Author: Hugh J. Hamilton

Title: Η ανάλυση ρητής συναρτήσεως σε απλά κλάσματα

Abstract: Θεωρήματα σχετικά με την ανάλυση ρητής συνάρτησης

Creator: HDML

# Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὑπό

HUGH J.HAMILTON, Pomona College (*)

Μετάφραση ἀπό τόν Ἀλέξη Παπαϊωάννου βοηθό τῆς Α΄Ἕδρας τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν τοῦ Ε.Μ.Π.

Ὁ μαθητής γνωρίζει ὅτι:

$$\frac{8x^3+16x^2+12x+8}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{6x+8}{x^2+2x+2}=\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{3+i}{x+1+i}$$

$$+\frac{3-i}{x+1-i}$$

ὅπου ἡ πρώτη ἀνάλυση ἀναφέρεται στό πεδίο τῶν πραγματικῶν καί ἡ δεύτερη στό μιγαδικό. Ὁ ἀκόλουθος εὔκολος τρόπος πού ἀποδεικνύει ὅτι τέτοιες ἀναλύσεις ρητῶν συναρτήσεων πάντα ὑπάρχουν καί εἶναι μοναδικές, δέν εἶναι τόσο γνωστός ὅσο θάπρεπε. Τό βασικό θεώρημα στό μιγαδικό πεδίο εἶναι τό κάτωθι θεώρημα 1.

Θ1. "Αν $P(x)$ καί $R(x)$ πολυώνυμα, $\alpha$ μιγαδικός ἀριθμός τέτοιος ὥστε $R(\alpha)\neq 0$ καί $n$ ἀκέραιος θετικός τότε ὑπάρχουν μία

---

(*) Δημοσιεύτηκε ἀρχικά στό Mathematics Magazine 45 (1972, p. 117-119). Μεταφράστηκε γιά τήν Ε.Μ.Ε. μέ ἄδεια τῆς Mathematical Association of America.

μόνο σταθερά A καί ἕνα μόνο πολυώνυμο S(x) γιά τά ὁποῖα

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n R(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^n} + \frac{S(x)}{(x-\alpha)^{n-1} R(x)} \qquad (1)$$

Ἐπί πλέον $A \neq 0$ ἄν τό x-α δέν εἶναι παράγοντας τοῦ P(x).

**Ἀπόδειξη.** Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα παραγοντοποιή - σεως γιά πολυώνυμα, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n R(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^n} + \frac{R(x)-AR(x)}{(x-\alpha)^n R(x)} = \frac{(x-\alpha)S(x)}{(x-\alpha)^n R(x)}$$

γιά κάποιο πολυώνυμο S(x) ἄν τό A ἐκλεγεῖ ἔτσι ὥστε τό πο - λυώνυμο P(x)-AR(x) νά μηδενίζεται ὅταν τό x=α (τό ὁποῖο πράγματι συμβαίνει π.χ. γιά P(α)/ (α)). Δεδομένου ὅτι αὐτή εἶναι ἡ μόνη δυνατή τιμή γιά τό A ἕπεται ἄμεσα ἡ μοναδικότητα τοῦ A καί τοῦ S(x).

Τελικά ἄν τό A=0 λύνοντας τήν (1) ὡς πρός P(x) βλέπουμε ὅτι τό x-α εἶναι παράγοντας τοῦ P(x). Στό ἴδιο ἀποτέλε - σμα θά φθάναμε ἄν στήν ἔκφραση ποῦχουμε γιά τό A ἐφαρμόζουμε πάλι τό πολυωνυμικό θεώρημα.

Ἀναλύοντας παρόμοια τόν τελευταῖο ὅρο τῆς σχέσεως (1) καταλήγουμε γιά τό δεξί μέλος τῆς (1) στήν ἔκφραση

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} + \frac{B}{(x-\alpha)^{n-1}} + \frac{T(x)}{(x-\alpha)^{n-2} R(x)}$$

ὅπου B μιά μοναδική σταθερά καί T(x) ἕνα μοναδικό πολυώνυμο Μετά ἀπό n τέτοιες πράξεις παίρνουμε

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n R(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^n} + \frac{B}{(x-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{C}{(x-\alpha)} + \frac{U(x)}{R(x)} \qquad (2)$$

ὅπου A,B,...,C μοναδικές σταθερές μέ $A \neq 0$ ἄν τό (x-α) δέν εἶναι παράγοντας τοῦ P(x) καί τό U(x) ἕνα μοναδικό πολυώνυμο. Ἀκολούθως ἄν ὑπάρχει ἕνας μιγαδικός b γιά τόν ὁποῖον

$R(x)=(x-b)^m V(x)$, ὅπου $V(x)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο μέ $V(b)\neq 0$ καί m ἕνας θετικός ἀκέραιος ἀναλύουμε τόν τελευταῖο ὅρο τῆς (2) μέ τόν ἴδιο τρόπο. Συνεχίζοντας ἔτσι στό ἀποτέλεσμα τοῦ παρακάτω θεωρήματος 2.

**Θεώρημα 2.** Ἄν $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα τότε

$$(3)\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\ \frac{\alpha_{11}}{x-x_1}+\frac{\alpha_{12}}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{\alpha\, n_1}{(x-x_1)^{n_1}}+\frac{\alpha_{21}}{x-x_2}+\frac{\alpha_{22}}{(x-x^2)^2}$$

$$+\dots+\frac{\alpha\, n_2}{(x-x_2)^{n_2}}\ +\dots+\frac{\alpha_{m_1}}{(x-x_m)}+\frac{\alpha_{m_2}}{(x-x_m)^2}+\dots+\frac{\alpha_{mn_m}}{(x-x_m)^{n_m}}+$$

$$+W(x),$$

ὅπου $x_j$ εἶναι οἱ διάφορες ρίζες τοῦ $Q(x)$ καί τά $n_j$ εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι βαθμοί τῶν ριζῶν αὐτῶν, οἱ $\alpha_{jk}$ εἶναι μοναδικές στάθερές μέ κανένα ἀπό τά $\alpha_{jn_j}$ μηδέν ἄν τά $P(x)$ καί $Q(x)$ εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα καί $W(x)$ ἕνα μοναδικό πολυώ - νυμο.

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (3) ἐκτός πιθανά ἀπό τόν $\frac{P(x)}{Q(x)}$ καί τόν $W(x)$, τείνουν στό 0 καθώς, τό x τείνει στό ἄπειρο καί ἐνθυμούμενοι τή συμπεριφορά τῶν πολυωνύμων γιά ἀριθμητικά μεγάλες τιμές τοῦ ὀρίσματος συμπεραίνουμε ὅ- τι τό $W(x)=0$ ἄν βαθμός p τοῦ $P(x)$ εἶναι μικρότερος τοῦ βα- θμοῦ q τοῦ $Q(x)$ καί βαθμός τοῦ $W(x)$ εἶναι $p-q$ ἄν $p\geq q$.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τά πολυώνυμα $P(x)$ καί $Q(x)$ τοῦ θεωρήματος 2 εἶναι πραγματικά. Τότε τό $Q(x)$ εἶναι γινόμενο. (i) μιᾶς σταθερᾶς (ii) πραγματικῶν γραμμικῶν παραγόντων τῆς μορφῆς $x-\alpha$ καί (iii) πραγματικῶν τετραγωνικῶν παραγόντων τῆς μορφῆς $x^2+bx+c$ πού δέν παραγοντοποιοῦνται στό πραγματι- κό πεδίο. Οἱ γραμμικοί παράγοντες ὁδηγοῦν, ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 2, σέ ὅρους σάν αὐτούς τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς τῆς (3) ὅπου οἱ $a_{jk}$ εἶναι προφανῶς πραγματικοί. Γιά νά πάρουμε τούς ὅρους στήν ἀνάλυση ὅπως παρουσιάζεται στό στοιχειώδη, πού ἀντιστοιχοῦν στούς μή παραγοντοποιήσιμους τετραγωνικούς παράγοντες, μᾶς εἶναι χρήσιμο ἕνα ἀποτέλεσμα ἀνάλογο μέ τό θεώρημα 1, τό παρουσιάζουμε σάν τό θεώρημα 3. Ἐπανειλημμένες ἐφαρμογές αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος ὁδηγοῦν σταῖς γνωστούς ὅρους τῆς ἀνάλυσης. Στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 3 χρησιμοποιοῦμε παῦλες γιά νά συμβολίσουμε τή σχέση τοῦ συζυγοῦς καί χρησιμοποιοῦμε τίς προτάσεις α) οἱ γραμμικοί παράγοντες τοῦ $x^2+bx+c$ εἶναι τῆς μορφῆς $x-\alpha$, $x-\bar{\alpha}$ ὅπου α δέν εἶναι πραγματικός β) ἡ διαφορά δύο συζυγῶν μιγάδων εἶναι (καθαρά) φανταστικός c) $T(\alpha)=T(\bar{\alpha})$ ἄν $T(x)$ πραγματική ρητή συνάρτηση τοῦ x d) ὁ συζυγής τοῦ γινομένου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν συζυγῶν e) $(\bar{\alpha})=\alpha$ καί f) καί ὁ λόγος δύο καθαρά φανταστικῶν εἶναι πραγματικός.

**Θεώρημα 3.** Ἔστω α, $\bar{\alpha}$ οἱ ρίζες τῆς μή παραγοντοποιήσιμης τετραγωνικῆς μορφῆς $x^2+bx+c$. Ἄν τά $P(x)$ καί $R(x)$ εἶναι πραγματικά πολυώνυμα μέ $R(\alpha)\neq 0$ (ἄρα καί $R(\bar{\alpha})\neq 0$) καί n ἕνας ἀκέραιος θετικός τότε ὑπάρχουν μοναδικές πραγματικές σταθερές A καί B καί ἕνα μοναδικό πραγματικό πολυώνυμο $S(x)$ γιά τά ὁποῖα

$$(4)\quad \frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^n R(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} + \frac{S(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}R(x)}.$$

Ἐπί πλέον δέν εἶναι καί τό A καί τό B μηδέν ἄν τό $(x-\alpha)$ δέν εἶναι παράγοντας τοῦ $P(x)$ (ἄρα οὔτε καί $x-\bar{\alpha}$ θᾶναι).

**Ἀπόδειξη.**

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)R(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{P(x)-(ax+B)R(x)}{(x^2+bx+c)^n R(x)}$$

$$= \frac{(x^2+bx+c)S(x)}{(x^2+bx+c)^n R(x)}$$

γιά κάποιο πολυώνυμο $S(x)$ ἄν τά $A$ καί $B$ μποροῦν νά ἐκλεγοῦν ἔτσι ὥστε τό πολυώνυμο $P(x)-(Ax+B)R(x)$ νά μηδενίζεται διά $x=\alpha$ καί $x=\bar{\alpha}$, ἔτσι οἱ συνθῆκες εἶναι:

$$P(\alpha) - (A\alpha+B)R(\alpha) = 0$$
$$P(\bar{\alpha}) - (A\bar{\alpha}+B)R(\bar{\alpha}) = 0$$

ἤ (συμβολίζουμε μέ $(T(x)$ τό πραγματικό ρητό κλάσμα $\frac{P(x)}{R(x)}$

$$\begin{aligned} A\alpha+B &= T(\alpha) \qquad \text{καί} \\ A\bar{\alpha}+B &= T(\bar{\alpha}) \end{aligned} \tag{5}$$

καί ἡ διακρίνουσα τῶν συντελεστῶν εἶναι $\alpha-\bar{\alpha}\neq 0$ ἐπειδή πλέον οἱ λύσεις τοῦ (5) εἶναι

$$A = \frac{T(\alpha)-T(\bar{\alpha})}{\alpha-\bar{\alpha}} = \frac{T(\alpha)-\overline{T(\alpha)}}{\alpha-\bar{\alpha}}$$

$$B = \frac{\alpha T(\bar{\alpha})-\bar{\alpha}T(\alpha)}{\alpha-\bar{\alpha}} = \frac{\alpha T(\bar{\alpha}) - \overline{\alpha T(\bar{\alpha})}}{\alpha-\bar{\alpha}}$$

ἕπεται ὅτι οἱ $A$ καί $B$ εἶναι πραγματικοί. Ἐφ'ὅσον οἱ τιμές αὐτές τῶν $A$ καί $B$ εἶναι οἱ μόνες δυνατές ἕπεται ἡ μοναδικότητα τῶν $A,B$ καί $S(x)$. Τελικά ἄν $A=B=0$ λύνοντας τήν (4) ὡς πρός $P(x)$ βλέπουμε ὅτι τό $x-\alpha$ εἶναι παράγοντας τοῦ $P(x)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Ἡ ἀνάλυση πού γίνεται στή σχέση (4) ἰσχύει στήν περίπτωση πού ἡ τετραγωνική μορφή $x^2+bx+c$ παραγοντοποιεῖται στό πεδίο τῶν πραγματικῶν. (Ἡ περίπτωση πού ἡ τετραγωνική μορφή εἶναι τέλειο τετράγωνο ἴσως πρέπει νά προσεχθεῖ ἰδιαίτερα).