→ Μία τ.μ. X είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη

ανν $X^{-1}((\alpha,\beta)) \in \mathcal{F}$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

με $\alpha < \beta$.

→ ~~Η~~ σ-άλγεβρα που παράγεται

από μία τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

είναι η τομή όλων

των σ-αλγεβρών που

περιέχουν τα

$$\cancel{X}^{-1}((a,\beta)) :=$$

$$\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (a,\beta) \}$$

Ανισότητα Cauchy - Shwarz
για f, g ολοκληρώσιμες :

1) $f = f-g+g \leq |f-g| + g$

$$g = g-f+f \leq |f-g| + f$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int_\Omega f \, dP - \int_\Omega g \, dP \right| \leq \int_\Omega |f-g| \, dP$$

Ορισμός της δεσμ. μέσης τιμής

2) $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) :\!= Y$ έτσι ώστε.

$$\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \quad , \text{ για κάθε } A \in \mathcal{F}$$

αν η X είναι G-μετρήσιμη και $\mathcal{F} \subseteq G$

3) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X)\, I_{\underline{\Omega}}$ αν

$$\mathcal{F}_0 = \{ \emptyset, \underline{\Omega} \}$$

4) Αν $\underline{\Omega}$: πεπερασμένο τότε κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα και αντιστρόφως.

5) Αν $\underline{\Omega}$: πεπερασμένο, τότε αν $\{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \}$ μία διαμέριση του $\underline{\Omega}$,

4

η άλγεβρα που παράγεται από την $\mathbb{F} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ είναι η ακόλουθη:

$$\sigma(\mathbb{F}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

με $1 \leq m \leq k$.

Επίσης, $\mathbb{E}(X | \sigma_i) = \theta_i I_{\sigma_i}$,

όπου $\theta_i \in \mathbb{R}$.

Τότε $\mathbb{E}(X | \mathbb{F}) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \theta_i I_{\sigma_i}(\omega) \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(\sigma_i)}$$

δηλ. $\mathbb{E}(X \mid \sigma(\mathbb{F})) := \mathbb{E}(X \mid \mathbb{F})$.

Αφού $\sigma_i \subseteq \Omega$ κάθε

ω έχει μία πιθανότητα

$\mathbb{P}(\omega)$

δηλ. $\mathbb{P}(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(\omega_j)$

αν $\sigma_i = \{\omega_1, \dots, \omega_\ell\}$

5

$$\underline{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Π.χ. αν $\mathbb{F} = \{ \underset{\sigma_1}{\{1, 2\}}, \underset{\sigma_2}{\{3, 4\}}, \underset{\sigma_3}{\{5\}} \}$

και $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) =$

$= \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5)$

$= \frac{1}{5}$,

$\mathbb{P}(\sigma_1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(\sigma_2) = \frac{2}{5}$,

$\mathbb{P}(\sigma_3) = \frac{1}{5}$.

τότε αν $X(1) = X(2) = 5$,

$X(3) = X(4) = 6$

6

$X(5) = 1$,

7

$$\mathbb{E}(x|\sigma_1) = \frac{X(1)\cdot P(1) + X(2)\cdot P(2)}{P(1) + P(2)}$$

$$= 5\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{5} \Big/ \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2/1}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\mathbb{E}(x|\sigma_2) = \frac{X(3)\cdot P(3) + X(4)\cdot P(4)}{P(3) + P(4)}$$

$$= \frac{2\cdot 6/5}{2/5} = 6$$

8

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma_3) = X(5) = 1.$$

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma_1) \cdot I_{\sigma_1} + \mathbb{E}(X \mid \sigma_2) I_{\sigma_2}$$

$$+ \mathbb{E}(X \mid \sigma_3) \cdot I_{\sigma_3} =$$

$$= \mathbb{E}(X \mid \mathbb{F}) =$$

$$= 5 \cdot I_{\sigma_1} + 6 \cdot I_{\sigma_2} + 1 \cdot I_{\sigma_3}.$$

9

Άσκηση:

1) Να δείξετε ότι αν $\mathbb{F} = \{\Omega\}$ τότε $\mathbb{E}(X|\mathbb{F}) = \mathbb{E}(X) \cdot I_{\Omega}$

2) Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\mathbb{F} = \{\underbrace{\{1, 2\}}_{\sigma_1}, \underbrace{\{3, 4, 5\}}_{\sigma_2}\}$

$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \frac{1}{5}$,

όπου $\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ αν $\omega \in \Omega$,

10

να ~~δείξ~~ υπολογίσετε την

$\mathbb{E}(X \mid \mathbb{F})$ αν

$X(\omega) = \frac{1}{5} = X(\{\omega\})$

Οι άλλες ασκήσεις είναι:

11

α) Ό,τι αναφέρεται ως άσκηση στα Έγγραφα που περιέχουν το πρώτο αρχείο.

β) Αν $\underline{\Omega} \neq \emptyset$ να δείξετε ότι το $2^{\underline{\Omega}}$ είναι σ-άλγεβρα.

αν το $\underline{\Omega}$ είναι είτε αριθμήσιμο, είτε <u>συνεχές</u>!

γ) Αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με

$$f_n : \underline{\Omega} \to \mathbb{R},$$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(12)

ως προς το χώρο πιθανότητας

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. και $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} f$

τότε και η f είναι $\mathcal{F}$-

μετρήσιμη.

δ) Κάθε πεπερασμένο σύνολο

του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο

Lebesgue μηδέν.

ε) Κάθε αριθμήσιμο σύνολο

του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο

Lebesgue μηδέν.

(13)

Υπενθύμιση:

Αν Ω : μη κενό σύνολο,

$\mathcal{F}$: σ-άλγεβρα,

τότε η συνάρτηση

$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$,

ονομάζεται μέτρο

<u>ανν</u> $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$ και

A_n : ξένα

ανά δύο μεταξύ και* →

τους, $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

14

*και $\mu(\emptyset) = 0$

μιας και $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Αν $\mu(\Omega) = 1$, τότε το μέτρο

$\underline{\mu}$: ονομάζεται μέτρο πιθανότητας.

Αν $\mu(N) = 0$, $N \in \mathcal{F}$ και

για κάθε $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq N$

ισχύει $\mu(A) = 0$, τότε

το N ονομάζεται <u>άτομο</u>.

Αν κάθε $N \in \mathcal{F}$, με $\mu(N) = 0$ είναι

άτομο, τότε το

μετρο $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ ονομάζεται

ατομικό

Π.χ. :

$\mu : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ με

$\mu(A) = \# A$,

είναι ατομικό,

γιατί $\underbrace{\mu(\{n\})}_{=1} > 0$ και $\{n\} \in 2^{\mathbb{N}}$,

ενώ το μόνο υποσύνολο

του $\{n\}$ είναι το

$\emptyset$, για

κάθε $n \in \mathbb{N}$.