# Εργασία στο μάθημα ΄Στοχαστική Μοντελοποίηση΄

7 Ιουνίου 2023

1. Να διατυπωθεί το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής κατά Riemann και να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 0$, $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$ όπου $x_0 \in [0,1]$ και $f(x_0) = 1$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f_n(x) = 0$, $x \in [0,1] \setminus \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ και $f(x_i) = 1$, $x = x_i$, $i = 0, 1, ..., n$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann, ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών στο $[0,1]$ δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, αλλά είναι είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα κατά Lebesgue της χαρακτηριστικής συνάρτησης των ρητών στο $[0,1]$.

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Ito
$$\int_0^T B_t^2 dB_t,\, T > 0.$$

4. Αν η συνάρτηση $f : \Omega \to [0,1]$ είναι $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη (όπου $\mathcal{F}$ : $\sigma$ -άλγεβρα του $\Omega$, να δείξετε ότι $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, όπου $A$ είναι ένα μη κενό σύνολο το οποίο είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

5. Να δείξετε το ίδιο εάν το $A$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων.