Εισαγωγικές Έννοιες

1. Δύο σύνολα A, B ονομάζονται ισοπληθή ή ισοδύναμα αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $f : A \to B$, η οποία είναι ένα προς ένα και επί και επομένως η αντίστροφή της είναι καλά ορισμένη. Αν δύο σύνολα A, B είναι ισοδύναμα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $A \sim B$.

2. Η f ονομάζεται απεικόνιση ισοδυναμίας.

3. Κάθε σύνολο της μορφής $T_m = \{0, 1, ..., m\}$, όπου $m \in N$ ονομάζεται αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών.

4. Κάθε σύνολο A που είναι ισοδύναμο με κάποιο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών ονομάζεται πεπερασμένο.

5. Κάθε σύνολο A που είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών, ονομάζεται αριθμήσιμο.

6. Κάθε σύνολο που είναι είτε πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, ονομάζεται διακριτό.

7. Κάθε υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου είναι πεπερασμένο και κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.

8. Συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι κάθε υποδύνολο ενός διακριτού συνόλου είναι διακριτό.

9. Παράδιεγμα αριθμήσμου συνολου το οποίο είναι διάφορο των φυσικών αριθμών, αλλά αριθμήσιμο είναι το σύνολο των ακεραίων. Η αντίστοιχη απεικόνιση ισοδυναμίας, είναι η $f(z) = -z$, για κάθε $z \in Z$.

10. Ως άσκηση, να αποδείξετε ότι όντως αυτή η f είναι απεικόνιση ισοδυναμίας μεταξύ των ακεραίων και των φυσικών.

11. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Η απεικόνιση ισοδυναμίας του N και του Q. είναι η $g : Q \to Z$, όπου $g(\frac{m}{n}) = (m, n)$, όπου $m, n \in Z$ είναι τέτοια ώστε το κλάσμα $|fracmn$ να είναι ανάγωγο.

12. Η ισοδυναμία μεταξύ $N \times N$ και Z αποδεικνύεται μέσω της απεικόνισης $h(m, n) = m - n$, όπου $m, n \in Z$.

13. Κάθε σύνολο S ονομάζεται άπειρο, αν είναι αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο, αλλά όχι πεπερασμένο.

14. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω του ότι κάθε $\sqrt{n}$, όπου $n \in N$ και δεν είναι τετράγωνο κάποιου άλλου φυσικού αριθμού, δεν είναι ρητός αριθμός. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

15. Θα λέμε ότι ένα σύνολο είναι συνεχές εάν είναι ισοδύναμο με το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

16. Δεν ισχύει ότι κάθε υποσύνολο ενός συνεχούς συνόλου είναι συνεχές. Παράδειγμα για αυτό είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, που είναι υποσύνολο των πραγματικών αλλά όχι συνεχές.

17. Το διάστημα $(0, 1)$ είναι ισοδύναμο1με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η απεικόνιση ισοδυναμίας είναι η $w(x) = \frac{x}{x+1}, x \in R$.

18. Αποδεικνύεται ότι η w είναι απεικόνιση ισοδυναμίας. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

19. Η ένωση ενός συνεχούς συνόλου με ένα πεπερασμένο σύνολο των οποίων η τομή είναι το κενό σύνολο είναι συνεχές σύνολο.

20. Για να αποδείξουμε το παραπάνω θα χρειαστούμε την έννοια του διατακτικού αριθμού, βλ. παρακάτω στην ύλη.

21. Συμπέρασμα αυτού είναι ότι κάθε διάστημα $[0,1],[0,1),(0,1]$ είναι συνεχή σύνολα.

22. Αν επισυμάψουμε καθένα από το $\infty, -\infty$ ή και τα δύο μαζί τότε η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι συνεχή σύνολα.

23. Τα διαστήματα $[a,b),[a,b],(a,b]$, όπου $a,b \in R$ είναι συνεχή σύνολα. Όπως παραπάνω με την w, να βρείτε την απεικόνιση ισοδυναμίας, μεταξύ R και (a,b).

24. Σε ό,τι αφορά στις τυχαίες μεταβλητές, δικαριτή τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια τυχαία μεταβλητή της οποίας το σύνολο των ενδεχόμενων τιμών είναι διακριτό.

25. Συνεχής τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια τυχαία μεταβλητή της οποίας το σύνολο των ενδεχόμενων τιμών είναι ισοδύναμο με το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

26. Μικτή τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια τυχαία μεταβλητή X που είναι κυρτός συνδυασμός μιας συνεχούς και μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή $X = tY + (1-t)Z$, όπου Y είναι συνεχής και Z είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $t \in (0,1)$.

27. Να κατασκευαστεί μια μικτή τυχαία μεταβλητή από μία εκθετική και μία Poisson.

28. Το ίδιο για μία εκθετική και μία διωνυμική.

29. Μετρήσιμος χώρος ονομάζεται το ζεύγος (Ω,Σ), όπου Ω είναι ένα μη κενό σύνολο και Σ μια σ -άλγεβρα του Ω δηλαδή μια οικογένεια -συλλογή υποσυνόλων του Ω, τέτοια ώστε $\emptyset, \Omega \in \Sigma$, αν $A \in \Sigma$, τότε το συμπλήρωμα του A ανήκει στη Σ και αν $A_n \in \Sigma, n \in N$, τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. .

30. Μέτρο πιθανότητας P είναι μια συνάρτηση $P : \Sigma \to [0,1]$ όπου $P() = 0, P(\Omega) = 1$. Έστω $A_n \in \Sigma, n \in N$ και επιπλέον τα A_n είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Τότε ισχύει $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

31. Η τριάδα (Ω,Σ,P) ονομάζεται χώρος πιθανότητας.

32. Τυχαία μεταβλητή ως προς το χώρο πιιθανότητας (Ω,Σ,P) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $X : F \to R$.

33. Αν θεωρήσομε μια οικογένεια υοσυνόλωνν $\mathcal{A}$ του Ω, τότε σ -άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, ονομάζεται η σ -άλγεβρα που περιέχει από αριθμήσιμες ενώσεις και συμπληρώματα των συνόλων της $\mathcal{A}$. Συνήθως υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει ως στοιχείο της το Ω.

34. Η πλέον συνηθισμένη σ-άλγεβρα του R είναι αυτή που παράγεται από τα ανοικτά διαστήματά του, ονομάζεται σ-άλγεβρα του Borel και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$.

35. Σε κάθε τυχαία μεταβλητή $X : F \to R$, αντιστοιχεί ένα μέτρο πιθανότητας που συμβολίζεται με $P_X(A)"v = P(X^{-1}(A))$, όπου A είναι σύνολο Borel του R.

36. Το μέτρο πιθανότητας P_X ονομάζεται μέτρο κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

37. Το P_X επαγει τη γνωστή μας αθροιστική συνάρτηση κατανομής ως εξής : $F_X(a) = P_X(-\infty, a]$, όπου $a \in R$.

38. Συνήθως τα στοχαστκά φαινόμενα εκτός από τυχαίες μεταβλητές, περιγράφονται από τις στοχαστικές διαδικασίες.

39. Στοχαστική διαδικασία ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$, όπου το σύνολο $\mathcal{T}$, είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Το σύνολο $\mathcal{T}$ συνήθως ονομάζεται χρόνος -αν πρόκειται να μελετηθεί η χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου, ή χώρος για τη χωρική εξέλιξη ενός φαινομένου.

40. Παράδειγμα χρόνου είναι το κλειστό διάστημα $[0, T]$, $T > 0$ που είναι ολικά διατεταγμένο ως προς τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών.

41. Ένα σύνολο $\mathcal{T}$ είναι ολικά διατεταγμένο αν ορίζεται σε αυτό μια διμελής σχέση $\succeq$ η οποία είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική και επιπλέον οποιαδήποτε στοιχεία $a, b \in \mathcal{T}$ διατάσσονται ως προς την $\succeq$, δηλαδή είτε ισχύει $a \succeq b$, είτε $b \succeq a$.

42. Στο $[0, T]$ για παράδειγμα, μια τέτοια σχέση είναι η συνήθης διάταξη των πραγματικών αριθμών. Αν το πλήθος των στοιχείων του T είναι ισοδύναμο με αυτό των φυσικών αριθμών, τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται χερονοσειρά.

43. Αν το πλήθος των στοιχείων του T είναι συνεχές, τότε μια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου.

44. Παράδειγμα χωρικής στοχαστικής διαδικασίας είναι μια στοχ. διαδκασία στην οποία το $\mathcal{T}$ είναι ένα μη κενό σύνολο και $A \succeq B$ ισχύει όταν $B \subseteq A$, όποου A, B είναι υποσύνολα του T.