπει να αναμένεται και απόδοσή της.*

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι κατά το χρόνο που η διοίκηση της εταιρείας Α, στα πλαίσια της αναδιάρθρωσης της στρατηγικής της διεθνώς, διαμόρφωσε τους όρους πώλησης της θυγατρικής επιχείρησης στην Ελλάδα, «Ελληνική Α.Ε.», οι μετοχές της οποίας είναι εισηγμένες στο χρηματιστήριο, Επενδυτής προγραμματίζει επένδυση €10.000. Την ίδια χρονική στιγμή το δημόσιο διέθετε στην αγορά τίτλους (Ε.Γ.Ε.Δ.) με σταθερή ετήσια καθαρή απόδοση 11%.

Ο συγκεκριμένος επενδυτής μπορούσε να επιλέξει μεταξύ των τίτλων σταθερής απόδοσης και των μετοχών της «Ελληνική Α.Ε.», των οποίων η απόδοση σε μεγάλο βαθμό θα επηρεαζόταν από την έκβαση της σχεδιασμένης πώλησής της. Στην προσπάθειά του να εκτιμήσει την απόδοση των μετοχών της τράπεζας και με βάση τις πληροφορίες που είχε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τρία είναι τα πιθανά αποτελέσματα της προσπάθειας πώλησης της «Ελληνική Α.Ε.».

1. Η επιχείρηση με πιθανότητα 20% δε θα πουληθεί.
2. Η επιχείρηση με πιθανότητα 20% θα συγχωνευθεί με δεύτερη θυγατρική στην Ελλάδα.
3. Η επιχείρηση με πιθανότητα 60% θα πουληθεί.

Επίσης, εκτίμησε ότι σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις τα κέρδη της τοποθέτησής του, οι εισροές, θα είναι οι ακόλουθες:

Αποτέλεσμα	Πιθανότητα p_i	Εισροές x_i	Εισροές/Επένδυση R_i
Η επιχείρηση δε θα πουληθεί	20%	1.000	1.000/10.000=10%
Η επιχείρηση θα συγχωνευθεί	20%	1.500	1.500/10.000=15%
Η επιχείρηση θα πουληθεί	60%	3.000	3.000/10.000=30%

Εάν ορίσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι αναμενόμενες εισροές και $p_1, p_2, \dots, p_n$ η πιθανότητα εμφάνισης της κάθε εισροής, η αναμενόμενη απόδοση σε απόλυτο αριθμό είναι:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n p_i * x_i \\
 &= 0,2 * 1.000 + 0,2 * 1.500 + 0,6 * 3.000 = 2.300
 \end{aligned}$$

Η ποσοστιαία αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$\begin{aligned} \text{Αναμενόμενη απόδοση (Expected Return)} &= E(R) = \sum_{R=1}^n p_i * R_i \\ &= 0,2 * 10\% + 0,2 * 15\% + 0,6 * 30\% = 23\%. \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη απόδοση αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στη διαδικασία επιλογής της πλέον αποδοτικής επένδυσης. Η αναμενόμενη απόδοση δεν είναι και η απόδοση που τελικά θα εμφανιστεί στην πράξη. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστεί η απόκλιση της πραγματικής απόδοσης από την αναμενόμενη ή με άλλα λόγια το ύψος του κινδύνου που αναλαμβάνει ο επενδυτής επιλέγοντας μια συγκεκριμένη επένδυση.

Συνέχεια παραδείγματος: Υποθέτουμε ότι κατά το χρόνο που η διοίκηση της εταιρείας Β σχεδιάζει την παραγωγή κα προώθηση ενός νέου προϊόντος, επενδυτής (αυτός του προηγούμενου παραδείγματος) προβλέπει τις παρακάτω πιθανές εξελίξεις:

1. Το προϊόν με πιθανότητα 10% δεν θα επιτύχει στην αγορά.
2. Το προϊόν με πιθανότητα 50% θα επιτύχει, αλλά δε θα βοηθήσει στην κατάκτηση συνολικά μεγαλύτερου μεριδίου της επιχείρησης στην αγορά που δραστηριοποιείται.
3. Το προϊόν με πιθανότητα 15% θα επιτύχει και θα ωθήσει την επιχείρηση στην κατάκτηση νέου σημαντικού μεριδίου στην αγορά.
4. Το προϊόν με πιθανότητα 15% θα έχει απλά μια αξιοπρεπή παρουσία.
5. Το προϊόν με πιθανότητα 10% θα κάνει μικρού ύψους πωλήσεις.

Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις ο επενδυτής εκτιμά ότι, εφόσον αγοράσει μετοχές της Β, θα εμφανιστούν για την επένδυσή του οι εισροές του παρακάτω πίνακα. (Θυμίζουμε ότι το ύψος της επένδυσής του θα ανέλθει σε €10.000.)

Περίπτωση (1)	p_i (2)	Εισροές (3)	$E(X)$ (2) * (3) (4)	Απόδοση (R_i) (3)/10.000 (5)	% $E(R)$ (2) * (5) (6)
1	0,10	0	0	0%	0
2	0,50	1.800	900	18%	9%
3	0,15	5.000	750	50%	7,5%
4	0,15	2.000	300	20%	3%
5	0,10	1.000	100	10%	1%
			2.050		20,5%

$$\begin{aligned}
 E(X) &= x_1p_1 + x_2p_2 + \dots x_np_n = \sum_{i=1}^n p_i * x_i \\
 &= 0,1 * 0 + 0,5 * 1.800 + 0,15 * 5.000 + 0,15 * 2.000 \\
 &\quad + 0,1 * 1.000 = 2.050
 \end{aligned}$$

Η ποσοστιαία αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$\begin{aligned}
 \text{Αναμενόμενη απόδοση (Expected Return)} &= E(R) = \sum_{R=1}^n p_i * R_i \\
 &= 0,1 * 0\% + 0,5 * 18\% + 0,15 * 50\% + 0,15 * 20\% \\
 &\quad + 0,1 * 10\% = 20,5\%
 \end{aligned}$$

Η απόδοση 20,5% είναι σαφώς υψηλότερη από την απόδοση των Ε.Γ.Ε.Δ., η οποία θεωρήσαμε ότι ανέρχεται σε 11% (βλ. εκφώνηση). Εκείνο που δε γνωρίζει ο επενδυτής είναι ο κίνδυνος που υπάρχει πίσω από την επένδυση στη συγκεκριμένη μετοχή.

Ο κίνδυνος μετράται με τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης (σ_R) που είναι η τετραγωνική ρίζα των τετραγώνων των διαφορών των αποδόσεων από την αναμενόμενη απόδοση. Είναι δηλαδή η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (σ_R^2).

Στο παράδειγμά μας έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \text{Διακύμανση (Variance)} &= \sigma_R^2 = \sum_{R=1}^n p_i [R_i - E(R)]^2 \\
 \sigma_R^2 &= 0,10 * (0 - 20,5\%)^2 + 0,50 * (18\% - 20,5\%)^2 + 0,15 \\
 &\quad * (50\% - 20,5\%)^2 + 0,15 * (20\% - 20,5\%)^2 + 0,10 \\
 &\quad * (10\% - 20,5\%)^2 = 0,020776.
 \end{aligned}$$

και

$$\sigma_R = \sqrt{(0,020776)} = 0,1441 = 14,41\%$$

Με τον υπολογισμό της σταθερής απόκλισης γνωρίζουμε ένα μέτρο του κινδύνου. Με ύψος τυπικής απόκλισης 14,41% γνωρίζουμε ότι η απόδοση της συγκεκριμένης μετοχής θα κυμανθεί σε ένα εύρος **$\pm 14,41\%$** γύρω από την αναμενόμενη απόδοση. Δηλαδή θα κυμανθεί από **34,60%** έως **6,40% με πιθανότητα 68,27%** (από τη στατιστική, από την αναμενόμενη

απόδοση θα είναι $\pm 1 * \sigma$). Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το εύρος με πιθανότητα 95%, η τυπική απόκλιση θα είναι $\pm 1,96 * \sigma$.

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να απαντήσουμε στην ερώτηση εάν τυπική απόκλιση 14,41% είναι καλή. Είναι φανερό ότι όσο πιο χαμηλή είναι η απόκλιση, τόσο χαμηλότερος είναι ο κίνδυνος, δηλαδή γνωρίζουμε με περισσότερη σιγουριά την αναμενόμενη απόδοση. Έτσι, εάν είχαμε $E(R) = 15\%$ και $\sigma=3\%$, θα ήμασταν πιο σίγουροι για το αποτέλεσμα.

Στο παράδειγμά μας ο επενδυτής πρέπει να διαλέξει ανάμεσα σε μια επένδυση χωρίς κίνδυνο με απόδοση 11% και στην επένδυση σε μετοχές με αναμενόμενη απόδοση 20,5% και $\sigma=14,41\%$. Η απόφαση σχετίζεται και με το συγκεκριμένο κάθε φορά επενδυτή, με το κατά πόσο δηλαδή είναι έτοιμος να αναλάβει κάποιο κίνδυνο αναμένοντας υψηλότερη απόδοση.

3.2.4.3 Η σημασία του χαρτοφυλακίου στον περιορισμό του κινδύνου

Ο **συνολικός κίνδυνος** ενός χαρτοφυλακίου εμπερικλείει δύο διαφορετικούς κινδύνους, τον **κίνδυνο αγοράς** και τον **ειδικό κίνδυνο**:

$$\text{Συνολικός κίνδυνος} = \text{Κίνδυνος αγοράς} + \text{Ειδικός κίνδυνος}$$

Ο ειδικός κίνδυνος αφορά κάθε μετοχή και είναι **διαφοροποιήσιμος**. Ο κίνδυνος αγοράς χαρακτηρίζεται ως μη διαφοροποιήσιμος.

Ο ειδικός κίνδυνος ή η μεταβλητότητα των αναμενόμενων εισροών μιας μετοχής αντισταθμίζεται σε μεγάλο βαθμό όσο περισσότερο αυξάνεται ο αριθμός των μετοχών του χαρτοφυλακίου και το αποτέλεσμα είναι το χαρτοφυλάκιο να είναι εκτεθειμένο σχεδόν μόνο στον κίνδυνο αγοράς.

Δηλαδή ο κίνδυνος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου εξαρτάται τόσο από τον κίνδυνο του κάθε τίτλου χωριστά όσο και από τη συσχέτιση των αποδόσεων των τίτλων που συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο.

Ένα χαρτοφυλάκιο όμως περιλαμβάνει και κινδύνους που δεν μπορούν να περιοριστούν ή να αποφευχθούν με την αύξηση των στοιχείων του. Διαμορφώνεται έτσι ο κίνδυνος αγοράς.

3.2.4.4 Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου

Η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου (portfolio expected return) είναι ο μέσος όρος των αναμενόμενων αποδόσεων της κάθε μετοχής. Ως

συντελεστής στάθμισης λαμβάνεται η αναλογία της αξίας της επένδυσης στη συγκεκριμένη μετοχή στη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου.

$$E(R_x) = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{P_x} E(R)$$

όπου:

i = μετοχή

S = συνολική αξία της μετοχής i

P_x = συνολική αξία χαρτοφυλακίου

Η στάθμιση επομένως αντιπροσωπεύει το ποσοστό του κεφαλαίου που επενδύεται σε κάθε συγκεκριμένο τίτλο του χαρτοφυλακίου.

Θυμίζουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής είναι:

$$E(R) = \mu = \sum_{R=1}^n p_i * R_i$$

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι εξετάζουμε δύο τράπεζες, η τράπεζα Α εξειδικεύεται στη χορήγηση στεγαστικών δανείων και η τράπεζα Β στη χορήγηση καταναλωτικών δανείων. Λογικά, η τράπεζα Α αναπτύσσει τις εργασίες της σε περιόδους ανάπτυξης της οικονομίας (χτίζουν σπίτια), ενώ η τράπεζα Β σε περιόδους ύφεσης (το εισόδημά τους δεν επαρκεί για τις ανάγκες τους) και επομένως και η τιμή της μετοχής της καθεμιάς επηρεάζεται ανάλογα. Σε περιόδους σταθερότητας μπορούμε να αναμένουμε ζήτηση τόσο για στεγαστικά όσο και για καταναλωτικά δάνεια. Με βάση τα παραπάνω έχουμε τα εξής δεδομένα:

Εξέλιξη στην οικονομία	Εξέλιξη δανείων	Πιθανότητα	Απόδοση μετοχής Α	Απόδοση μετοχής Β
Ανάπτυξη	Αύξηση στεγαστικών	0,30	25%	7%
Σταθερότητα	Ισορροπία	0,40	14%	13%
Ύφεση	Αύξηση καταναλωτικών	0,30	8%	18%

Εάν κάποιος επενδυτής τοποθετήσει όλα τα κεφάλαιά του στη μετοχή της τράπεζας Α, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι:

$$E(R_A) = 25\% * 0,30 + 14\% * 0,40 + 8\% * 0,30 = 15,5\%$$

Εάν κάποιος επενδυτής τοποθετήσει όλα τα κεφάλαιά του στη μετοχή της τράπεζας Β, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι:

$$E(R_B) = 7\% * 0,30 + 13\% * 0,40 + 18\% * 0,30 = 12,7\%$$

Έτσι, ο επενδυτής που έχει αποφασίσει να επενδύσει στις μετοχές μιας εκ των δύο τραπεζών, γνωρίζει την αναμενόμενη απόδοση.

Εάν πάλι θέλει να επενδύσει μισά από τα κεφάλαιά του στην τράπεζα Α και τα υπόλοιπα μισά στην τράπεζα Β, τότε η αναμενόμενη απόδοση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$E(R_x) = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{P_x} E(R) = 0,5 * 15,5\% + 0,5 * 12,7\% = 14,1\%$$

Η σωστή επιλογή της επένδυσης θα πρέπει να αξιολογηθεί και με τη συμβολή της τυπικής απόκλισης, δηλαδή του αναλαμβανόμενου κινδύνου.

Τυπική απόκλιση απόδοσης τράπεζας Α:

$$\sigma_R^2 = \sum_{R=1}^n p_i [R_i - E(R)]^2$$

$$\sigma_{RA}^2 = 0,30 * (25\% - 15,5\%)^2 + 0,40 * (14\% - 15,5\%)^2 + 0,30 * (8\% - 15,5\%)^2 = 0,001355$$

$$\sigma_{RA} = \sqrt{(0,001355)} = 0,3681$$

Τυπική απόκλιση απόδοσης τράπεζας Β:

$$\sigma_{RB}^2 = 0,30 * (7\% - 12,7\%)^2 + 0,40 * (13\% - 12,7\%)^2 + 0,30 * (18\% - 12,7\%)^2 = 0,038905$$

$$\sigma_{RB} = \sqrt{(0,038905)} = 0,19725$$

Αν κάποιος επενδυτής επιλέξει να επενδύσει στην μετοχή της τράπεζας Α έχει υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση, αλλά αντιμετωπίζει και υψηλότερο κίνδυνο.

Εάν επιλέξει να επενδύσει και στις δύο μετοχές, διαμορφώνοντας ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, ο κίνδυνος θα διαφοροποιηθεί. Μια πρώτη προσέγγιση του κινδύνου χαρτοφυλακίου είναι η διαμόρφωση μιας τυπικής απόκλισης με στάθμιση των αποδόσεων κάθε τίτλου με το ποσοστό συμμετοχής στο χαρτοφυλάκιο (50%).

$$\sigma_{\text{χαρτ}} = 0,5 * 0,3681 + 0,5 * 0,19725 = 0,28267$$

Εάν σύμφωνα με τα παραπάνω υπολογίσουμε τη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου έχουμε:

Εξέλιξη στην οικονομία	Εξέλιξη δανείων	Πιθανότητα	Απόδοση μετοχής χαρτοφυλακίου
Ανάπτυξη	Αύξηση στεγαστικών	0,30	$0,5*25+0,5*7=16\%$
Σταθερότητα	Ισορροπία	0,40	$0,5*14+0,5*13=13,5\%$
Ύφεση	Αύξηση καταναλωτικών	0,30	$0,5*8+0,5*18=13\%$

Βάσει των στοιχείων του πίνακα η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma_{RX}^2 = 0,30 * (16\% - 14,1\%)^2 + 0,40 * (13,5\% - 14,1\%)^2 + 0,30 * (13\% - 14,1\%)^2 = 0,000515$$

$$\sigma_{RX} = \sqrt{0,000515} = 0,0227$$

Η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι κατά πολύ μικρότερη από αυτές των μεμονωμένων μετοχών.

Όμως για τον απόλυτα σωστό υπολογισμό της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι τυπικές αποκλίσεις των μεμονωμένων τίτλων του χαρτοφυλακίου, αλλά και η συσχέτιση των αποδόσεων, όσον αφορά την κίνηση αυτών.

3.2.4.5 Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας –Μοντέλα κινητού μέσου εκθετικής στάθμισης (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model)

Γνωρίζουμε ότι στην πράξη, οι πιο πρόσφατες τιμές της μεταβλητότητας μας δίνουν μεγαλύτερη πληροφορία σε σχέση με απομακρυσμένες τιμές της.

Ένα ακραίο παράδειγμα είναι η εκδήλωση ενός σοκ στην αγορά. Το σοκ αυτό θα αυξήσει την μεταβλητότητα των χρημ/κών μεταβλητών, έτσι οι πρόσφατες παρατηρήσεις θα είναι αυτές που θα μας δίνουν σωστές προβλέψεις.

Όταν περάσει αρκετός χρόνος από το σοκ, η μεταβλητότητα θα μειωθεί, συνεπώς οι πιο πρόσφατες τιμές της (που θα είναι και μειωμένες) θα μας βοηθήνε να σχηματίσουμε ορθότερες προβλέψεις, σε σύγκριση με το να λαμβάναμε εξίσου υπόψη τις παρατηρήσεις αμέσως μετά το σοκ.

Συνεπώς αντί να υπολογίσουμε ένα απλό μέσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν σταθμισμένο μέσο, με σταθμίσεις (α) οι οποίες θα είναι μεγαλύτερες για τις πρόσφατες παρατηρήσεις και όσο απομακρυνόμαστε πίσω στον χρόνο θα μειώνονται:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m a_i r_{n-i}^2$$

$$\text{όπου } \sum_{i=1}^m a_i = 1$$

Τις σταθμίσεις (α) μπορούμε να τις ορίσουμε εμείς, μέσω παρατήρησης των ιστορικών δεδομένων.

Μία συγκεκριμένη μορφή του προηγούμενου μοντέλου είναι το EWMA model.

Σε αυτό το μοντέλο, θέτουμε όπου $a_{i+1} = \lambda a_i$, όπου το λ είναι μία σταθερά που παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και υποθέτουμε ότι $m=\infty$.

Τότε:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2$$

Το EWMA βασίζεται στην υπόθεση ότι το λ είναι σταθερό.

Παράδειγμα: Έστω $\lambda = 0.90$ (το γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα). Η μεταβλητότητα $\sigma_{n-1}^2 = 0.01$ (η εκτίμηση για την μεταβλητότητα της ημέρας n-1, η οποία σχηματίστηκε την ημέρα n-2). Ενώ την ημέρα n-1, η μεταβλητή αυξήθηκε 2%. Ποιά είναι η εκτίμηση για την διακύμανση της ημέρας n βάσει του EWMA μοντέλου;

Λύση:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2$$

Αφού την ημέρα n-1, η μεταβλητή αυξήθηκε 2%, τότε:

$$r_{n-1}^2 = (2\%)^2 = 0,02^2 = 0,0004$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2 = 0,9 * 0,0001 + (1 - 0,9) * 0,0004 \\ &= 0,00013 \end{aligned}$$

3.2.4.6 Συσχέτιση και συνδιακύμανση–Μοντέλα κινητού μέσου εκθετικής στάθμισης (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model)

Σημασία της μέτρησης της συσχέτισης

Έστω μία εταιρεία που είναι εκτεθειμένη σε δύο μεταβλητές της αγοράς. Η ιθάνή αύξηση των 2 μεταβλητών θα οδηγήσει σε ζημιά για την εταιρία. Εάν οι αλλαγές των τιμών των 2 μεταβλητών έχουν υψηλή συσχέτιση, η εταιρία θα έχει πολύ μεγάλη έκθεση στις μεταβολές τους. Εάν οι αλλαγές των τιμών των 2 μεταβλητών έχουν αρνητική συσχέτιση, η εταιρία θα έχει μικρή έκθεση στις μεταβολές τους. Για την σωστή και ολοκληρωμένη μέτρηση του κινδύνου ένας διαχειριστής θα πρέπει να παρακολουθεί και τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών στις οποίες υπάρχει έκθεση.

Η συσχέτιση δύο μεταβλητών V_1 και V_2 δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$p = \frac{E(V_1 V_2) - E(V_1)E(V_2)}{SD(V_1)SD(V_2)}$$

Όπου $E(\cdot)$ η αναμενόμενη τιμή και $SD(\cdot)$ η τυπική απόκλιση.

Εάν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των 2 μεταβλητών:

$$E(V_1 V_2) = E(V_1)E(V_2) \quad \text{και} \quad p = 0$$

Εάν $V_1 = V_2$ τότε ο αριθμητής και ο παρονομαστής του τύπου της συσχέτισης θα είναι ίσοι, άρα $\rho = 1$, κάτι αναμενόμενο.

Ο τύπος της συνδιακύμανσης μεταξύ δύο μεταβλητών V_1 και V_2 :

$$\text{cov}(V_1, V_2) = E(V_1 V_2) - E(V_1)E(V_2)$$

Όπου $E(\cdot)$ η αναμενόμενη τιμή.

Ο τύπος της συσχέτισης μπορεί να γραφεί και ως:

$$\rho = \frac{\text{cov}(V_1, V_2)}{SD(V_1)SD(V_2)}$$

Παρόλο που διαισθητικά είναι πιο εύκολα κατανοητή η έννοια της συσχέτισης (ρ), η συνδιακύμανση χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στα μοντέλα.

Η (δειγματική) συνδιακύμανση μεταξύ δύο μεταβλητών V_1 και V_2 δίνεται από τον παρακάτω τύπο (χρησιμοποιώντας m παρατηρήσεις):

$$\text{cov}(V_1, V_2) = \frac{\sum_{i=1}^m (V_{1,i} - \bar{V}_1)(V_{2,i} - \bar{V}_2)}{m - 1}$$

Δύο μεταβλητές ορίζονται ως **στατιστικά ανεξάρτητες**, όταν η γνώση για την μία από αυτές δεν επηρεάζει την κατανομή πιθανοτήτων της άλλης.

Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$f(V_2 | V_1 = x) = f(V_2)$$

Όπου $f(\cdot)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Όπως και στην περίπτωση της μεταβλητότητας και της διακύμανσης, έτσι και για την συσχέτιση και την συνδιακύμανση υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι μέτρησης.

Έστω ότι οι αποδόσεις των μεταβλητών X και Y δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}, \quad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

Η συνδιακύμανση την ημέρα n :

$$cov_n = E(x_n y_n) - E(x_n)E(y_n)$$

Συχνά γίνεται η απλουστευτική υπόθεση ότι η αναμενόμενη ημερήσια απόδοση είναι ίση με 0, συνεπώς η συνδιακύμανση μετράται ως:

$$cov_n = E(x_n y_n)$$

Χρησιμοποιώντας ίση στάθμιση σε έναν αριθμό m τελευταίων παρατηρήσεων, η συνδιακύμανση υπολογίζεται ως:

$$cov_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i} y_{n-i}$$

Με παρόμοια στάθμιση μπορούμε να υπολογίσουμε και τις διακυμάνσεις των 2 μεταβλητών:

$$var_{x,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i}^2, \quad var_{y,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{n-i}^2$$

Έχοντας εκτιμήσει την συνδιακύμανση και τις επιμέρους διακυμάνσεις των δύο μεταβλητών, μπορούμε να εκτιμήσουμε και την συσχέτιση:

$$p = \frac{cov_n}{\sqrt{var_{x,n} var_{y,n}}}$$

Στην πράξη, όπως και στην περίπτωση της μεταβλητότητας, οι πρόσφατες παρελθοντικές παρατηρήσεις παρέχουν σημαντικότερη πληροφορία σε σχέση με τις πολύ παλαιότερες παρατηρήσεις.

Οι διαχειριστές κινδύνου μπορούν να υπολογίσουν την συνδιακύμανση (άρα και την συσχέτιση) δίνοντας διαφορετικές σταθμίσεις αναλόγως την χρονική απόσταση από το παρόν.

Το μοντέλο EWMA για συνδιακύμανση:

$$cov_n = \lambda cov_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-1} y_{n-1}$$

Όσο πιο υψηλό είναι το « λ » τόσο μεγαλύτερη βαρύτητα δίνουμε στις πιο παλιές παρατηρήσεις και τόσο μικρότερη βαρύτητα στις πρόσφατες (και αντίστροφα).

Παράδειγμα (Μέτρηση της Συσχέτισης με το EWMA model): Έστω $\lambda=0.95$ και η συσχέτιση μεταξύ X και Y , την ημέρα $n-1$, $p_{xy} = 0.6$. Έστω επίσης ότι οι μεταβλητότητες της X και της Y την ημέρα $n-1$ είναι 1% και 2%, αντίστοιχα. α) Βρείτε τη συνδιακύμανση την ημέρα $n-1$. β) Έστω επίσης ότι οι ποσοστιαίες αλλαγές στις τιμές των X και Y , την ημέρα $n-1$, είναι 0.5% και 2.5%, αντίστοιχα. Βρείτε τις διακυμάνσεις και τη συνδιακύμανση των X και Y που αναθεωρούνται βάσει του EWMA. γ) Βρείτε τη νέα μεταβλητότητα της X και της Y . δ) Βρείτε το νέο συντελεστή συσχέτισης. Τι παρατηρείτε από τα παραπάνω αποτελέσματα?

Λύση:

α) Από τη σχέση συσχέτισης και συνδιακύμανσης, η συνδιακύμανση την ημέρα $n-1$ είναι ίση με:

$$p = \frac{cov_n}{\sqrt{var_{x,n} var_{y,n}}} \rightarrow cov_n = p * \sqrt{var_{x,n} var_{y,n}} = 0,6 * 0,01 * 0,02 = 0,00012$$

β) Οι διακυμάνσεις και η συνδιακύμανση των X και Y που αναθεωρούνται βάσει του EWMA ως εξής:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2$$

Άρα,

$$\sigma_{x,n}^2 = 0,95 * (1\%)^2 + (1 - 0,95) * (0,5\%)^2 = 0,00009625$$

$$\sigma_{y,n}^2 = 0,95 * (2\%)^2 + (1 - 0,95) * (2,5\%)^2 = 0,00041125$$

Το μοντέλο EWMA για συνδιακύμανση:

$$\begin{aligned} cov_n &= \lambda cov_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-1} y_{n-1} \\ &= 0,95 * 0,00012 + (1 - 0,95) * 0,5\% * 2,5\% \\ &= 0,00012025 \end{aligned}$$

γ)

Η νέα μεταβλητότητα της X είναι:

$$\sqrt{0,00009625} = 0,00981 = 0,981\%$$

Η νέα μεταβλητότητα της Y είναι:

$$\sqrt{0,00041125} = 0,02028 = 2,028\%$$

δ) Ο νέος συντελεστής συσχέτισης είναι:

$$p = \frac{cov_n}{\sqrt{var_{x,n} var_{y,n}}} = \frac{0,00012025}{0,00981 * 0,02028} = 0,6044$$

Παρατηρούμε ότι, η μεταβλητότητα της X μειώθηκε από 1% σε 0,981%, ενώ της Y αυξήθηκε από 2% σε 2,028%. Επίσης, αυξήθηκε και η συσχέτισή τους από 0,6 σε 0,6044.