

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

-ΑΣΚΗΣΕΙΣ-

1) Να αποδειχθεί ότι το δυναμοσύνολο κάθε συνόλου είναι σ-άλγεβρα.

2) Να αποδειχθεί ότι αν μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς ένα χώρο πιθανότητας συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση τότε η συνάρτηση αυτή είναι επίσης μετρήσιμη.

3) Να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue ενός αριθμήσιμου συνόλου στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν.

4) Να δείξετε ότι αν $F = \{\Omega\}$ τότε $E(X|F) = E(X)I_\Omega$.

5) Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ και $F = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}\}$, όπου $\sigma_1 = \{1,2\}$, $\sigma_2 = \{3,4,5\}$,

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{5}$$

Δηλαδή $P(\omega) = P(\{\omega\})$ αν $\omega \in \Omega$.

Να υπολογίσετε την $E(X|F)$ αν $X(\omega) = \frac{1}{5} = X(\{\omega\})$

6) Αν $\Omega \neq \emptyset$ να δείξετε ότι το 2^Ω είναι σ-άλγεβρα αν το Ω είναι είτε αριθμήσιμο, είτε συνεχές.

7) Αν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ως προς το χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} f$ τότε και η f είναι \mathcal{F} -μετρήσιμη.

8) Κάθε πεπερασμένο σύνολο του \mathbb{R} έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

9) Κάθε αριθμήσιμο σύνολο του \mathbb{R} έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

10) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω του ότι κάθε \sqrt{n} , όπου $n \in \mathbb{N}$ και δεν είναι τετράγωνο κάποιου άλλου φυσικού αριθμού, δεν είναι ρητός αριθμός. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

11) Το διάστημα $(0, 1)$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η απεικόνιση ισοδυναμίας είναι η $w(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

12) Όπως παραπάνω με την w , να βρείτε την απεικόνιση ισοδυναμίας, μεταξύ \mathbb{R} και (a, b) , με $a < b$.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ -ΑΣΚΗΣΕΙΣ-

13) Να κατασκευαστεί μια μικτή τυχαία μεταβλητή από μία εκθετική και μία Poisson.

14) Να ορίσετε μια σ.δ. με προσauξήσεις Pareto και σύνολο χρόνου $[0, T]$.

15) Να ορίσετε μια σ.δ. με προσauξήσεις κατανομές με ελαφριά ουρά και σύνολο χρόνου το $[0, T]$.