

Θέματα εργασίας στο μάθημα 'Στοχαστική Μοντελοποίηση'- Ιανουάριος -Φεβρουάριος 2022

1. Να δείξετε ότι η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dx_t = m(-bx_t + c)dt + sdB_t, x_0 = d,$$

έχει ισχυρή λύση και να την προσδιορίσετε, όπου $B_t, t \in [0, T]$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown και m, c, d, b : πραγματικοί αριθμοί.

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Itô

$$\int_0^T B_t^2 dB_t.$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Lebesgue της συνάρτησης της συνάρτησης $f(x) = \sin x, x \in Q, f(x) = x^2, x \in [0, 1] \setminus Q$, στο διάστημα $[0, 1]$, όπου Q είναι το σύνολο των ρητών αριθμών στο διάστημα $[0, 1]$.
4. Να δείξετε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue ίσο με μηδέν.
5. Να δείξετε ότι η σ -άλγεβρα που παράγεται από μια τυχαία μεταβλητή X με πραγματικές τιμές, συμπίπτει με τη σ -άλγεβρα που παράγεται από την $Y = aX + b$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.