

Κεφάλαιο 2: Αποτίμηση χρεογράφων και κίνδυνος επιτοκίου

2.1 Υπολογισμός της απόδοσης των πιστωτικών εργαλείων χρηματαγοράς

Η γνώση της παρούσας και της μελλοντικής αξίας ενός χρηματικού ποσού αποτελεί τον τρόπο προσδιορισμού του επιτοκίου που συνδέει τα δύο μεγέθη και συνεπώς παρέχει το μηχανισμό αποτίμησης της απόδοσης της συγκεκριμένης αξίας.

Το σύνολο σχεδόν των πιστωτικών εργαλείων της αγοράς χρήματος αποτιμώνται (ως εκ τούτου υπολογίζεται και η απόδοσή τους) με βάση την προεξοφλητική λογική. Αυτό συμβαίνει για τα: έντοκα γραμμάτια, τα πιστοποιητικά καταθέσεων, τις συμφωνίες επαναγοράς, τις επιταγές αποδοχής τραπεζής και τα εμπορικά γραμμάτια, των οποίων ο χρόνος ωρίμανσης είναι μικρότερος του έτους.

2.1.1 Υπολογισμός της παρούσας και μελλοντικής αξίας ενός χρηματικού ποσού

Παραδοχή: Τα ρευστά διαθέσιμα που έχει ένα άτομο σήμερα στην κατοχή του, αξίζουν περισσότερο από της ίδιας αξίας ποσό ρευστών διαθέσιμων που θα μπορούσε να λάβει σε μια μελλοντική ημερομηνία.

Για παράδειγμα, αν κάποιος κατέχει σήμερα ποσό ύψους €50.000, θα μπορούσε να τα τοποθετήσει (επενδύσει) έτσι ώστε να λάβει ένα μεγαλύτερο ποσό σε μελλοντική ημερομηνία. Το μελλοντικό ποσό που θα λάβει εξαρτάται αρχικά από το ύψος του επιτοκίου που προσφέρει η επιλεγθείσα επένδυση. Συνεπώς, η παρούσα αξία και η μελλοντική αξία μας δείχνουν τον τρόπο για να υπολογίσουμε το επιτόκιο.

Ο μαθηματικός τύπος υπολογισμού της μελλοντικής αξίας ενός ποσού είναι:

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

όπου:

FV = μελλοντική αξία

PV = παρούσα αξία

i = ονομαστικό επιτόκιο

n = χρονική διάρκεια της επένδυσης

Εάν ο ανατοκισμός πραγματοποιείται σε περισσότερες περιόδους από μία εντός του έτους, και έστω m οι περίοδοι αυτοί, τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$FV = PV * (1 + i/m)^{n*m}$$

Οι περίοδοι ανατοκισμού και οι αντίστοιχες τιμές που μπορεί να λαμβάνει το m είναι:

Περίοδος ανατοκισμού	Τιμές m
Ετήσια	1
Εξαμηνιαία	2
Τριμηνιαία	4
Μηνιαία	12
Ημερήσια	365
Συνεχή	*

Η παρούσα αξία ενός ποσού που βρίσκεται υπό συνεχή ανατοκισμό υπολογίζεται ως:

$$PV_n = FV_n / e^{in}$$

2.1.2 Υπολογισμός πραγματικού επιτοκίου

Το πραγματικό επιτόκιο (effective interest rate) υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$i^* = (1 + \frac{i}{m})^m - 1$$

Αν η χρονική διάρκεια ανατοκισμού δίνεται σε ημέρες, τότε ο τύπος υπολογισμού του πραγματικού επιτοκίου είναι:

$$i^* = (1 + \frac{i}{365/t})^{365/t} - 1$$

Όπου t η χρονική διάρκεια της επένδυσης.

Παράδειγμα: Για δάνειο ενός χρόνου, με μηνιαίο ανατοκισμό, το ζητούμενο ονομαστικό επιτόκιο έχει ύψος 12%. Πόσο είναι το πραγματικό επιτόκιο του δανείου?

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268 = 12,68\%.$$

Αν υποτεθεί ότι το ίδιο δάνειο είναι διάρκειας 90 ημερών με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12%, πόσο είναι το πραγματικό επιτόκιο?

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{365/t}\right)^{365/t} - 1 = \left(1 + \frac{0,12}{365/90}\right)^{365/90} - 1 = 0,1255 = 12,55\%.$$

Παράδειγμα: Ποια είναι η μελλοντική αξία και το πραγματικό επιτόκιο μετά από 1 χρόνο εάν επενδύσουμε €1.000 με 8% ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο?

Περίοδος ανατοκισμού	Αριθμός περιόδων ανατοκισμού	Μελλοντική αξία	Πραγματικό επιτόκιο
Ετήσια	1	1080,00	8,00
Εξαμηνιαία	2	1081,60	8,16
Τριμηνιαία	4	1082,43	8,24
Μηνιαία	12	1083,00	8,30
Ημερήσια	365	1083,21	8,32
Συνεχή	*	1083,29	8,33

Μελλοντική αξία:

$$FV = PV * (1 + i)^n = 1.000 * (1 + 0,08) = 1.080$$

$$FV = PV * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n*m} = 1.000 * \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{1*2} = 1.081,60$$

...

$$PV_n = \frac{FV_n}{e^{in}} \rightarrow FV = PV_n * e^{in} = 1.000 * e^{0,08*1} = 1.083,29.$$

Πραγματικό επιτόκιο:

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{1}\right)^1 - 1 = 0,08 = 8\%$$

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 0,0816 = 8,16\%$$

...

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{365}\right)^{365} - 1 = 0,0832 = 8,32\%$$

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(\frac{e^{0,08 \cdot 1}}{1}\right)^1 - 1 = 0,0833 = 8,33\%$$

2.1.3 Υπολογισμός προεξοφλητικής απόδοσης

Υπάρχουν ορισμένα εργαλεία της χρηματαγοράς (έντοκα γραμμάτια του δημοσίου, ρέπος, επιταγές αποδοχής τραπεζίης, εμπορικά αξιόγραφα, κλπ.) των οποίων η αξία αλλά και η απόδοση εκτιμάται προεξοφλητικά.

Ορισμός: Προεξόφληση είναι η τραπεζική εργασία με την οποία η τράπεζα αγοράζει, πριν από τη λήξη τους, αξιόγραφα πελάτη της, (η οποία πραγματοποιείται με πλήρη ή τακτική οπισθογράφηση των μεταβιβαζόμενων τίτλων) έναντι καταβολής της συνολικής ονομαστικής αξίας, μειωμένης κατά τους προεξοφλητικούς τόκους και τα λοιπά δικαιώματα και έξοδα της τράπεζας.

Ο τύπος με τον οποίο προσδιορίζουμε την απόδοσή τους είναι:

$$i_{dr} = \left[\frac{P_f - P_o}{P_f} \right] * \frac{360}{h}$$

όπου:

i_{dr} = προεξοφλητικό επιτόκιο

P_o = η τιμή του ομολόγου κατά τη στιγμή της προεξόφλησης

P_f = η τελική τιμή του ομολόγου τη στιγμή της ωρίμανσης

h = οι ημέρες που απομένουν ως την ωρίμανση.

Παράδειγμα: Έστω $P_f = €1.000$, $h=182$ ημέρες και $P_o = €964,5$. Πόσο είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο?

$$i_{dr} = \left[\frac{P_f - P_o}{P_f} \right] * \frac{360}{h} = \left[\frac{1.000 - 964,5}{1.000} \right] * \frac{360}{182} = 0,0702 = 7,02\%.$$

2.2 Ορισμός, χαρακτηριστικά και αποτίμηση ομολογιών

Ομολογία είναι ένα από τα βασικά εργαλεία της πιστωτικής επέκτασης του σύγχρονου οικονομικού συστήματος. Προκύπτει από την ανάγκη των ελλειμματικών μονάδων (δημόσιο, επιχειρήσεις) να χρηματοδοτήσουν τα επενδυτικά τους σχέδια χωρίς να αποφανθούν για δανειοδότηση στο τραπεζικό σύστημα. Απευθύνονται ευθέως, με την υποστηρικτική διαμεσολάβηση του τραπεζικού συστήματος, στο κοινό από το οποίο ζητούν να χρηματοδοτήσει τα επενδυτικά τους σχέδια δια μέσου της έκδοσης ομολογίας.

Προσφέρουν απόδοση (επιτόκιο) για τη χρήση των κεφαλαίων ανάλογη με την πιστοληπτική ικανότητά τους και το επικρατούν επιτόκιο της αγοράς.

Ορισμός: Συγκεκριμένα, ομολογία είναι ένα χρηματοοικονομικό προϊόν στο οποίο εμπεριέχεται η συμβατική υποχρέωση που αναλαμβάνει ο εκδότης (αποδέκτης του ρευστού χρήματος) έναντι των πιστωτών (αποδέκτες ομολογίας) να προβεί σε προκαθορισμένη αποπληρωμή των υποχρεώσεών του, όπως αυτές απορρέουν από τους συμβατικούς όρους, ως εκ τούτου, καθορίζουν και το είδος της ομολογίας.

Οι βασικοί όροι (χαρακτηριστικά) μιας ομολογίας είναι:

- Η τιμή έκδοσης ή ονομαστική αξία του ομολόγου, αποτελεί το ποσό που ο εκδότης υπόσχεται να αποπληρώσει στο χρόνο ωρίμανσής του.
- Η ύπαρξη ενδιάμεσων ταμειακών ροών (τοκομεριδίων) ή όχι. Υπάρχουν ομολογίες που έχουν ενδιάμεσες ταμειακές ροές σε τακτά χρονικά διαστήματα (3, 6 ή 12 μήνες). Πρόκειται για μελλοντικά εισοδήματα που εισπράττονται με τη μορφή τοκομεριδίων.
- Αν η ομολογία υπόσχεται ενδιάμεσες ταμειακές ροές, αυτές μπορούν να λάβουν τη μορφή:

α) Σταθερού ποσού ανά τακτά χρονικά διαστήματα για το σύνολο της χρονικής περιόδου ζωής της ομολογίας. Το ύψος του ποσού υπολογίζεται ως το γινόμενο της ονομαστικής αξίας ή της τιμής έκδοσης επί το επιτόκιο

που υπόσχεται η ομολογία. Οι ομολογίες αυτού του είδους ονομάζονται **ομολογίες σταθερού επιτοκίου** (straight bonds).

Παράδειγμα: Έστω τιμή έκδοσης ή ονομαστική αξία ομολόγου να είναι €1.000, επιτόκιο σταθερό ετήσιο με ετήσια περίοδο εκτοκισμού 10%. Τότε το ετήσιο σταθερό τοκομερίδιο (κουπόνι) θα είναι $1.000 \cdot 10\% = €100$.

β) Κυμαινόμενου ποσού ανά τακτά χρονικά διαστήματα για το σύνολο της χρονικής περιόδου ζωής της ομολογίας. Το εκάστοτε ύψος του ποσού υπολογίζεται ως το γινόμενο της ονομαστικής αξίας ή τιμής έκδοσης επί το τρέχον επιτόκιο της περιόδου εκτοκισμού. Οι ομολογίες αυτού του είδους ονομάζονται **ομολογίες κυμαινόμενου επιτοκίου** (floating rates bonds).

- Τα έτη που διαρκεί η σύμβαση της ομολογίας ονομάζεται **χρόνος ωρίμανσης** (maturity). Υπάρχουν όμως και ομολογίες που δεν έχουν ημερομηνία λήξης, οι γνωστές ως διηνεκείς ομολογίες.

2.2.1 Η αντίστροφη σχέση μεταξύ τιμής ομολόγου και απόδοσης

Θα δείξουμε ότι η τιμή του ομολόγου και το επιτόκιο αγοράς μεταβάλλονται αντιστρόφως.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι την 1/1/1994 εκδίδεται ένα ομόλογο Α αξίας €1.000.000. Η χρονική διάρκεια του ομολόγου είναι δύο χρόνια (ο χρόνος ωρίμανσης είναι 31/12/1995). Η απόδοση του κουπονιού είναι 10%, και ήταν ίση με το ύψος του επιτοκίου αγοράς την περίοδο έκδοσης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο εκδότης του ομολόγου θα πρέπει να καταβάλει $1.000.000 \cdot 10\% = 100.000$ στον κάτοχο του ομολόγου στις 31/12/1994 και άλλες 100.000 στις 31/12/1995, ενώ την ίδια ημερομηνία θα πρέπει να του επιστρέψει και το αρχικώς καταβληθέν ποσό (1.000.000).

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στις 1/1/1995, ο κάτοχος του ομολόγου έχει πληρωθεί το πρώτο κουπόνι €100.000 και σκέφτεται να πουλήσει το ομόλογο. Την περίοδο αυτή το επιτόκιο αγοράς για ενός έτους ομόλογο είναι 11%. Σε τι τιμή θα πουλήσει το ομόλογο Α στις 1/1/1995?

Στις 1/1/1995 το ομόλογο Α θα πουληθεί σε τιμή τέτοια ώστε το εναπομείναν κουπόνι συν την εκτιμηθείσα τιμή μεταξύ 1.1.1995 και 31.12.1995, όταν το ομόλογο ωριμάζει, θα δώσει απόδοση 11% στον επενδυτή. Αυτό συμβαίνει γιατί αν δίνει λιγότερο από 11% κανένας δε θα το αγοράσει, τη στιγμή που υπάρχει εναλλακτική δυνατότητα που δίνει

τουλάχιστον ίση με 11%. Παράλληλα, ο κάτοχος του ομολόγου δεν πρόκειται να πουλήσει αν η απόδοσή του είναι υψηλότερη από το επιτόκιο της αγοράς (11%). Συνεπώς:

$$0,11P = 100.000 + (1.000.000 - P)$$

Ο πρώτος όρος της δεξιάς πλευράς της ισότητας είναι το εναπομείναν κουπόνι. Ο δεύτερος όρος (1.000.000-P) είναι η εκτιμώμενη τιμή καθώς αυτή οδεύει προς την ωρίμανσή της.

Κάνοντας τις πράξεις:

$$0,11P = 100.000 + (1.000.000 - P)$$

$$0,11P = 1.100.000 - P$$

$$P = €990.990$$

Συνεπώς, όταν η απόδοση ήταν 10%, η τιμή του ομολόγου ήταν 1.000.000. Όταν η απόδοση έγινε 11%, η τιμή του ομολόγου έπεσε στις 990.990.

Αν τώρα θεωρήσουμε ακριβώς το ίδιο παράδειγμα αλλά αυτή τη φορά το επιτόκιο αγοράς έπεσε από 10% σε 9%, τότε:

$$0,09P = 100.000 + (1.000.000 - P)$$

$$0,09P = 1.100.000 - P$$

$$P = €1.009.170$$

Δηλαδή, όταν η απόδοση του ομολόγου πέφτει, η τιμή του ανεβαίνει.

Άρα, η απόδοση μιας ομολογίας σταθερού επιτοκίου τις ημερομηνίες έκδοσης και ωρίμανσής της είναι ίση με το επιτόκιο που υπόσχεται ότι θα προσφέρει. Αυτό συμβαίνει γιατί τις ημερομηνίες αυτές η τιμή της ομολογίας είναι ίση με την ονομαστική της αξία.

Αντίθετα, η απόδοση μιας ομολογίας σταθερού επιτοκίου κατά τη διάρκεια που διαπραγματεύεται στη δευτερογενή αγορά (δηλαδή κατά τη διάρκεια της ζωής της) μεταβάλλεται σε συνάρτηση της τιμής της ομολογίας, η οποία με τη σειρά της συναρτάται αντίστροφα με το τρέχον επιτόκιο της αγοράς.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο γενικός τύπος τιμολόγησης των ομολόγων είναι:

$$PV = \sum_{t=1}^n \left(\frac{C_t}{(1+i)^t} \right) + \frac{F}{(1+i)^n}$$

όπου:

PV = παρούσα αξία ή τρέχουσα τιμή

C_t = σταθερό κουπόνι

F = ονομαστική αξία ή αξία κατά τη λήξη

i = τρέχον επιτόκιο αγοράς

n = περίοδος ζωής ομολόγου

Μπορούμε συνεπώς να υπολογίσουμε κάθε φορά τι απόδοση έχει η τρέχουσα τιμή του ομολόγου (PV) έως τη λήξη ή να βρούμε βάσει την επιθυμητή απόδοση έως τη λήξη ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του ομολόγου.

Στην γενική περίπτωση, μετά από μαθηματική επεξεργασία ο παραπάνω τύπος λαμβάνει την εξής μορφή:

$$PV = \frac{100}{A^a} \left[\frac{i}{k} * \frac{1 - A^{-V}}{1 - A^{-1}} + \frac{1}{A^{V-1}} \right]$$

όπου:

PV = τρέχουσα αξία

k = ο αριθμός των πληρωμών κουπονιών κατ'έτος

i = απόδοση ομολόγου (κουπόνι/ονομαστική αξία)

V = ο αριθμός των κουπονιών που δεν έχουν πληρωθεί ακόμα

a = οι ημέρες που απομένουν να πληρωθεί το τρέχον κουπόνι προς 360

$$A = 1 + \frac{i}{k}$$

2.2.2 Καθαρή και ακαθάριστη τιμή ομολόγου

Η τιμή στην οποία ένα ομόλογο είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά δεν είναι η θεωρητική τιμή του ομολόγου που αντιστοιχεί στην προεξόφληση των μελλοντικών χρηματικών ροών. Τούτο γιατί ο αγοραστής του ομολόγου θα πρέπει να αποζημιώσει τον πωλητή με τους τόκους που αντιστοιχούν στην περίοδο που είχε το ομόλογο στην κατοχή του.

Επομένως, η θεωρητική τιμή αγοράς του ομολόγου αποτελείται ουσιαστικά από δύο συνιστώσες:

- Την καθαρή τιμή του χρεογράφου και
- Τους δεδουλευμένους τόκους

Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$\text{ακαθάριστη τιμή} = \text{καθαρή τιμή} + \text{δεδουλευμένοι τόκοι}$$

Όσο πλησιάζουμε χρονικά στην ημερομηνία αποκοπής του κουπονιού, η απόκλιση των δύο τιμών μεγαλώνει, γιατί αυξάνουν οι δεδουλευμένοι τόκοι. Την ημερομηνία πληρωμής του κουπονιού, και μόνο αυτή, οι δύο τιμές ταυτίζονται.

Οι δεδουλευμένοι τόκοι (ΔT) υπολογίζονται ως εξής:

$$\Delta T = \text{ονομαστική αξία} * i \frac{n_{\pi}}{n}$$

όπου:

n_{π} = οι ημέρες από την προηγούμενη πληρωμή κουπονιού

n = το σύνολο των ημερών μεταξύ δύο πληρωμών κουπονιού

i = η απόδοση του ομολόγου

Παράδειγμα: Έστω ένα ομόλογο με λήξη 15 Νοεμβρίου 2005. Το κουπόνι του είναι της τάξεως των 8%. Στις 11 Ιουλίου 2000, με επιτόκιο αγοράς 7%, να υπολογιστούν οι δεδουλευμένοι τόκοι, η ακαθάριστη και καθαρή τιμή του. (249 ημέρες από την προηγούμενη πληρωμή κουπονιού, 116 ημέρες απομένουν μέχρι την πληρωμή του επόμενου κουπονιού)

Λύση:

$$\text{Δεδουλευμένοι τόκοι} = 8 * \frac{249}{365} = 5,5$$

$$A = 1 + \frac{i}{k} = 1 + \frac{0,07}{1} = 1,07$$

$$\begin{aligned}\text{Ακαθάριστη τιμή} &= \frac{100}{A^a} \left[\frac{i}{k} * \frac{1 - A^{-V}}{1 - A^{-1}} + \frac{1}{A^{V-1}} \right] \\ &= \frac{100}{(1,07)^{116/360}} \left[\frac{0,08}{1} * \frac{1 - 1,07^{-6}}{1 - 1,07^{-1}} + \frac{1}{1,07^{6-1}} \right] = 109,68\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Καθαρή τιμή} &= \text{ακαθάριστη τιμή} - \text{δεδουλευμένοι τόκοι} \\ &= 109,68 - 5,5 = 104,18.\end{aligned}$$

2.2.3 Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή του ομολόγου

1) Η τιμή του ομολόγου μεταβάλλεται ασύμμετρα με την άνοδο ή την πτώση του επιτοκίου.

Παράδειγμα: Έστω ομόλογο με εξαμηνιαίο σταθερό ποσό πληρωμής €470 και χρόνο ωρίμανσης 3 χρόνια. Το τρέχον επιτόκιο είναι 9,4% ετησίως. α) Ποια είναι η παρούσα τιμή του αν το κεφάλαιο που θα λάβει στο τέλος του χρόνου ωρίμανσης είναι €10.000? β) Έστω ότι το τρέχον επιτόκιο αυξάνεται σε 10%. Ποια θα είναι η τιμή του πώλησης του ίδιου ομολόγου? γ) Αν το τρέχον επιτόκιο μειωθεί σε 8,8%, ποια θα είναι η τιμή του ίδιου ομολόγου?

Λύση:

α) Η παρούσα τιμή του αν το κεφάλαιο που θα λάβει στο τέλος του χρόνου ωρίμανσης είναι 10.000 είναι:

$$\begin{aligned}PV &= \sum_{t=1}^n \left(\frac{C_t}{(1+i)^t} \right) + \frac{F}{(1+i)^n} \\ &= \sum_{t=1}^6 \left(\frac{470}{(1+0,047)^t} \right) + \frac{10.000}{(1+0,047)^6} = 10.000\end{aligned}$$

Δηλαδή με τρέχον επιτόκιο 9,4% η τιμή πώλησης του ομολόγου είναι ακριβώς όσο η αρχική τιμή έκδοσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η απόδοση του ομολόγου $940/10.000=9,4\%$ είναι η ίδια με το τρέχον επιτόκιο.

β) Αν το τρέχον επιτόκιο αυξάνεται σε 10%, η τιμή πώλησης του ίδιου ομολόγου είναι:

$$\sum_{t=1}^6 \left(\frac{470}{(1 + 0,05)^t} \right) + \frac{10.000}{(1 + 0,05)^6} = 9.847,72$$

γ) Αν το τρέχον επιτόκιο μειωθεί σε 8,8%, η τιμή πώλησης του ίδιου ομολόγου είναι:

$$\sum_{t=1}^6 \left(\frac{470}{(1 + 0,044)^t} \right) + \frac{10.000}{(1 + 0,044)^6} = 10.155,24.$$

2) Ο χρόνος ωρίμανσης (maturity) επηρεάζει την ευαισθησία της τιμής του ομολόγου.

Τα βραχυπρόθεσμης διάρκειας ομόλογα παρουσιάζουν διαφορετική μεταβλητότητα στις τιμές (price volatility). Για ομόλογα που πληρώνουν το ίδιο κουπόνι, τα μακροπρόθεσμα μεταβάλλουν περισσότερο αναλογικά τις τιμές τους από τα αντίστοιχα ομόλογα βραχυπρόθεσμης διάρκειας για μια δεδομένη αλλαγή του επιτοκίου αγοράς.

Παράδειγμα: Έστω το προηγούμενο παράδειγμα με μοναδική διαφοροποίηση ότι ο χρόνος ωρίμανσης τώρα είναι 6 χρόνια (αντί 3 χρόνια που ήταν στο παράδειγμα).

$$\text{τιμή} = \sum_{t=1}^{12} \left(\frac{470}{(1 + 0,05)^t} \right) + \frac{10.000}{(1 + 0,05)^{12}} = 9.734,10$$

$$\text{τιμή} = \sum_{t=1}^{12} \left(\frac{470}{(1 + 0,044)^t} \right) + \frac{10.000}{(1 + 0,044)^{12}} = 10.275,13.$$

Όταν το επιτόκιο αυξάνεται και στα δύο ομόλογα, τότε η τιμή του ομολόγου διάρκειας 6 ετών μειώνεται περισσότερο από την αντίστοιχη τιμή ομολόγου διάρκειας 3 ετών. Επίσης, όταν το επιτόκιο μειώνεται και στα δύο ομόλογα, τότε η τιμή του ομολόγου διάρκειας 6 ετών αυξάνεται περισσότερο από την αντίστοιχη αύξηση του ομολόγου διάρκειας 3 ετών.

3) Το μέγεθος του τοκομεριδίου επηρεάζει την ευαισθησία της τιμής του ομολόγου.

Υψηλά τοκομερίδια και χαμηλού ύψους τοκομερίδια προκαλούν διαφορετική μεταβλητότητα στην τιμή του ομολόγου. Για μια δεδομένη αλλαγή του επιτοκίου αγοράς, το ομόλογο με το χαμηλότερο τοκομερίδιο θα μεταβάλει την τιμή του ομολόγου περισσότερο από το αντίστοιχο ομόλογο με το υψηλότερο τοκομερίδιο.

2.2.4 Ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου

Στο είδος αυτών των ομολόγων το ποσό της πληρωμής των κουπονιών δεν είναι σταθερό για όλη τη διάρκεια ζωής της έκδοσης. Καθορίζεται διαφορετικά για κάθε περίοδο εκτοκισμού, αλλά με τρόπο προκαθορισμένο στην αρχική έκδοση.

Η τιμολόγηση των ομολόγων κυμαινόμενου επιτοκίου είναι μια σύνθετη υπόθεση, αφού πρέπει να προεξοφληθούν μελλοντικές ροές οι οποίες δεν είναι γνωστές. Η προσπάθεια προσδιορισμού της παρούσας αξίας των μελλοντικών ροών μπορεί να γίνει μόνο στη βάση ορισμένων στατιστικών εκτιμήσεων, γεγονός όμως που αφήνει περιθώριο σφάλματος. Για το λόγο αυτό λαμβάνουμε υπόψη μόνο τα δεδομένα της τρέχουσας περιόδου, όπου είναι γνωστό ακριβώς το επιτόκιο του κουπονιού. Έτσι, αναζητάμε την τιμή που θα συμβαδίζει με την απόδοση της αγοράς αν δεχτούμε ότι οι τελικές εισροές του (τέλος τρέχουσας περιόδου) θα είναι η ονομαστική αξία συν το τρέχον κουπόνι. Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο:

$$PV = \frac{F(1 + \varepsilon)}{1 + \frac{U * n}{B}}$$

όπου:

F = ονομαστική αξία

ε = επιτόκιο κουπονιού

U = απόδοση επενδυτή

n = ημέρες που απομένουν ως το τέλος της περιόδου

PV = τρέχουσα τιμή

B = οι μέρες του έτους

Παράδειγμα: Έστω ομόλογο ονομαστικής αξίας €1.000.000 λήγει στις 30/9/2005. Ποια είναι η τιμή του στις 15/5/2000 αν είναι γνωστό ότι το επιτόκιο της τρέχουσας περιόδου (30/9/1999-30/9/2000) έχει καθοριστεί σε 10% και ότι η απόδοση για τον επενδυτή θα είναι 8,5%?

Λύση:

Αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε:

$$PV = \frac{F(1 + \varepsilon)}{1 + \frac{U * n}{B}} = \frac{1.000.000(1 + 0,10)}{1 + \frac{0,085 * 138}{365}} = \frac{1.100.000}{1,032} = 1.065.891,472$$

2.2.5 Ομόλογα χωρίς τοκομερίδια

Στα ομόλογα αυτά δεν υπάρχουν κουπόνια αλλά προβλέπεται μια μόνο χρηματοροή κατά τη λήξη τους. Το ομόλογο χωρίς τοκομερίδιο (zero coupon bond) πωλείται προεξοφλημένο και υπόσχεται την ονομαστική αξία κατά τη λήξη του. Συνεπώς, η τιμή του προκύπτει με απλή προεξόφληση της τελικής αξίας:

$$PV = \frac{K}{(1 + i)^n}.$$

2.3 Αποτίμηση των έντοκων γραμματίων του δημοσίου

Τα έντοκα γραμμάτια:

- Είναι βραχυπρόθεσμα χρεωστικά χρεόγραφα του θησαυροφυλακίου κάθε χώρας και συνήθως είναι 3, 6 και 12 μηνών.
- Διοχετεύονται στην αγορά μέσω δημοπρασιών στις οποίες συμμετέχουν οι πρωταρχικοί διαπραγματευτές.
- Συνιστούν σημαντική πηγή ρευστότητας των επιχειρήσεων και του κοινού.
- Δεν πληρώνουν ενδιάμεσους τόκους και ως εκ τούτου ονομάζονται χρεόγραφα καθαρής προεξόφλησης (χωρίς τοκομερίδιο).
- Τα χρεόγραφα χωρίς τοκομερίδιο έχουν μόνο μία ταμειακή ροή, μια εφάπαξ πληρωμή κατά τη λήξη της ομολογίας.

Το διακριτικό γνώρισμα ενός έντοκου γραμματίου αλλά και γενικά των χρεογράφων χωρίς τοκομερίδιο είναι ότι η λήξη του και η μέση διάρκεια αναμονής του είναι ίσες. Οποιοδήποτε άλλο χρεόγραφο με ενδιάμεση

ταμειακή ροή έχει μέση διάρκεια αναμονής μικρότερη από τη λήξη του. Η τιμή αγοράς των έντοκων γραμματίων προκύπτει μετά την αφαίρεση των τόκων, που υπολογίζονται επί της ονομαστικής αξίας για το χρονικό διάστημα που αρχίζει από τη χρονική στιγμή της αγοράς μέχρι τη λήξη του τίτλου.

Χρησιμοποιούνται 3 εναλλακτικοί τρόποι για να εκφραστεί η απόδοση ενός εντόκου γραμματίου:

- η τραπεζική προεξόφληση,
- το ισοδύναμο τοκομερίδιο και
- η αποτελεσματική (effective) απόδοση.

1) Η **τραπεζική προεξόφληση** υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$i_{dr} = \frac{P_f - P_o}{P_f} * \frac{360}{h}$$

όπου:

i_{dr} = προεξοφλητικό επιτόκιο

P_o = η τιμή του εντόκου κατά τη στιγμή της προεξόφλησης

P_f = η τελική τιμή του εντόκου τη στιγμή της ωρίμανσης

h = το χρονικό διάστημα (σε ημέρες) που απομένει ως την ωρίμανση.

Παράδειγμα: Έστω συναλλαγή €10.000, το κόστος ενός εντόκου γραμματίου 6 μηνών είναι €9.645,00 και η προεξόφληση €355,00. Συνεπώς, ο επενδυτής είχε έσοδα €355,00 για μια επένδυση €9.645,00 κατά την περίοδο 180 ημερών. Ποια είναι η ετήσια απόδοση (i^*) του εξάμηνου γραμματίου με τη χρήση της μεθόδου της τραπεζικής προεξόφλησης?

Λύση:

$$i_{dr} = \frac{P_f - P_o}{P_f} * \frac{360}{h} = \frac{355,00}{10.000} * \frac{360}{180} = 7,1\%.$$

2) Η **πραγματική απόδοση** ενός εντόκου γραμματίου προσδιορίζεται σύμφωνα με το γενικό τύπο:

$$i_{EG} = \left(1 + \frac{P_f - P_o}{P_o}\right)^{\frac{365}{N}} - 1$$

Συγκρίνοντας τον τύπο αυτό με τον αντίστοιχο της τραπεζικής προεξόφλησης διαπιστώνουμε τις εξής διαφορές:

- σύνθετο επιτόκιο αντι του απλού,
- το έτος αντιστοιχεί σε 365 ημέρες
- η προεξόφληση διαιρείται δια της τιμής του εντόκου και όχι δια της ονομαστικής τιμής.

Παράδειγμα (συνέχεια προηγούμενου): Έστω συναλλαγή €10.000, το κόστος ενός εντόκου γραμματίου 6 μηνών είναι €9.645,00 και η προεξόφληση €355,00. Συνεπώς, ο επενδυτής είχε έσοδα €355,00 για μια επένδυση €9.645,00 κατά την περίοδο 182 ημερών. Ποια είναι η πραγματική ετήσια απόδοση (i^*) του εξάμηνου γραμματίου?

Λύση:

$$i^* = \left(1 + \frac{P_f - P_o}{P_o}\right)^{\frac{365}{N}} - 1 = \left(1 + \frac{355,00}{9.645,00}\right)^{\frac{365}{182}} - 1 = 7,40\%.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η πραγματική απόδοση είναι μεγαλύτερη κατά 30 (=7,40-7,10) σημεία βάσης από την απόδοση που προέκυψε με τη μέθοδο της τραπεζικής προεξόφλησης.

3) Για τον υπολογισμό της απόδοσης με τη μέθοδο του **ισοδύναμου τοκομεριδίου** χρησιμοποιείται η εσωτερική προεξόφληση. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$i_{\text{ισοδύναμο τοκομερίδιο}} = \frac{F - P}{P} * \frac{365}{N}$$

Παράδειγμα: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, η απόδοση του ισοδύναμου τοκομεριδίου είναι:

$$\begin{aligned} i_{\text{ισοδύναμο τοκομερίδιο}} &= \frac{F - P}{P} * \frac{365}{N} = \frac{10.000 - 9.645,00}{9.645,00} * \frac{365}{182} \\ &= 7,37\%. \end{aligned}$$

2.4 Κίνδυνος επιτοκίων

Ο κίνδυνος επιτοκίων αναφέρεται:

- στην πιθανότητα μείωσης της τιμής κάποιου χρηματοπιστωτικού μέσου και κατά συνέπεια και στη μείωση της καθαρής θέσης ή των ιδίων κεφαλαίων του πιστωτικού ιδρύματος και
- στην πιθανότητα μείωσης του εισοδήματός του

σε μια απρόβλεπτη ή μη επιθυμητή εξέλιξη των επιτοκίων.

Προηγουμένως, είδαμε την άμεση σχέση μεταξύ επιτοκίου και απόδοσης και τρέχουσας αξίας ή τιμής των ομολόγων. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι η τιμή του ομολόγου μειώνεται στην περίπτωση αύξησης των επιτοκίων, ενώ αυξάνεται στην περίπτωση μείωσης των επιτοκίων. Επομένως, το ομόλογο σταθερής απόδοσης μπορεί να εμφανίσει ζημιά, απεικονιζόμενη στην τρέχουσα τιμή του, οφειλόμενη σε μεταβολή των επιτοκίων. Ο κίνδυνος αυτός είναι γνωστός ως κίνδυνος επιτοκίων και πιο συγκεκριμένα ως κίνδυνος επιτοκίων θέσης.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου, αλλά και κάθε άλλου τίτλου σταθερού εισοδήματος, είναι η μέθοδος του τροποποιημένου δείκτη διάρκειας (modified duration-MD) και της κυρτότητας (convexity) που θα δούμε στη συνέχεια.

2.5 Μέση διάρκεια αναμονής αξιών

Επειδή το μέγεθος της μεταβολής της τιμής ενός τίτλου εξαρτάται από ορισμένους παράγοντες (χρόνος ωρίμανσης, μέγεθος του τοκομεριδίου, κλπ.), δεν είναι δυνατόν να ειπωθεί εκ των προτέρων εάν τα εν λόγω χαρακτηριστικά των τίτλων διαφέρουν και ποιος τίτλος θα επηρεασθεί περισσότερο από μια μεταβολή του επιτοκίου.

Άρα, απαιτείται να καταρτιστεί ένας συνθετικός δείκτης που να καταγράφει την ευαισθησία των τιμών των τίτλων έναντι των μεταβολών του επιτοκίου και να λαμβάνει υπόψη του τα διάφορα χαρακτηριστικά του τίτλου. Αυτός ο δείκτης ονομάζεται **μέση διάρκεια αναμονής των αξιών (duration-D)**.

Αυτός ο δείκτης είναι: ο μέσος σταθμικός όρος των ετών αναμονής 1, 2, 3, ..., n που χρειάζεται να παρέλθουν για να γίνει η καταβολή (είσπραξη ή πληρωμή) των αντίστοιχων ετήσιων τοκομεριδίων με τα ποσοστά, που οι εν λόγω ετήσιες εισπράξεις αναχθείσες σε παρούσα αξία,

αντιπροσωπεύουν επί της τρέχουσας τιμής του τίτλου. Έτσι, εάν P είναι η τρέχουσα τιμή τίτλου και $t=1,2,3,\dots,n$ είναι τα έτη κατά τα οποία θα εισπραχθούν αντιστοίχως τα ποσά R_t , αντιπροσωπεύοντας τόκους και κεφάλαιο, η D εκφράζεται ως εξής:

$$D = \frac{1 * \frac{R_1}{1+i}}{P} + \frac{2 * \frac{R_2}{(1+i)^2}}{P} + \frac{3 * \frac{R_3}{(1+i)^3}}{P} + \dots + \frac{n * \frac{R_n}{(1+i)^n}}{P} + \frac{n * \frac{R}{(1+i)^n}}{P}$$

Ως αξία χρόνου σε χρηματική βάση, η duration μετρά τις τις χρονικές περιόδους που απαιτούνται για την επαναπόκτηση της αρχικής αξίας (επένδυση του δανείου).

Κάθε ταμειακή ροή που ανακτάται πριν από το χρόνο που σηματοδοτεί η duration αντιπροσωπεύει την αρχική επένδυση, ενώ η ταμειακή ροή που ανακτάται μετά το χρόνο που σηματοδοτεί η duration και πριν την ωρίμανση αντιπροσωπεύει τα κέρδη ή την αυξημένη απόδοση του τραπεζικού ιδρύματος.

Υπολογισμός duration (παραδείγματα)

Παράδειγμα 1 (προηγούμενου κεφαλαίου-συνέχεια): Έστω ομόλογο με εξαμηνιαίο σταθερό ποσό πληρωμής €470 και χρόνο ωρίμανσης 3 χρόνια. Το τρέχον επιτόκιο είναι 9,4% ετησίως. Υπολογίστε τη μέση αναμονή (duration) αν το κεφάλαιο που θα λάβει στο τέλος του χρόνου ωρίμανσης είναι €10.000.

Λύση:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1 * \frac{R_1}{1+i}}{P} + \frac{2 * \frac{R_2}{(1+i)^2}}{P} + \frac{3 * \frac{R_3}{(1+i)^3}}{P} + \dots + \frac{n * \frac{R_n}{(1+i)^n}}{P} + \frac{n * \frac{R}{(1+i)^n}}{P} \\ &= \frac{1 * \frac{470}{(1,047)^1}}{10.000} + \frac{2 * \frac{470}{(1,047)^2}}{10.000} + \frac{3 * \frac{470}{(1,047)^3}}{10.000} + \frac{4 * \frac{470}{(1,047)^4}}{10.000} + \frac{5 * \frac{470}{(1,047)^5}}{10.000} \\ &\quad + \frac{6 * \frac{470}{(1,047)^6}}{10.000} + \frac{6 * \frac{10.000}{(1,047)^6}}{10.000} \\ &= \frac{1 * \frac{470}{(1,047)^1}}{10.000} + \frac{2 * \frac{470}{(1,047)^2}}{10.000} + \frac{3 * \frac{470}{(1,047)^3}}{10.000} + \frac{4 * \frac{470}{(1,047)^4}}{10.000} + \frac{5 * \frac{470}{(1,047)^5}}{10.000} \end{aligned}$$

$$+ \frac{6 * \frac{10.470}{(1,047)^6}}{10.000} = 5,36 \text{ εξαμηνιαίες περιοδοι ή } 2,68 \text{ έτη.}$$

Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι το τρέχον επιτόκιο ισορροπίας της αγοράς είναι 9,4% ετησίως, και συνεπώς ίσο με την απόδοση του ομολόγου ($940/10.000=9,4\%$), η τρέχουσα τιμή του είναι πάντοτε ίση με την ονομαστική τιμή του.

Παράδειγμα 2:

Α. Τίτλος (1): ονομαστική αξία 100, ονομαστικό τρέχον επιτόκιο 10%, χρόνος ωρίμανσης 6 χρόνια, σταθερό ποσό ανά έτος 10.

Άρα, απόδοση = $10/100=10\%$ (ίδια με τρέχον επιτόκιο).

$$D_1 = \frac{1 * \frac{10}{(1,10)^1}}{100} + \frac{2 * \frac{10}{(1,10)^2}}{100} + \frac{3 * \frac{10}{(1,10)^3}}{100} + \frac{4 * \frac{10}{(1,10)^4}}{100} + \frac{5 * \frac{10}{(1,10)^5}}{100} + \frac{6 * \frac{110}{(1,10)^6}}{100} = 4,7907 \text{ έτη}$$

Πάλι εδώ συμβαίνει ότι και στο προηγούμενο παράδειγμα όσον αφορά στην τρέχουσα τιμή του ομολόγου.

Β. Τίτλος (2): σταθερό ποσό ανά έτος 5%, όλα τα άλλα στοιχεία είναι ίδια.

Άρα, απόδοση = $(100*5\%)/100=5\% \neq 10\%$. Επομένως, εδώ το P, είναι διαφορετικό από την ονομαστική αξία. Άρα υπολογίζουμε πρώτα το P.

$$P = \sum_{t=1}^{n=6} \frac{5}{1,10^t} + \frac{100}{1,10^6} = 78,22369$$

$$D_2 = \frac{1 * \frac{5}{(1,10)^1}}{78,22369} + \frac{2 * \frac{5}{(1,10)^2}}{78,22369} + \frac{3 * \frac{5}{(1,10)^3}}{78,22369} + \frac{4 * \frac{5}{(1,10)^4}}{78,22369} + \frac{5 * \frac{5}{(1,10)^5}}{78,22369} + \frac{6 * \frac{105}{(1,10)^6}}{78,22369} = 5,2271 \text{ έτη}$$

Παράδειγμα 3: Ομόλογο ονομαστικής αξίας €1.000 έχει διάρκεια ζωής 6 έτη και δίνει σταθερό τοκομερίδιο ύψους €80. Το επιτόκιο αγοράς είναι 8% ετησίως. Να υπολογιστεί η duration του ομολόγου.

Λύση: (Λύνουμε όπως στο παράδειγμα 1 γιατί $80/1000=8\%$)

$$D = \frac{1 * \frac{80}{(1,08)^1}}{1000} + \frac{2 * \frac{80}{(1,08)^2}}{1000} + \frac{3 * \frac{80}{(1,08)^3}}{1000} + \frac{4 * \frac{80}{(1,08)^4}}{1000} + \frac{5 * \frac{80}{(1,08)^5}}{1000} + \frac{6 * \frac{1080}{(1,08)^6}}{1000} = 4,993 \text{ έτη.}$$

Η duration σε ομόλογο χωρίς τοκομερίδιο (zero-coupon bond)

Επειδή στα ομόλογα αυτά δεν υπάρχουν ενδιάμεσες πληρωμές και η τιμή τους προκύπτει από την προεξόφληση της τελικής του (σταθερής) αξίας, η duration μόνο σε αυτού του είδους τα ομόλογα είναι ίση με το χρόνο ωρίμανσής τους. Σε όλα τα άλλα είδη ομολόγων που καταβάλλουν κάποια ενδιάμεση εισροή, η duration είναι πάντοτε μικρότερη από το χρόνο ωρίμανσης.

Η duration σε ομόλογα χωρίς λήξη (perpetuities)

Τα ομόλογα αυτά δεν ωριμάζουν ποτέ. Η duration σε αυτού του είδους τα ομόλογα δίνεται από τον τύπο:

$$D_{prep} = 1 + \frac{1}{i}$$

όπου i = η απαιτούμενη απόδοση κατά την ωρίμανση.

Εάν για **παράδειγμα** η καμπύλη απόδοσης δίνει $i=4\%$ ετησίως, τότε η duration ενός ομολόγου χωρίς λήξη είναι:

$$D_{prep} = 1 + \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{0,04} = 1 + 25 = 26 \text{ έτη.}$$

Αυτό σημαίνει ότι σε 26 χρόνια, με βάση τη χρονική αξία του χρήματος, ο επενδυτής θα ανακτήσει το κεφάλαιό του και μετά από 26 χρόνια θα αρχίσει να έχει κέρδος.

Η τιμή της D_{prep} είναι αντιστρόφως ανάλογη με το επιτόκιο αγοράς.

Τεκμαρτή duration (modified duration)

Από τον τύπο:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D * \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right]$$

της duration μπορούμε να συνδυάσουμε την D και τον όρο (1+i) σε μια μεταβλητή και να δημιουργήσουμε την ονομαζόμενη τεκμαρτή duration (MD):

$$MD = \frac{D}{1+i}$$

Και για ετήσιο σύνθετο ανατοκισμό, αντικαθιστώντας τον τύπο της MD στον τύπο της D, ως μέτρο ευαισθησίας του επιτοκίου, έχουμε:

$$\frac{\Delta P}{P} = MD * \Delta i$$

Ο παραπάνω τύπος είναι περισσότερο διαισθητικός, γιατί πολλαπλασιάζουμε την MD με απλές μεταβολές του επιτοκίου, και όχι με τις προεξοφλημένες αλλαγές του επιτοκίου, όπως στη γενική εξίσωση της duration.

Παράδειγμα: Στο παραπάνω παράδειγμα 3 (Ομόλογο ονομαστικής αξίας €1.000 έχει διάρκεια ζωής 6 έτη και δίνει σταθερό τοκομερίδιο ύψους €80. Το επιτόκιο αγοράς είναι 8% ετησίως. Να υπολογιστεί η duration του ομολόγου.) είχαμε υπολογίσει τη duration 4,993 έτη. Τώρα υποθέτουμε ότι το επιτόκιο αυξάνεται από 8% σε 8,01%. Ποια θα είναι η νέα τιμή του ομολόγου μετά την αύξηση του επιτοκίου?

Θα έχουμε:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D * \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right]$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -(4,993) * \frac{0,0001}{1,08} = -0,000462$$

και

$$\Delta P = -0,000462 * 1.000 = -0,462.$$

Άρα, η νέα τιμή του ομολόγου θα είναι 1.000-0,462=999,538 μετά την αύξηση του επιτοκίου κατά 1 μονάδα βάσης.

2.5.1. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μέση διάρκεια αναμονής αξιών

Η μέση διάρκεια αναμονής αξιών (duration) είναι συνάρτηση:

- του χρόνου ζωής του ομολόγου,
- του κουπονιού και
- του τρέχοντος επιτοκίου.

Συγκεκριμένα:

Η σχέση duration και χρόνου ωρίμανσης είναι ανάλογη. Στην περίπτωση ομολόγου χωρίς κουπόνι είναι γραμμική και ευθέως ανάλογη. Όταν το ομόλογο φέρει κουπόνι είναι ανάλογη αλλά όχι γραμμική.

Σχέση duration και κουπονιού: Η duration για ομόλογα μικρού ύψους (κουπονιού) τείνει προς το χρόνο ωρίμανσης, ενώ αντίθετα όσο μεγαλώνει το μέγεθος του κουπονιού τα δύο μεγέθη αποκλίνουν.

Η σχέση duration και τρέχοντος επιτοκίου είναι αντιστρόφως ανάλογη. Το ύψος του τρέχοντος επιτοκίου αποτελεί το συντελεστή προεξόφλησης, γεγονός που σημαίνει ότι η αύξησή του μειώνει το σχετικό βάρος των πιο απομακρυσμένων πληρωμών.

2.5.2 Μέση διάρκεια αναμονής και μεταβλητότητα τιμής

Η μεταβλητότητα της τιμής ενός ομολόγου σχετίζεται μεταξύ:

- του επιτοκίου αγοράς στην αγορά των ομολόγων,
- της περιοδικότητας πληρωμών των τόκων και
- του χρόνου ωρίμανσης.

Η μεταβλητότητα αλλάζει συστηματικά καθώς κάποιος από αυτούς τους τρεις παράγοντες αλλάζει. Η μέση διάρκεια αναμονής (duration) χρησιμοποιείται ως μέτρο αυτών των σχέσεων.

Η μέση διάρκεια αναμονής ως μέτρο ελαστικότητας

Η διάρκεια είναι το μέτρο της «πραγματικής» (effective) ωρίμανσης η οποία ενσωματώνει την ακριβή χρονική στιγμή και το μέγεθος των ταμειακών ροών των χρεογράφων. Καλύπτει δηλαδή τη συνδυασμένη επιρροή του επιτοκίου αγοράς, τη χρονική σειρά πληρωμών και την ωρίμανση που εμφανίζονται στη μεταβλητότητα της τιμής του χρεογράφου.

Η έννοια γίνεται εύκολα κατανοητή ως μέτρο ελαστικότητας του επιτοκίου σε σχέση με τον προσδιορισμό της αγοραίας αξίας ενός χρεογράφου. Μαθηματικά δίνεται από τον τύπο:

$$D = - \left[\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{(1+i)}} \right]$$

Η ελαστικότητα τιμής είναι πάντοτε αρνητική, γιατί οι τιμές των στοιχείων ενεργητικού και τα επιτόκια είναι αντιστρόφως ανάλογα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της τιμής (ΔP) ενός χρεογράφου:

$$\Delta P = -duration \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right] P$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του duration ως μέτρο ευαισθησίας:

$$\frac{\Delta P}{P} = -duration \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right]$$

2.5.3 Η μέση διάρκεια αναμονής και η κυρτότητα

Όπως αναφέραμε, η duration μετρά τον σταθμισμένο μέσο χρόνο αναμονής μέχρις ότου οι ταμειακές ροές ενός χρεογράφου έχουν πραγματοποιηθεί. Η στάθμιση εξισώνει την παρούσα αξία κάθε ταμειακής ροής διαιρούμενης με την τρέχουσα τιμή του χρεογράφου. Εναλλακτικά, η duration χρησιμοποιείται ως μέτρο ελαστικότητας, καθώς μετρά την ευαισθησία της σχετικής τιμής του χρεογράφου με τη μεταβολή του επιτοκίου.

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα ομόλογο 3 χρονών ωρίμανσης, 10.000 ονομαστικής αξίας, επιτόκιο αγοράς 10% και 10% κουπόνι (απόδοση) πληρωτέο ανά έξι μήνες (500) και στην ωρίμανση επιστρέφεται το συνολικό ποσό.

Λύση:

Υπολογισμός τιμής ομολόγου και duration για επιτόκιο αγοράς **10%**:

$$P = \sum_{t=1}^{n=6} \frac{500}{1,05^t} + \frac{10.000}{1,05^6} = \mathbf{10.000}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1 * \frac{R_1}{1+i}}{P} + \frac{2 * \frac{R_2}{(1+i)^2}}{P} + \frac{3 * \frac{R_3}{(1+i)^3}}{P} + \dots + \frac{n * \frac{R_n}{(1+i)^n}}{P} + \frac{n * \frac{R}{(1+i)^n}}{P} \\
&= \frac{1 * \frac{500}{(1,05)^1}}{10.000} + \frac{2 * \frac{500}{(1,05)^2}}{10.000} + \frac{3 * \frac{500}{(1,05)^3}}{10.000} + \frac{4 * \frac{500}{(1,05)^4}}{10.000} + \frac{5 * \frac{500}{(1,05)^5}}{10.000} \\
&\quad + \frac{6 * \frac{10.500}{(1,05)^6}}{10.000} = \mathbf{5,329} \text{ εξαμηνιαίες περιόδοι ή } \mathbf{2,665} \text{ έτη.}
\end{aligned}$$

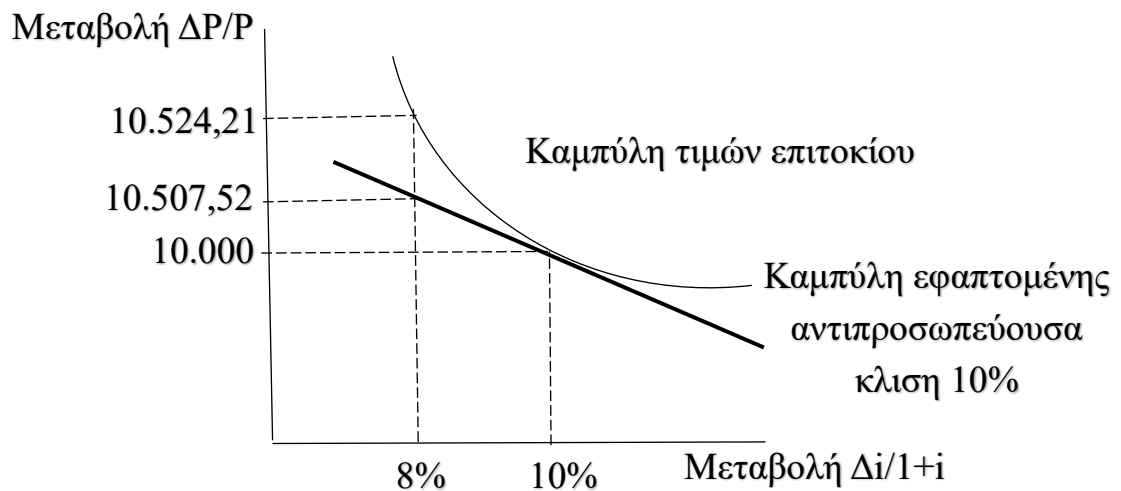
Υπολογισμός τιμής ομολόγου και duration για επιτόκιο αγοράς **8%**:

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{n=6} \frac{500}{1,04^t} + \frac{10.000}{1,04^6} = \mathbf{10.524,21} \\
D &= \frac{1 * \frac{R_1}{1+i}}{P} + \frac{2 * \frac{R_2}{(1+i)^2}}{P} + \frac{3 * \frac{R_3}{(1+i)^3}}{P} + \dots + \frac{n * \frac{R_n}{(1+i)^n}}{P} + \frac{n * \frac{R}{(1+i)^n}}{P} \\
&= \frac{1 * \frac{500}{(1,04)^1}}{10.524,21} + \frac{2 * \frac{500}{(1,04)^2}}{10.524,21} + \frac{3 * \frac{500}{(1,04)^3}}{10.524,21} + \frac{4 * \frac{500}{(1,04)^4}}{10.524,21} + \frac{5 * \frac{500}{(1,04)^5}}{10.524,21} \\
&\quad + \frac{6 * \frac{10.500}{(1,04)^6}}{10.524,21} = \mathbf{5,349} \text{ εξαμηνιαίες περιόδοι.}
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τιμές ομολόγου και duration για επιτόκια αγοράς 9%, 11% και 12% και συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Επιτόκιο αγοράς	τιμή	Τρέχουσα τιμή-ονομαστική τιμή	Duration (εξαμηνιαία)
8%	10.524,21	524,21	5,349
9%	10.257,89	257,89	5,339
10%	10.000	0	5,329
11%	9.750	(249,78)	5,320
12%	9.508	(491,73)	5,310

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η σχέση που συνδέει την τιμή του ομολόγου και τις μεταβολές του επιτοκίου αγοράς (όπως τα υπολογίσαμε στον παραπάνω πίνακα).



Η duration μπορεί να παρουσιαστεί γραφικά ως η κλίση της καμπύλης τιμής-επιτοκίου, δηλαδή της πρώτης παραγώγου, και προσεγγιστικά υπολογίζεται από τον τύπο:

$$duration = - \left[\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{(1+i)}} \right]$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον ακόλουθο τρόπο: υποθέτουμε ότι το επιτόκιο αγοράς είναι 10%, έτσι η duration είναι 5,329 εξαμηνιαία ή 2,665 χρόνια (όπως το υπολογίσαμε παραπάνω). Εάν το επιτόκιο αγοράς πέσει στο 8%, η τιμή του ομολόγου θα αυξηθεί στο 10.524,21 σύμφωνα με τον τύπο της παρούσας αξίας (που υπολογίσαμε και αυτό παραπάνω στον πίνακα).

Σύμφωνα όμως με τον παραπάνω τύπο, προσεγγιστικά η μεταβολή της τιμής του ομολόγου θα είναι:

$$duration = - \left[\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{(1+i)}} \right] \rightarrow \Delta P = -duration \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right] * P$$

$$\Delta i = 8\% - 10\% = -2\% \text{ ετησίως άρα } -1\% \text{ εξαμηνιαία άρα } -0,01$$

Το αρχικό i ήταν 10% άρα 5% εξαμηνιαία

Άρα:

$$\Delta P = -5,329 * \left(-\frac{0,01}{1,05}\right) * 10.000 = \mathbf{507,52}$$

και η τιμή του ομολόγου θα είναι:

$$10.000 + 507,52 = 10.507,52.$$

Η τιμή αυτή μπορεί να διαβαστεί στη γραφική παράσταση στο σημείο όπου η ευθεία γραμμή η οποία αντιπροσωπεύει την κλίση της καμπύλης τιμής-επιτοκίου για επιτόκιο αγοράς 10% τέμνει την κάθετη ευθεία που αντιπροσωπεύει το υποτιθέμενο επιτόκιο αγοράς 8%.

Το εμφανιζόμενο λάθος, σε σχέση με την τιμή του ομολόγου όπως αυτό δίνεται από την καμπύλη τιμών-επιτοκίων (στον πίνακα που υπολογίσαμε) είναι: **10.524,21-10.507,52=16,69**.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το επιτόκιο αγοράς ανεβαίνει στο 12%, η τιμή του ομολόγου θα πέσει στο 9.508,27, δηλαδή η μείωση θα είναι 491,73.

Αν συγκρίνουμε τη μείωση αυτή με την αύξηση στην τιμή του ομολόγου στη ίδια (απόλυτη) μεταβολή του επιτοκίου αγοράς 2% (δηλαδή συγκρίνοντας τις τιμές του 8% με του 12%), παρατηρούμε ότι η μείωση (στην τιμή) είναι μικρότερη από την αύξηση (491,73<524,21).

Επίσης, το λάθος που παρουσιάζεται στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$duration = - \left[\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{(1+i)}} \right] \rightarrow \Delta P = -duration \left[\frac{\Delta i}{1+i} \right] * P$$

$$\Delta i = 12\% - 10\% = 2\% \text{ ετησίως άρα } 1\% \text{ εξαμηνιαία άρα } 0,01$$

$$\text{Το αρχικό } i \text{ ήταν } 10\% \text{ άρα } 5\% \text{ εξαμηνιαία}$$

Άρα:

$$\Delta P = -5,329 * \left(\frac{0,01}{1,05}\right) * 10.000 = -507,52$$

και η τιμή του ομολόγου θα είναι:

$$10.000 - 507,52 = 9.492,48.$$

Άρα, το εμφανιζόμενο λάθος, σε σχέση με την τιμή του ομολόγου όπως αυτό δίνεται από την καμπύλη τιμών-επιτοκίων (στον πίνακα που υπολογίσαμε) είναι: $9.508,27 - 9.492,48 = 15,79$.

Επίσης, το λάθος που παρουσιάζεται στην περίπτωση αυτή είναι μικρότερο 15,79 από το 16,69.

Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι τα ακόλουθα:

- Η διαφορά μεταξύ της καμπύλης τιμή-επιτοκίου και της ευθείας γραμμής που αντιπροσωπεύει την duration στο σημείο της εφαπτομένης είναι ίση με το λάθος που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον ‘προσεγγιστικό’ τύπο για να εκτιμηθεί η αλλαγή στην τιμή στην τιμή του ομολόγου σε κάθε μεταβολή του επιτοκίου.
- Σε αμφότερες τις περιπτώσεις αύξησης ή μείωσης του επιτοκίου η εκτιμώμενη τιμή του ομολόγου που βασίζεται στην duration θα είναι χαμηλότερη από την πραγματική τιμή.
- Για μικρές αλλαγές του επιτοκίου, το λάθος στην εκτίμηση της τιμής θα είναι μικρό. Αντίθετα, για μεγάλες αλλαγές του επιτοκίου το λάθος στην εκτίμηση θα είναι μεγάλο.

Συμπερασματικά, ο τύπος της duration μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τιμής του χρεογράφου σε περιπτώσεις που οι αλλαγές του επιτοκίου είναι πολύ μικρές.

Η **κυρτότητα (convexity)**, αντίθετα, χαρακτηρίζει το ρυθμό αλλαγής της duration όταν το επιτόκιο αγοράς μεταβάλλεται. Με τον τρόπο αυτό επιχειρείται να βελτιωθεί η χρησιμοποίηση της duration ως προσεγγιστικού μέτρου της μεταβλητότητας της τιμής του ομολόγου.

Ουσιαστικά η duration ομολόγου επιμηκύνεται όταν το επιτόκιο πέφτει και σμικρύνεται όταν το επιτόκιο αυξάνει. Αυτό το χαρακτηριστικό ονομάζεται **θετική κυρτότητα** και σημαίνει ότι το υποκείμενο ομόλογο γίνεται περισσότερο ευαίσθητο ως προς την τιμή όταν μειώνεται το επιτόκιο και λιγότερο ευαίσθητο όταν αυξάνεται το επιτόκιο.

Η κυρτότητα μπορεί να οριστεί ως η δεύτερη παράγωγος της τιμής του ομολόγου ως προς το επιτόκιο. Η κυρτότητα του ομολόγου μπορεί να συνδυαστεί με την duration για την καλύτερη εκτίμηση της αληθινής μεταβολής της τιμής του ομολόγου όταν το επιτόκιο αλλάζει. Η κυρτότητα καλύπτει μέρος του λάθους που παράγεται με τη χρήση μόνο της duration.

Παράδειγμα: Όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας μόνο τη duration, όταν το επιτόκιο μειώνεται από 10% σε 8%, η μεταβολή της τιμής του ομολόγου είναι 507,52.

Υπολογίζουμε τώρα την κυρτότητα με επιτόκιο αγοράς 10%. Η εκτιμώμενη κυρτότητα του ομολόγου είναι 16,23 εξαμηνιαία. Η εκτιμώμενη αλλαγή της τιμής του ομολόγου, οφειλόμενη στην κυρτότητα (μόνο) δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}\Delta P(\text{οφειλόμενη στην κυρτότητα}) &= \frac{1}{2} * \text{κυρτότητα} * (\Delta i)^2 * P \\ &= 16,23 * 0,01^2 * 10.000 = 16,23\end{aligned}$$

θεωρώντας μεταβολή επιτοκίου 1% εξαμηνιαίως. Έτσι η εκτιμώμενη αλλαγή της τιμής σύμφωνα με την duration και την κυρτότητα μαζί είναι:

$$507,52 + 16,23 = 523,75$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια την τιμή του ομολόγου:

$$10.000 + 523,75 = 10.523,75$$

, η οποία απέχει ελάχιστα (0,46) από την πραγματική τιμή του ομολόγου, η οποία ανέρχεται σε 10.524,21 (όπως υπολογίσαμε πριν στον πίνακα).

Επομένως, με την ταυτόχρονη χρήση της duration και της κυρτότητας επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια στον προσδιορισμό της τιμής του ομολόγου (σχεδόν προσεγγίζεται η ακριβής τιμή).

Υπολογισμός κυρτότητας

Με μεγάλες αυξήσεις του επιτοκίου, η χρήση της duration (μόνη της) υπερτιμά την πτώση της τιμής του ομολόγου σταθερής απόδοσης, ενώ σε μεγάλες μειώσεις του επιτοκίου υποτιμά την αύξηση της τιμής του.

Το αποτέλεσμα αυτό της σχέσης τιμής ομολόγου-απόδοσης ονομάζεται κυρτότητα (convexity). Συνεπώς, ονομάζεται κυρτότητα ο βαθμός καμπυλότητας της καμπύλης τιμής-απόδοσης (ενός χρεογράφου) γύρω από κάποιο επίπεδο επιτοκίου.

Υψηλή κυρτότητα σημαίνει ότι για ίσες μεταβολές του επιτοκίου, το κεφαλαιακό κέρδος λόγω μείωσης του επιτοκίου είναι μεγαλύτερο από την απώλεια του κεφαλαιακού κέρδους που ωφείλεται σε μια αύξηση του επιτοκίου.

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta R}{(1+R)} + \frac{1}{2} * CX * (\Delta R)^2$$

όπου CX είναι η τιμή της κυρτότητας.

Εξ ορισμού, η παράμετρος CX είναι ίση με:

$$CX = \text{βαθμωτός παράγοντας} \left[\begin{array}{cc} \text{κεφαλαιακή απώλεια} & \text{κεφαλαιακό κέρδος} \\ \text{(λόγω αύξησης του} & \text{(λόγω μείωσης του} \\ \text{επιτοκίου αγοράς} & \text{επιτοκίου αγοράς} \\ \text{κατά 1 σημείο βάσης)} & \text{κατά 1 σημείο βάσης)} \\ \text{(αρνητικό αποτέλεσμα)} & \text{(θετικό αποτέλεσμα)} \end{array} \right]$$

Ο βαθμωτός παράγοντας κανονικοποιεί αυτό το μέγεθος για μεταβολές του επιτοκίου μεγαλύτερες του 1%. Ο βαθμωτός παράγοντας που χρησιμοποιείται είναι 10^8 . Άρα, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$CX = 10^8 * \left[\frac{\Delta P^-}{P} + \frac{\Delta P^+}{P} \right]$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η κυρτότητα ενός ομολόγου ονομαστικής αξίας €1.000, με τοκομερίδιο 80, με διάρκεια ζωής 6 έτη, όταν το επιτόκιο αγοράς είναι 8%.

Λύση:

Αρχικά, υπολογίζουμε την τιμή του ομολόγου όταν αυξάνει το επιτόκιο αγοράς κατά 1 μονάδα βάσης, δηλαδή γίνεται 8,01%:

$$P = \sum_{t=1}^{n=6} \frac{80}{1,0801^t} + \frac{1000}{1,0801^6} = 999,53785.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την τιμή του ομολόγου όταν μειώνεται το επιτόκιο αγοράς κατά 1 σημείο βάσης, δηλαδή 7,99%:

$$P = \sum_{t=1}^{n=6} \frac{80}{1,0799^t} + \frac{1000}{1,0799^6} = 1.000,46243.$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον τύπο του convexity:

$$\begin{aligned}
CX &= 10^8 * \left[\frac{\Delta P^-}{P} + \frac{\Delta P^+}{P} \right] \\
&= 10^8 * \left[\frac{999,53785 - 1000}{1000} + \frac{1.000,46243 - 1000}{1000} \right] \\
&= 28
\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον πρώτο τύπο για να υπολογίσουμε την τιμή του ομολόγου με τη διόρθωση της κυρτότητας:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta R}{(1 + R)} + \frac{1}{2} * CX * (\Delta R)^2$$

Έστω ότι έχουμε 2% αύξηση επιτοκίου (από 8% σε 10%) και ότι η duration είναι 4,993:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta P}{P} &= -D \frac{\Delta R}{(1 + R)} + \frac{1}{2} * CX * (\Delta R)^2 = -\frac{4,993}{1,08} * 0,02 + \frac{1}{2} * 28 * 0,02^2 \\
&= -0,0869 \text{ ή } -8,69\%.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το απλό υπόδειγμα της duration (πρώτος όρος της εξίσωσης...), η αύξηση κατά 2% του επιτοκίου αγοράς προκαλεί πτώση της τιμής του ομολόγου κατά -9,25%. Για μεγάλες αλλαγές του επιτοκίου γνωρίζουμε ότι το υπόδειγμα της duration (από μόνο του) υπερεκτιμά τη μείωση της τιμής του ομολόγου.

Το ίδιο υπόδειγμα με τη συμμετοχή της κυρτότητας δείχνει ότι η πτώση της τιμής θα είναι -8,69%. Δηλαδή, ο υπολογισμός της κυρτότητας μειώνει την πτώση της τιμής του ομολόγου κατά 9,25%-8,69%=0,56%.

2.6 Το Υπόδειγμα Ανοίγματος (Gap analysis)

Σκοπός της συγκεκριμένης ανάλυσης είναι να υπολογιστεί το προσδοκώμενο εισόδημα από τόκους και οι πιθανές μεταβολές του, από τη μεταβολή των επιτοκίων καθώς επίσης να καθορίσουν πολιτικές για τη σταθεροποίηση ή την αύξησή του. Η μέθοδος αυτή επικεντρώνεται στον υπολογισμό της διαφοράς των ευμετάβλητων, σε αλλαγές του επιτοκίου, στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού.

Για το σκοπό αυτό επιλέγεται ένα χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο προσδιορίζονται τα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού που δύναται να μεταβληθούν, δηλαδή είναι ευαίσθητα στις αλλαγές του επιτοκίου ή είναι αμετάβλητα.

Σχετικά με το χρονικό διάστημα ανάλυσης, όσο πιο σύντομο, τόσο πιο αντιπροσωπευτικό θα είναι και το αποτέλεσμα. Αφού προσδιοριστούν ποια είναι τα ευαίσθητα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους υπολογίζεται το gap, δηλαδή:

$$Gap = RSA_s - RSL_s$$

όπου:

RSA_s και RSL_s είναι τα «ευαίσθητα» στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού αντίστοιχα.

Τα καθαρά έσοδα από τόκους επηρεάζονται, από τις μεταβολές του επιτοκίου, από το μέγεθος και τη σύνθεση των στοιχείων του Ενεργητικού και του Παθητικού.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι ένα πιστωτικό ίδρυμα εμφανίζει τα παρακάτω στοιχεία στο συνοπτικό ισολογισμό του:

Λήξη	Στοιχεία ενεργητικού	Μέση απόδοση	Στοιχεία παθητικού	Κόστος επιτοκίου
Ευαίσθητα στοιχεία	400	6%	500	3%
Μη ευαίσθητα στοιχεία	300	10%	100	7%
Μη κερδοφόρα	100		100	
Σύνολο	800		700	
Ίδια κεφάλαια			200	
Ενεργητικό	1600		1600	

Στη στήλη Μέση απόδοση του ενεργητικού είναι καταχωρημένη η απόδοση των στοιχείων του ενεργητικού (το μέσο επιτόκιο των χορηγήσεων) και στη στήλη κόστος επιτοκίου παρουσιάζεται το κόστος επιτοκίου (το μέσο επιτόκιο καταθέσεων).

Τα καθαρά έσοδα από τόκους (Net Interest Income-NII) προσδιορίζονται ως εξής:

$$NII = 400 * 6\% + 300 * 10\% - 500 * 3\% - 100 * 7\% = 32 \text{ εκ.}$$

Το καθαρό περιθώριο επιτοκίου προσδιορίζεται ως εξής:

$$NIM = \frac{32}{700} = 4,57\%$$

Το Gap προσδιορίζεται ως εξής:

$$GAP = 400 - 500 = -100$$

Το οποίο σημαίνει ότι η συγκεκριμένη τράπεζα έχει περισσότερα στοιχεία παθητικού (υποχρεώσεις, όπως για παράδειγμα καταθέσεις) επομένως θα αυξηθεί το κόστος κεφαλαίου σε μια ενδεχόμενη αύξηση των επιτοκίων.

Αν τα επιτόκια αυξηθούν κατά 1%, η μεταβολή των εσόδων από τόκους θα είναι:

$$\Delta NII = GAP * \Delta R = (-100) * 1\% = -1 \text{ εκ.}$$

, που είναι η μείωση των εσόδων από τους τόκους.

Το μέγεθος των ευαίσθητων στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού επηρεάζει τη μεταβολή των εσόδων από τόκους. Εάν στην παραπάνω περίπτωση τα ευαίσθητα στοιχεία του ενεργητικού ήταν 800 και τα στοιχεία παθητικού 1000, τότε το $GAP=800-1000=-200$ και η μεταβολή των εσόδων από τόκους σε μια αύξηση των επιτοκίων θα ήταν:

$$\Delta NII = GAP * \Delta R = (-200) * 1\% = -2 \text{ εκ.}$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς, το πιστωτικό ίδρυμα μπορεί να διαμορφώσει ανάλογα την πολιτική του. Όταν δηλαδή αναμένεται αύξηση των επιτοκίων πρέπει να μειώσει τα ευαίσθητα στοιχεία του παθητικού. Τότε, εφόσον έχει αρνητικό Gap, η τιμή του Gap θα πρέπει να πλησιάζει το μηδέν ώστε να μειώσει την αύξηση του κόστους χρήματος. Θα μπορούσε να μειώσει την προσπάθεια για προσέλκυση καταθέσεων και να δώσει έμφαση στην προσέλκυση των δανείων.

Το υπόδειγμα της μέσης διάρκειας αναμονής αξιών – ανοίγματος (duration gap, d-gap)

Η διάρκεια (duration), όπως είχαμε δει παραπάνω, μετρά τη μέση «ζωή» ενός χρηματοδοτικού προϊόντος, δηλαδή το μέσο χρόνο που απαιτείται για την κάλυψη του αρχικού κόστους. Το υπόδειγμα της μέσης διάρκειας αξιών-ανοίγματος επικεντρώνεται στη διαχείριση του καθαρού εισοδήματος από τόκους. Αφού προσδιοριστεί η σταθμισμένη διάρκεια (duration) του ενεργητικού και του παθητικού, ο κίνδυνος επιτοκίου προσδιορίζεται από την εύρεση της d-gap. **Η d-gap αποτελεί το μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο των επιτοκίων.**

Η λογική της ανάλυσης είναι ότι ο κίνδυνος επιτοκίου αυξάνει όταν οι χρονικές περίοδοι των εισροών διαφέρουν από εκείνες των εκροών, δηλαδή όταν διαφέρουν τα duration του ενεργητικού και του παθητικού. Σημειώνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια, τόσο πιο ευαίσθητα είναι τα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού σε μια μεταβολή των επιτοκίων.

Παράδειγμα: Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται στοιχεία του ισολογισμού μιας τράπεζας σε εκατομμύρια.

Υποθέτουμε επίσης ότι η μέση χρονική διάρκεια των δανείων και των ομολόγων είναι 3 έτη, στις προθεσμιακές καταθέσεις 1 έτος και στα πιστοποιητικά καταθέσεων είναι 2 έτη.

Ενεργητικό	Αξία	Επιτόκιο	Παθητικό	Αξία	Επιτόκιο
Ταμείο	100		Καταθέσεις προθεσμίας	300	3%
Χορηγήσεις	800	6%	Πιστοποιητικά καταθέσεων	600	2%
Ομόλογα	100	3%	Σύνολο υποχρεώσεων	900	
Σύνολο απαιτήσεων	900		Ίδια κεφάλαια (μετοχικό κεφάλαιο)	100	
Σύνολο ενεργητικού	1000		Σύνολο παθητικού	1000	

Αρχικά, υπολογίζουμε τα duration:

$$Duration \text{ χορηγήσεων} = \frac{1 * \frac{48}{1,06} + 2 * \frac{48}{(1,06)^2} + 3 * \frac{848}{(1,06)^3}}{800} = 2,83$$

$$Duration \text{ ομολόγων} = \frac{1 * \frac{3}{1,03} + 2 * \frac{3}{(1,03)^2} + 3 * \frac{103}{(1,03)^3}}{100} = 2,91$$

$$Duration \text{ καταθέσεων προθεσμίας} = \frac{1 * \frac{309}{1,03}}{300} = 1$$

$$Duration \text{ πιστοποιητικών καταθέσεων} = \frac{1 * \frac{12}{1,02} + 2 * \frac{612}{(1,02)^2}}{600} = 1,98$$

$$Duration \text{ ενεργητικού} = \frac{800}{1000} * 2,83 + \frac{100}{1000} * 2,91 = 2,55$$

$$Duration \text{ παθητικού} = \frac{300}{900} * 1 + \frac{600}{900} * 1,98 = 1,65$$

(το μετοχικό κεφάλαιο δεν περιλαμβάνεται στους υπολογισμούς)

Παρατηρούμε ότι το duration ενεργητικού υπερβαίνει το duration παθητικού. Αυτό σημαίνει ότι η αξία του ενεργητικού μεταβάλλεται περισσότερο σε σχέση με την αξία του παθητικού σε μια μεταβολή του επιτοκίου κατά το ίδιο ποσοστό.

Το καθαρό εισόδημα από τόκους είναι:

$$800 * 6\% + 100 * 3\% - 300 * 3\% - 600 * 2\% = 30 \text{ εκ.}$$

Το duration gap προσδιορίζεται ως εξής:

$$d - gap = 2,55 - \left(\frac{900}{1000} \right) * 1,65 = 1,069$$

Αν υποθέσουμε ότι τα επιτόκια μεταβάλλονται κατά 1% η τρέχουσα αξία των στοιχείων του ισολογισμού θα είναι:

Για τα δάνεια:

$$\Delta P = -duration * \left[\frac{\Delta i}{1 + i} \right] * P = -2,83 * \left[\frac{0,01}{1,06} \right] * 800 = -21,3$$

Άρα, η νέα αξία των δανείων θα είναι: 800-21,3=778,7

Για τα ομόλογα:

$$\Delta P = -2,91 * \left[\frac{0,01}{1,03} \right] * 100 = -2,82$$

Άρα, η νέα αξία των ομολόγων θα είναι: $100 - 2,82 = 97,18$

Για τις καταθέσεις προθεσμίας:

$$\Delta P = -1 * \left[\frac{0,01}{1,03} \right] * 300 = -2,91$$

Άρα, οι καταθέσεις προθεσμίας θα διαμορφωθούν ως εξής: $300 - 2,91 = 297,91$

Για τα πιστοποιητικά καταθέσεων:

$$\Delta P = -1,98 * \left[\frac{0,01}{1,02} \right] * 600 = -11,64$$

Άρα, τα πιστοποιητικά καταθέσεων θα διαμορφωθούν ως εξής: $600 - 11,64 = 588,36$

Ο πίνακας με τις νέες αξίες των στοιχείων του ενεργητικού και παθητικού με τη μεταβολή των επιτοκίων διαμορφώνεται ως εξής:

Ενεργητικό	Αξία	Επιτόκιο	Παθητικό	Αξία	Επιτόκιο
Ταμείο	100		Καταθέσεις προθεσμίας	297,91	4%
Χορηγήσεις	778,7	7%	Πιστοποιητικά καταθέσεων	588,36	3%
Ομόλογα	97,18	4%	Σύνολο υποχρεώσεων	886,27	
Σύνολο απαιτήσεων	875,88		Ίδια κεφάλαια (μετοχικό κεφάλαιο)	89,61	
Σύνολο ενεργητικού	975,88		Σύνολο παθητικού	975,88	

Τα duration διαμορφώνονται ως εξής:

Duration χορηγήσεων=2,80

Duration ομολόγων=2,88

Duration καταθέσεων προθεσμίας=1

Duration πιστοποιητικών καταθέσεων=1,97

Duration ενεργητικού=2,52

Duration παθητικού=1,64

Το καθαρό εισόδημα από τόκους θα είναι 28,829 εκ.

Και το d-gap θα είναι 1,034

Όπως παρατηρούμε το καθαρό εισόδημα από τόκους μειώνεται κατά 1,71 εκ. (αυξάνεται το κόστος χρήματος). Επίσης, μειώνεται η αξία του ενεργητικού και το ποσό της μείωσης αφαιρείται από τα ίδια κεφάλαια στο παθητικό.

Όπως γίνεται αντιληπτό, η duration gap analysis υπολογίζει με ένα σύντομο και κατανοητό τρόπο την έκθεση της τράπεζας στον επιτοκιακό κίνδυνο. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή της d-gap τόσο πιο μικρή είναι η έκθεση της τράπεζας στις μεταβολές του επιτοκίου. Η τράπεζα μπορεί να μειώσει την έκθεση στον κίνδυνο μειώνοντας την τιμή της d-gap πετυχαίνοντας την ανοσοποίηση (immunization) του χαρτοφυλακίου. Γνωρίζουμε ότι η μεταβολή των ιδίων κεφαλαίων εξαρτάται από τη διαφορά της μεταβολής του ενεργητικού σε σχέση με το παθητικό, δηλαδή ισχύει:

$$\Delta E = \Delta A - \Delta L$$

όπου:

ΔE = η μεταβολή ιδίων κεφαλαίων

ΔA = η μεταβολή του ενεργητικού

ΔL = η μεταβολή του παθητικού.

Αν ΔA και ΔL είναι τα duration του ενεργητικού και του παθητικού αντίστοιχα και A είναι τα στοιχεία του ενεργητικού, τότε ισχύει:

$$\Delta E = -(DA - k * DL) * A * \frac{\Delta R}{1 + R}$$

όπου $k = \text{Υποχρεώσεις} / \text{Ενεργητικό}$

Η παραπάνω σχέση δεικνύει τη μεταβολή στην καθαρή θέση από μια μεταβολή των επιτοκίων σε σχέση με το ενεργητικό, το παθητικό και τη μόχλευση k .

Παράδειγμα: Αν υποθέσουμε ότι τα duration ενεργητικού και παθητικού ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος είναι $DA=6$ χρόνια για το ενεργητικό και $DL=4$ χρόνια για το παθητικό και αναμένεται ότι τα επιτόκια θα αυξηθούν από 9% σε 10%, ποια θα είναι η επίπτωση στα ίδια κεφάλαια? Με ποιο τρόπο μπορεί να μειωθεί η ζημιά?

Ο συνοπτικός ισολογισμός της τράπεζας σε εκατομμύρια ευρώ πριν την αύξηση των επιτοκίων είναι:

Ενεργητικό (€ εκατ.)	Παθητικό (€ εκατ.)
ενεργητικό = 110	Υποχρεώσεις = 100 Ίδια κεφάλαια = 10
110	110

Λύση:

Η επίπτωση στα ίδια κεφάλαια της τράπεζας υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta E = -(DA - k * DL) * A * \frac{\Delta R}{1 + R} = -(6 - 0,90 * 4) * 110 * \frac{0,01}{1 + 0,09} = -2,42 \text{ εκ.}$$

Το οποίο σημαίνει ότι η τράπεζα θα χάσει 2,42 εκ. ευρώ εάν αυξηθούν τα επιτόκια κατά 1%. Ο ισολογισμός διαμορφώνεται ως εξής:

Ενεργητικό (€ εκατ.)	Παθητικό (€ εκατ.)
ενεργητικό = 103,95	Υποχρεώσεις = 103,95-7,58=96,37 Ίδια κεφάλαια = 10-2,42=7,58
103,95	103,95

όπου η τιμή του ενεργητικού υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta P = -duration * \left[\frac{\Delta i}{1 + i} \right] * P = -6 * \left[\frac{0,01}{1,09} \right] * 110 = -6,05$$

Δηλαδή μειώνεται κατά 6,05 άρα η τιμή του ενεργητικού γίνεται 103,95.

Για να μπορέσει η τράπεζα να μειώσει την ζημιά, δηλαδή να μηδενίσει την ΔE , αυτό που μπορεί να κάνει είναι να μηδενίσει τη διαφορά, δηλαδή:

$$DA - k * DL = 0 \rightarrow DA = k * DL$$

Επομένως, να θέσει $DL = \frac{DA}{k} = \frac{6}{0,9} = 6,66$.

Άρα, πρέπει να προσπαθήσει να αυξήσει τη διάρκεια του παθητικού ώστε να φτάσει τουλάχιστον 6,66.

Τότε η ΔΕ θα είναι:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -(DA - k * DL) * A * \frac{\Delta R}{1 + R} \\ &= -(6 - 0,90 * 6,66) * 110 * \frac{0,01}{1 + 0,09} \approx 0 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, αντί να μεταβάλλει το DL μπορεί να μεταβάλλει αντίστοιχα το DA.